Chapitre I: Cinématique d'un point matériel

I.1. Objectif :

Le but de la cinématique et de décrire de façon qualitatif le mouvement d'un corps sans s'intéresser au causes qui le produisent.

L'étude du mouvement d'un corps est basée sur l'étude des positions successives de ce dernier par rapport à un référentiel, ainsi la vitesse et l'accélération de ce corps et les relations qui relient ces trois grandeurs en fonction du temps.

I.2. définitions :

- ***Point matériel :*** un objet qui a des dimension négligeables à l'échelle macroscopique et que l'on assimile à un point géométrique.

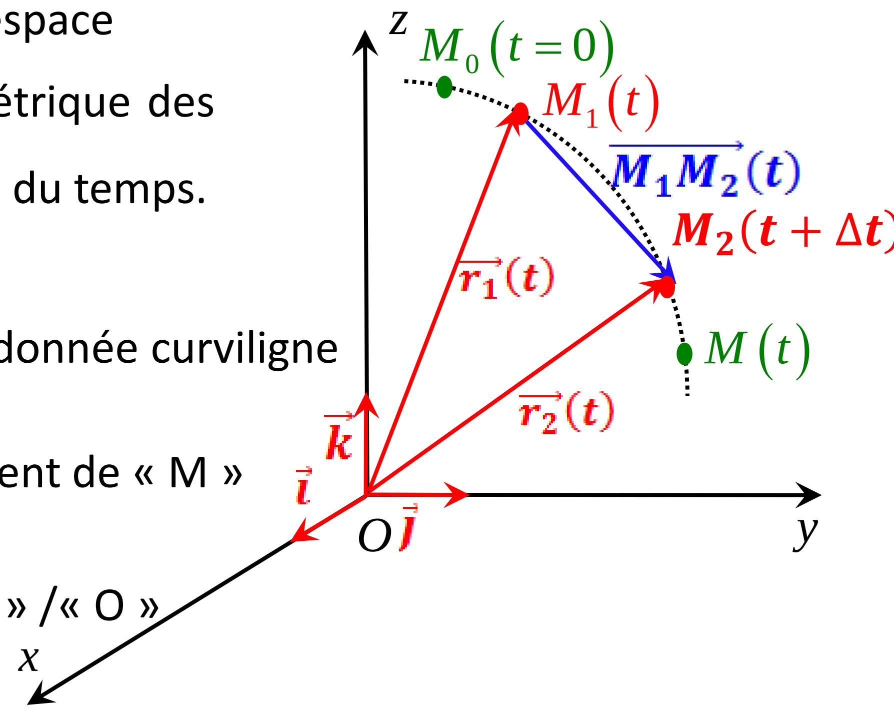
En réalité, l'étude de mouvement d'un objet peut être décrire par :

- le mouvement autour de son centre de masse.
- le mouvement de son centre de masse lui même.

❑ Trajectoire, Coordonnées curvilignes, équation horaire :

المعادلة الزمنية للحركة - الاحداثيات المنحنية – المسار

Soit « M » un point matériel mobile dans l'espace



- La trajectoire du point « M » est le lieu géométrique des positions successives occupées par « M » au cours du temps.
- La valeur algébrique $\widehat{M_0M}(t)$ est appelée Coordonnée curviligne
- $M_0M(t) = S(t)$: Equation horaire du mouvement de « M »
- $\overrightarrow{OM_1}$ *et* $\overrightarrow{OM_2}$: vecteurs position du point « M » /« O »
- $\overrightarrow{M_1M_2}(t)$: Vecteur de déplacement du « M » de la position M_1 (t) à la position M_2(t+ Δt)

$$\left|\overrightarrow{M_1M_2}(t)\right| = \left|\overrightarrow{\Delta OM}(t)\right| = \left|\overrightarrow{OM_2}(t) - \overrightarrow{OM_1}(t)\right| = \left|\vec{r_2}(t) - \vec{r_1}(t)\right|$$

