Université de KHEMIS MILIANA
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département des Sciences de la Matière - L1 ST-SM
Série de TD de Physique 1, 2021-2022 Série 2. Partie II. Cinématique du P. M., Mouvement dans l'Espace

---

*Exercice 1: Examen Physique-1 2017/2018 L1 ST-SM (UDBKM)

On donne les équations paramétriques de la trajectoire plane d'un mobile : $x = t^2 - 1$ et $y = 2t$.

1. Déterminer l'équation de la trajectoire et la construire pour $0 \leq y \leq 5$.
2. Donner l'expression des composantes de la vitesse du mobile.
3. Donner l'expression de son accélération.
4. Calculer la composante tangentielle de l'accélération à $t = 2s$.
5. En déduire la composante normale de l'accélération à $t = 2s$.
6. Calculer le rayon de courbure à cette instant.

Exercice 2:

A partir du vecteur position $\vec{r}$, la différentielle de ce vecteur est donnée par $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$ se met en coordonnées cylindriques sous la forme :

$$d\vec{r} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho}d\rho + \frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}d\theta + \frac{\partial\vec{r}}{\partial z}dz$$

1. En utilisant les relations de passage entre le système de coordonnées cartésiennes et celui des coordonnées cylindriques, trouver les vecteurs : $\frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho}$, $\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}$ et $\frac{\partial\vec{r}}{\partial z}$
2. Déduire l'expression des vecteurs unitaires $\vec{u_r}$, $\vec{u_\theta}$ et $\vec{u_z}$ (coordonnées cylindriques) en fonction des vecteurs unités $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ (coordonnées cartésiennes). Vérifier que les vecteurs unitaires $\vec{u_r}$, $\vec{u_\theta}$ et $\vec{u_z}$ sont orthogonaux.
3. Ecrire le vecteur $\vec{V} = x\vec{i} - 2y\vec{j} + z\vec{k}$ en coordonnées cylindriques.

Exercice 3: Examen L1 MI Méc. du point 2007/2008 (UDBKM)

L'accélération d'un point matériel se déplaçant sur un plan est donnée par $\vec{a} = 2\vec{j}$ (en ms^{-2}). Sachant qu'à $t = 0s$, $v_{x0} = 1ms^{-1}$, $v_{y0} = 4ms^{-1}$, $x_0 = 2m$ et $y_0 = 9m$.

1. Déterminer le vecteur accélération du point matériel. Calculer son module.
2. En déduire le vecteur vitesse. Calculer son module.
3. En déduire le vecteur position. Calculer son module.
4. Montrer que l'équation de la trajectoire peut être mise sous la forme parabolique $y = \alpha x^2 + \beta$ où α et β sont des constantes qu'on demande de déterminer.
5. Tracer approximativement $y = f(x)$ dans l'intervalle $[-4m, +4m]$.

Exercice 4: :[2] Examen Physique-1 2010/2011 L1 MI (UDBKM)

Le vecteur position d'un point matériel est donné en fonction du temps d'après la loi :

$$\vec{r} = \alpha t\vec{i} - \beta t^2\vec{j}$$

où α et β sont des constantes positives.

1. Déterminer et tracer l'équation de la trajectoire du point M.
2. Calculer le vecteur vitesse $\vec{v}$ et son module.
3. Calculer le vecteur accélération $\vec{a}$ et son module.
4. Calculer, en fonction du temps, l'angle θ compris entre les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{v}$ en fonction du temps.
5. Calculer le vecteur vitesse moyenne pendant t premières secondes du mouvement et le module de ce vecteur.

Exercice 5:

Les coordonnées du vecteur vitesse d'un point matériel M sont données en fonction du temps par les équations paramétriques $v_x = 2$ et $v_y = 4(t-1)$. Sachant qu'à $t = 0$, $x = 0$ et $y = 0$

1. Déterminer l'équation de la trajectoire
2. Montrer que le point M possède une accélération constante dont on calculera les composantes tangentielle a_T et normale a_N

*Exercice 6: Rattrapage Mécanique du point L1 MI 2006/2007 (UDBKM)

Un point matériel se déplace à vitesse constante sur une orbite circulaire de rayon constant R.