II. Mouvement Curviligne

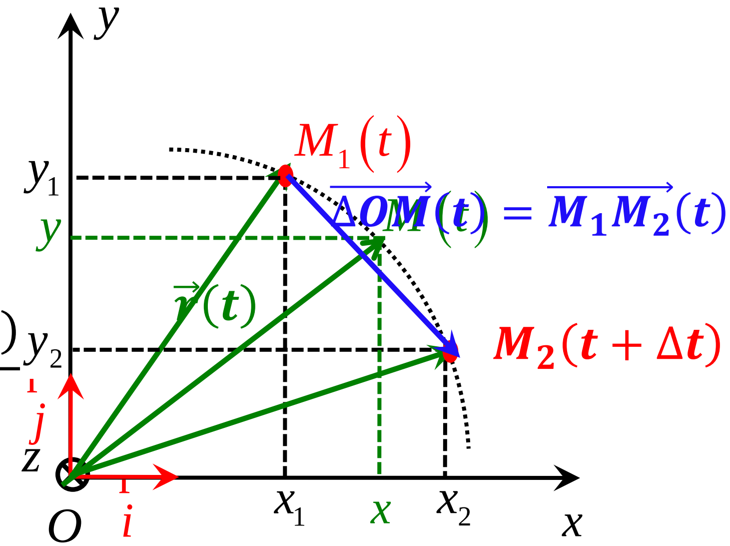
Le mouvement de « M » est défini par son vecteur position à chaque instant « «t » avec :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \vec{r}(t) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

II.1. Vitesse :

➢ ***Vitesse moyenne :***

$$\vec{V}_{moy} = \frac{\overrightarrow{\Delta OM}(t)}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}(t)}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{OM}_2(t+\Delta t) - \overrightarrow{OM}_1(t)}{\Delta t}$$



En coordonnées cartésiennes :

$$\left.\begin{aligned}\overrightarrow{OM}_1(t) &= x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}\\ \overrightarrow{OM}_2(t) &= x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{V}_{moy} = \frac{x_2 - x_1}{\Delta t}\vec{i} + \frac{y_2 - y_1}{\Delta t}\vec{j} + \frac{z_2 - z_1}{\Delta t}\vec{k}$$

$$\vec{V}_{moy} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\vec{k}$$

➢ *Vitesse instantanée*

Elle s'obtient en calculant la vitesse moyenne pour une intervalle du temps plus courte.

$$\vec{V}_{inst} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{V}_{moy} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta OM}(t)}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{dOM}(t)}{dt} = \frac{\overrightarrow{dr}(t)}{dt}$$

En coordonnées cartésiennes :

$$\vec{V}_{inst} = \vec{V}(t) = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

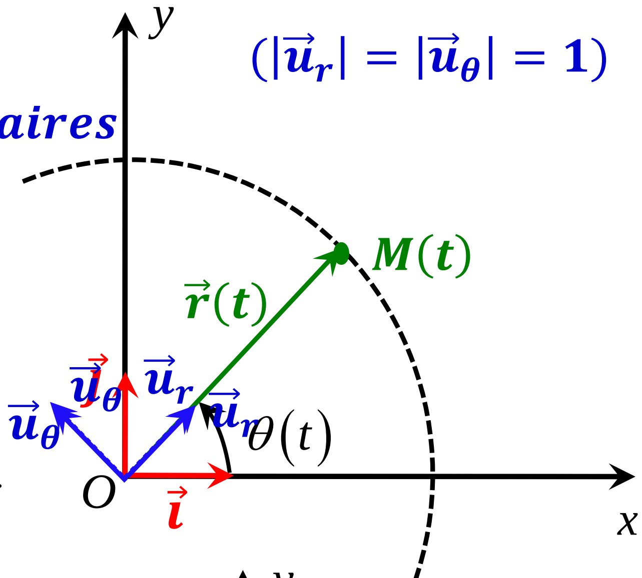
$$\begin{cases} V_x = \dfrac{dx}{dt} \\ V_y = \dfrac{dy}{dt} \\ V_z = \dfrac{dz}{dt} \end{cases}$$

Avec $\left|\vec{V}\right| = V = \sqrt{{V_x}^2 + {V_y}^2 + {V_z}^2}$

En coordonnées polaires :

$(|\vec{u}_r| = |\vec{u}_\theta| = 1)$

$$\overrightarrow{OM}(t) = \vec{r}(t) = r(t)\vec{u}_r \qquad \big(r(t), \theta(t)\big): \textbf{Coordonnées polaires}$$



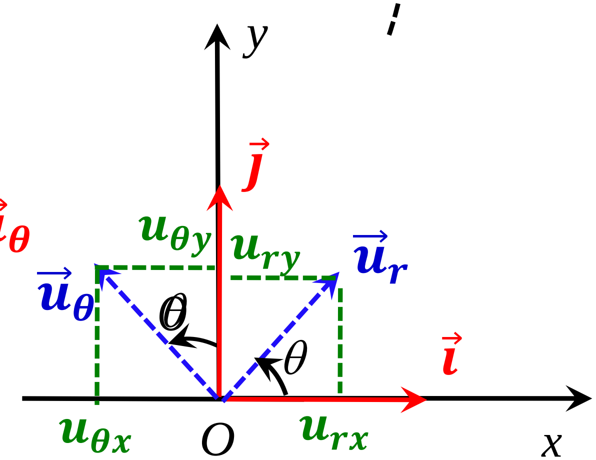
$$\vec{V}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} = \frac{d(r(t)\vec{u}_r)}{dt} = \frac{dr(t)}{dt}\vec{u}_r + r(t)\frac{d\vec{u}_r}{dt}$$