1. Donner un schéma représentatif de la trajectoire du mouvement dans les systèmes de coordonnées polaires et cartésiennes.
2. Exprimer le vecteur position $\vec{r}$ dans les systèmes de coordonnées cartésiennes et polaires $\Re(O, \vec{i}, \vec{j})$ et $\Re(O, \vec{u_r}, \vec{u_\theta})$.
3. Déterminer le vecteur vitesse $\vec{v}$ dans les deux systèmes de coordonnées. En déduire son module v.
4. Montrer que le vecteur vitesse est perpendiculaire au vecteur position.
5. Déterminer le vecteur accélération $\vec{a}$ dans les deux systèmes de coordonnées. En déduire son module a. Exprimer le module a en fonction de v et du rayon R.
6. Ecrire la relation reliant la pulsation ω et la fréquence f.
7. Trouver une relation entre la période T et la fréquence f.
8. Application numérique : Calculer T, ω, v et a pour $f = 50Herz$ et $R = 0.1m$.

*Exercice 7: Examen Mécanique du point L1 MI 2010/2011 (UDBKM)

Un point matériel M se déplace sur une trajectoire suivant le système de coordonnées cylindrique $\Re(O, \vec{u_r}, \vec{u_\theta}, \vec{u_z})$. La position de M est repérée par les trois coordonnées définies par :

$$r = R,\ \varphi = \omega t + \varphi_0 \text{ et } z = h\varphi$$

où h, R, ω et φ_0 sont des constantes.

1. Ecrire le vecteur position du point M.
2. Déterminer les composantes de la vitesse du point M.
3. Déterminer l'angle θ que fait le vecteur vitesse $\vec{v}$ avec l'axe $(O, \vec{u_z})$.
4. Déterminer les composantes de l'accélération.
5. Calculer le rayon de courbure de la trajectoire.
6. Quel est le type de cette trajectoire.
   Rappel : Dans le système de coordonnées cylindriques on a :
   $\vec{r} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z$
   $\vec{v} = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\varphi}{dt}\vec{u}_\varphi + \frac{dz}{dt}\vec{u}_z$
   $\vec{a} = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right)\vec{u}_r + \left(\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\right)\vec{u}_\varphi + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{u}_z$

*Exercice 8:[1]

Un point matériel se déplace sur un cercle suivant la loi $s = t^3 + 2t^2$, où s est mesuré en mètre et t en secondes. Si l'accélération totale est $16\sqrt{2}ms^{-2}$ pour $t = 2s$, calculer le rayon du cercle.

Exercice 9:[1]

La position angulaire d'un point matériel se déplaçant sur une circonférence de $2.50m$ de rayon est donnée par l'expression $\theta = 1.5t^2$ où θ est en *radians* et t en secondes. Calculer l'accélération tangentielle, normale et totale du point matériel pour $t = 0.5s$.

Exercice 10:[2]

Le mouvement d'un point matériel dans un plan est décrit par la loi : $x = at$, $y = at(1 - \alpha t)$, où a et α sont des constantes positives, t, le temps. Déterminer :

1. l'équation de la trajectoire du point $y(x)$; représentez-la graphiquement.
2. la vitesse v et l'accélération a du point en fonction du temps.
3. l'instant t_0, où le vecteur vitesse fait un angle $\pi/4$ avec le vecteur accélération.

Rép. 1. $y = x - x^2\alpha/a$, **2.** $v = a\sqrt{1 + (1 - 2\alpha t)^2}$, $a = 2\alpha a = const$ **3.** $t_0 = 1/\alpha$.

Exercice 11:

Une fourmi remonte une voie inclinée d'un angle $\alpha = 26.56°$ fixée par ces deux extrémités au sol et au mur aux points $A(20, 0)$ et $B(0, 10)$ tels que indiqué sur la **Fig.** 1. La fourmi parcourt les 6 premiers mètres en $1mn$ avec une accélération constante $a = 3.33 \times 10^{-4} ms^{-2}$ pour atteindre une vitesse v qu'elle va conserver dans le reste de son trajet pour atteindre le point B. Si à $t = 0s$ la fourmi était au point A avec une vitesse initiale $v_0 = 0.08ms^{-1}$:

1. Déterminer le vecteur vitesse en tout instant t. Quelle est alors la vitesse de la fourmi à $t = 60s$.
2. Déterminer les équations paramétriques de la position de la fourmi en tout instant t.
3. Déterminer le vecteur position en fonction du temps. Le représenter pour $t = 55s$
4. Déduire l'équation de la trajectoire. La représenter sur une échelle convenable.