Calcul de $\dfrac{\overrightarrow{du_r}}{dt}$:

$$\overrightarrow{u_r} = u_{rx}\vec{\imath} + u_{ry}\vec{\jmath} = u_r cos\theta\vec{\imath} + u_r sin\theta\vec{\jmath} = cos\theta\vec{\imath} + sin\theta\vec{\jmath}$$

$$\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} = -sin\theta\frac{d\theta}{dt}\vec{\imath} + cos\theta\frac{d\theta}{dt}\vec{\jmath} = \frac{d\theta}{dt}(-sin\theta\vec{\imath} + cos\theta\vec{\jmath})$$

$$\overrightarrow{u_\theta} = -u_{\theta x}\vec{\imath} + u_{\theta y}\vec{\jmath} = -sin\theta\vec{\imath} + cos\theta\vec{\jmath} \Rightarrow \frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{d\theta(t)}{dt}\vec{u}_\theta$$



$$\boxed{\Rightarrow \vec{V}(t) = \frac{dr(t)}{dt}\vec{u}_r + r(t)\frac{d\theta(t)}{dt}\vec{u}_\theta}$$

$$\begin{cases} V_r(t) = \dfrac{dr(t)}{dt} & \textit{Composante radiale} \\ V_\theta(t) = r(t)\dfrac{d\theta(t)}{dt} & \textit{Composante transversale} \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Avec } |\vec{V}| = \sqrt{{V_r}^2 + {V_\theta}^2}}$$

En coordonnées cylindrique :

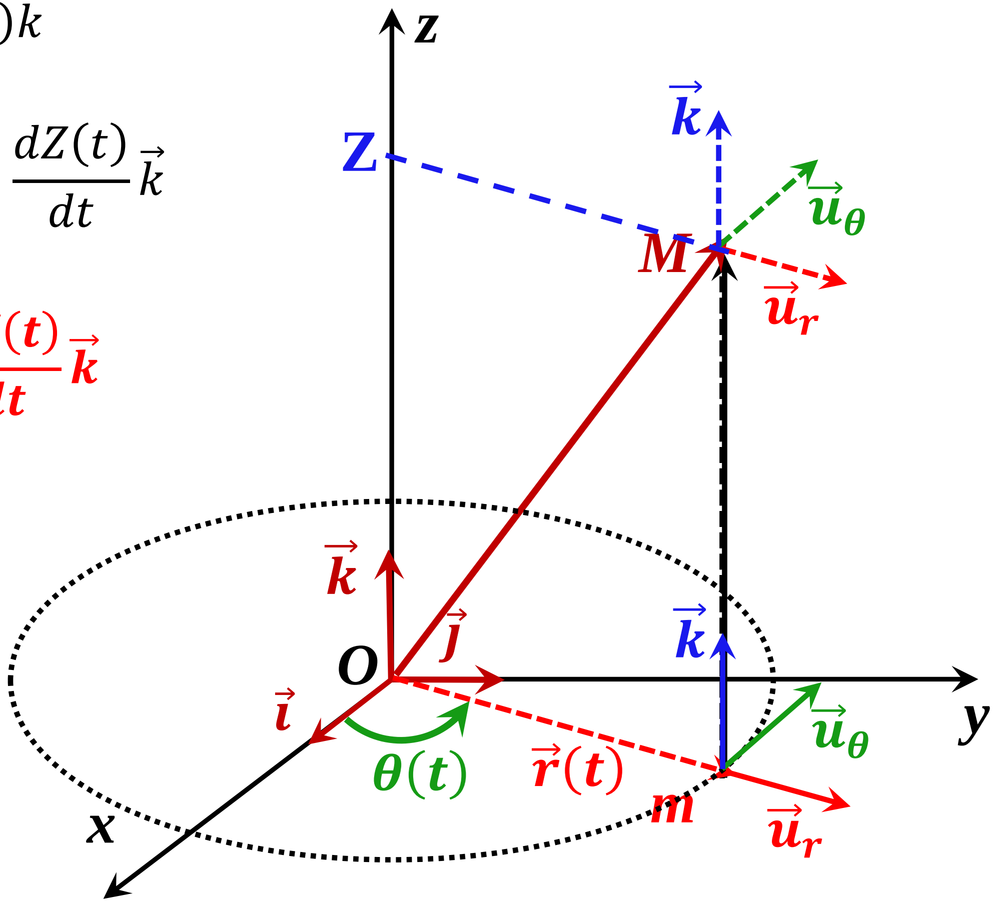
$$\overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{Om}(t) + \overrightarrow{mM}(t) = r(t)\overrightarrow{u_r} + Z(t)\vec{k}$$