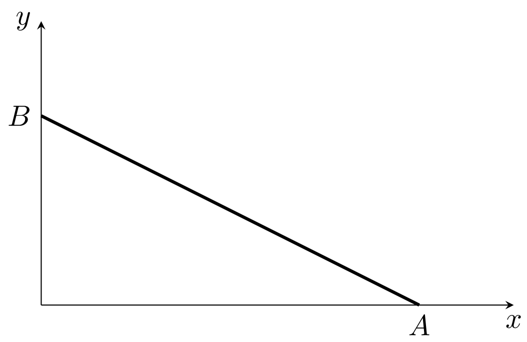


Figure 1: Voie inclinée d'un angle $\alpha = 26.56°$

Exercice 12 :

Un point matériel M est fixé sur la circonférence d'une roue de rayon R et qui roule sans glissement sur une trajectoire rectiligne avec une vitesse constante de module v. Le point commence son mouvement à partir du point I le plus bas en contact direct avec le sol :

1. Déterminer les équations du mouvement du point M.
2. Déterminer les temps pour lesquels le point M se trouve sur les deux points le plus bas et le plus haut par rapport au sol.
3. Calculer la vitesse du point M et déterminer les positions pour lesquelles cette vitesse est maximale ou minimale.
4. Calculer l'accélération du point M et représenter sur la trajectoire aux positions particulières de la question (3).

Exercice13:[1]

Un avion A vole vers le nord à $300kmh^{-1}$ par rapport au sol. Au même moment, un autre avion B vole dans la direction $N60°W$, à $200kmh^{-1}$ par rapport au sol. Trouver la vitesse de A par rapport à B et celle de B par rapport à A. Représentation vectorielle.

Exercice14:

Un avion vole avec une vitesse $\overrightarrow{v_A}$ parallèle à l'axe Ox et en même temps, un missile est tiré, à partir de l'origine O, avec une vitesse $\overrightarrow{v_B}$, on considère que $\theta = (\widehat{\overrightarrow{v_B}, \overrightarrow{i}})$. On pose qu'à $t = 0$, l'avion se retrouve avec les coordonnées suivantes : $x_A = 0$ et $y_A = h$.

1. Déterminer la vitesse relative de l'avion par rapport au missile $\overrightarrow{v_{BA}}$.
2. Déterminer les composantes de $\overrightarrow{v_{BA}}$. En déduire la position de l'avion par rapport au missile.
3. Quelle doit être la relation entre $\overrightarrow{v_A}$ et $\overrightarrow{v_B}$ pour que le missile atteigne sa cible.

Exercice15:

Le passager d'une voiture observe que la neige tombe en formant un angle de 80° par rapport à la verticale lorsque celui-ci roule à une vitesse de $110kmh^{-1}$. Lorsque la voiture s'arrête au feu rouge, le passager regarde la neige tomber et constate que celle-ci tombe verticalement. Calculer la vitesse de la neige par rapport au sol puis par rapport à la voiture.

References

[1] Alonso, M., Finn, E. J., Barrat, J. P., & Daune, M. (1986). Physique générale: Mécanique/[traduit par M. Daune]. Inter Editions.

[2] Irodov, I. E., & Irodov, I. E. (1983). Problèmes de physique générale. Mir.

[3] http://chadik.canalblog.com/archives/2018/04/08/36262773.html

Solution Exercice 07:

1. $\vec{r} = r\vec{u}_r = R\vec{u}_r$

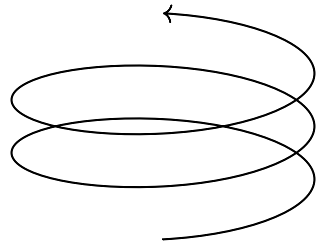
2. $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_r + \vec{v}_\varphi + \vec{v}_z = 0\vec{u}_r + R\omega\vec{u}_\varphi + h\omega\vec{u}_z$
   $v_r = \dfrac{dr}{dt} = 0$
   $v_\varphi = R\dfrac{d\varphi}{dt} = R\omega$
   $v_z = \dfrac{dz}{dt} = h\omega$
   avec comme module $v = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2 + v_z^2} = \omega\sqrt{R^2+h^2}$

3. Pour ce faire calculons les produits scalaires et vectoriel $\vec{u}_z \bullet \vec{v}$ et $\vec{u}_z \times \vec{v}$
   $\vec{u}_z \bullet \vec{v} = u_z v \cos\theta = h\omega$
   $\vec{u}_z \times \vec{v} = u_z v \sin\theta = R\omega\vec{u}_r$
   Les deux dernières équations permettent d'écrire :
   $\tan\theta = \dfrac{R}{h}$ d'où $\theta = \arctan\left(\dfrac{R}{h}\right)$, c'est une constante.

4. $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = -R\omega^2\vec{u}_r = \vec{a}_r$
   $a_r = -R\omega^2$
   $a_\varphi = R\dfrac{d\omega}{dt} = 0$
   $a_z = h\dfrac{d\omega}{dt} = 0$
   avec comme module $a = \sqrt{a_r^2 + a_\varphi^2 + a_z^2} = R\omega^2$.

5. $\vec{a} = \vec{a}_N + \cancelto{0}{\vec{a}_T} = -\vec{a}_r$. En prenant le modules des deux vecteur on a: $a_N = a_r$ d'où $\dfrac{v^2}{\rho} = R\omega^2$ et le rayon de courbure dans ce cas est $\rho = \dfrac{v^2}{R\omega^2} = \dfrac{\omega^2\left(R^2+h^2\right)}{R\omega^2} = R + \dfrac{h^2}{R}$

6. C'est une trajectoire de forme hélicoïdale.



Solution Exercice 11:

1. Le vecteur vitesse s'écrit comme :
   $$\vec{v_1} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$$
   sachons que la vitesse initiale s'écrit :
   $$\vec{v_0} = v_{0x}\vec{i} + v_{0y}\vec{j} = -v_0\cos\theta\vec{i} + v_0\sin\theta\vec{j}$$
   et que l'accélération est donnée par :
   $$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} = -a\cos\theta\vec{i} + a\sin\theta\vec{j}$$
   Le mouvement peut êtr décomposé en deux étape :

   - lorsque $0 \le t \le 60$: Dans ce cas les deux composante de la vitesse sont données par :
     $$v_x = -a\cos\theta t + v_{x0} = -a\cos\theta t - v_0\cos\theta$$
     $$v_y = a\sin\theta t + v_{y0} = a\sin\theta t + v_0\sin\theta$$
     d'où le vecteur vitesse qui s'écrit comme :
     $$\vec{v_1} = (-a\cos\theta t - v_0\cos\theta)\vec{i} + (a\sin\theta t + v_0\sin\theta)\vec{j}$$
     dont le module est :
     $$v_1 = \sqrt{(-a\cos\theta t - v_0\cos\theta)^2 + (a\sin\theta t + v_0\sin\theta)^2} = at + v_0$$
     Application numérique à $t = 60s$ on aura $v = 0.1ms^{-1}$
   - lorsque $t \ge 60$: Dans ce cas la fourmi va conserver la vitesse finale de l'étape précédente et donc la vitesse du mouvement dans ce cas a comme module $v = 0.1ms^{-1}$ mais le vecteur vitesse a comme expression :
     $$\vec{v_2} = -v\cos\theta\vec{i} + v\sin\theta\vec{j} \tag{2}$$

2. La position du mobile est repéré par les coordonnées de la fourmi qui peuvent être déterminées en intégrant les expressions de la vitesse en prenant en considérations les conditions aux limites pour chaque étape.

   - lorsque $0s \le t \le 60s$:
     $$v_{1x} = \frac{dx_1}{dt} \text{ d'où } \int dx = \int v_x dt$$

$$x_1(t) - x_0 = \int_0^t (a_x t - v_0 \cos\theta) dt$$

Les limite de l'intégrale sont l'instant initiale (début du mouvement) et un instant quelconque de la première étape, i.e., $t \leq 60$, en intégrant et sachant que $x_0 = 20m$ on trouve :

$$x_1(t) = \frac{1}{2} a_x t^2 - v_0 \cos\theta t + x_0$$

idem on trouve en procèdent de la même manière pour la position y sachant que $y_0 = 0$:

$$y_1(t) = \frac{1}{2} a_y t^2 + v_0 \sin\theta t$$

- lorsque $t \geq 60s$ le mouvement est rectiligne et uniforme et sa vitesse est constante et est donnée par l'expression (2) de la première étape de module $v = 0.1ms^{-1}$ dans ce cas on a :

$$x_2(t) - x_0 = \int_0^t (-v\cos\theta) dt \ d'où$$

$$x_2(t) = -v\cos\theta t + x_0$$

$$y_2(t) = v \sin\theta t$$

3. Le vecteur position est donnée par $\overrightarrow{r} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$, en substituant x et y par leurs expression correspondant au intervalle de temps de chaque étape :

- lorsque $0s \leq t \leq 60s$:

$$\overrightarrow{r} = (\frac{1}{2} a_x t^2 - v_0 \cos\theta t + x_0)\overrightarrow{i} + (\frac{1}{2} a_y t^2 + v_0 \sin\theta t)\overrightarrow{j} \qquad (3)$$

- lorsque $t \geq 60s$:

$$\overrightarrow{r} = (-v\cos\theta t + x_0)\overrightarrow{i} + (v\sin\theta t)\overrightarrow{j}$$

dont le module est :

$$r = \sqrt{(-v\cos\theta t + x_0)^2 + (v \sin\theta t)^2}$$

- pour $t = 55s$ dans cas cette valeur du temps appartient à l'intervalle de la première étape, en remplaçant dans l'expression (3) on trouve :

$$\overrightarrow{r} = 15.61\overrightarrow{i} + 2.19\overrightarrow{j}$$

dont le module est :

$$r = \sqrt{(15.61)^2 + (2.19)^2} = 15.76m$$

La figure suivante représente le vecteur position de la fourmi à $t = 55s$.

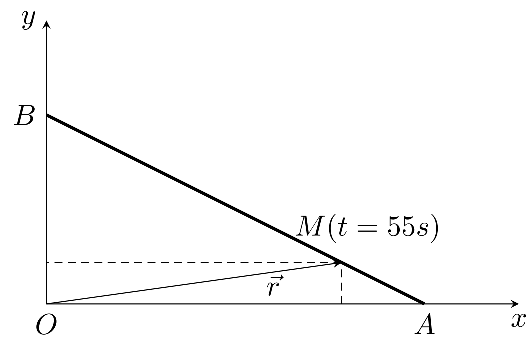


Figure 2: Voie rigide inclinée d'un angle $\alpha = 26.56°$

4. Il est claire que la trajectoire est rectiligne son équation peut être déduite des équations paramétriques de $x(t)$ et $y(t)$. La figure suivante représente la trajectoire suivie par notre chère fourmi **Fig.** 4[3].

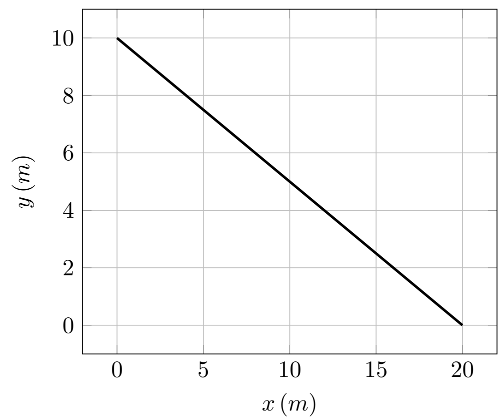


Figure 3: Trajectoire de la fourmi

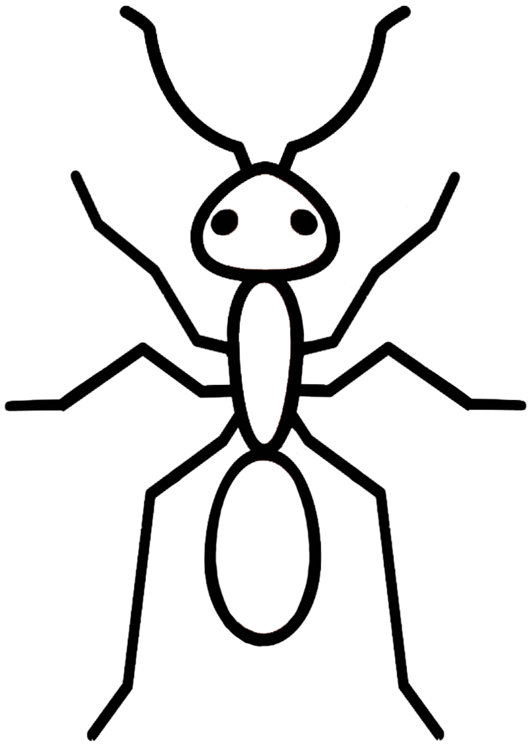


Figure 4: Notre chère fourmi agrandi à une échelle convenable.