$$\vec{V}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} = \frac{dr(t)}{dt}\vec{u}_r + \vec{r}(t)\frac{d\vec{u}_r}{dt} + \frac{dZ(t)}{dt}\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{V}(t) = \frac{dr(t)}{dt}\vec{u}_r + r(t)\frac{d\theta(t)}{dt}\vec{u}_\theta + \frac{dZ(t)}{dt}\vec{k}$$

$$\begin{cases} V_r(t) = \dfrac{dr(t)}{dt} \\ V_\theta(t) = r(t)\dfrac{d\theta(t)}{dt} \\ V_z(t) = \dfrac{dZ(t)}{dt} \end{cases}$$

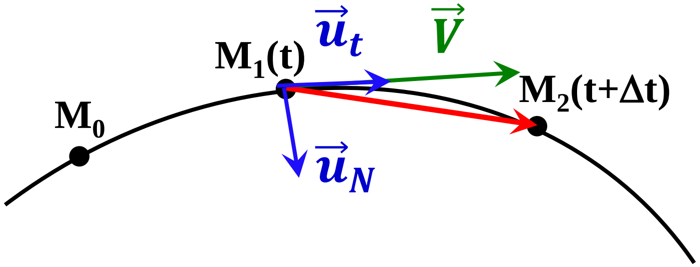
$$\|\vec{V}\| = \sqrt{{V_r}^2 + {V_\theta}^2 + {V_Z}^2}$$



$$\begin{cases} r(t): \text{Rayon polaire } (r: 0 \to \infty) \\ \theta(t): \text{Angle polaire } (\theta: 0 \to 2\pi) \\ Z(t): \text{Cote} \qquad (z: -\infty \to +\infty) \end{cases}$$

Coordonnées intrinsèque de la vitesse: (Tangentielle et Normale)

المركبات الذاتية للسرعة (المماسية والناظمية)



$$\vec{V}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{M_1M_2}(t)}{\Delta t} = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{\overrightarrow{M_1M_2}(t)}{t_2 - t_1}$$

$$= \lim_{t_2 \to t_1} \frac{\overrightarrow{M_1M_2}(t)}{\widehat{M_1M_2}(t)} \frac{\widehat{M_1M_2}(t)}{t_2 - t_1} \qquad = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{\overrightarrow{M_1M_2}(t)}{\widehat{M_1M_2}(t)} \lim_{t_2 \to t_1} \frac{\widehat{M_1M_2}(t)}{t_2 - t_1}$$

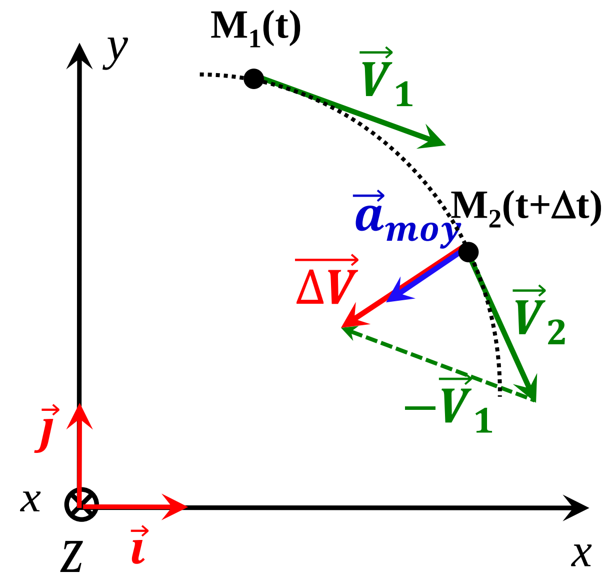
Quand: $t_1 \to t_2 \Rightarrow \widehat{M_1M_2}(t) \to \left\|\overrightarrow{M_1M_2}(t)\right\| \quad \Rightarrow \frac{\overrightarrow{M_1M_2}(t)}{\widehat{M_1M_2}(t)} = \vec{u}_t$

$$\Rightarrow \vec{V}(t) = \frac{d\widehat{M_1M_2}(t)}{dt}\vec{u}_t = \frac{dS(t)}{dt}\vec{u}_t$$

II.2. Accélération :

➢ **Accélération moyenne :**

$$\vec{a}_{moy} = \frac{\overrightarrow{\Delta V}(t)}{\Delta t} = \frac{\vec{V}_2(t) - \vec{V}_1(t)}{t_2 - t_1}$$



En coordonnées cartésiennes :

$$\vec{V}_1\begin{pmatrix} V_{x1} \\ V_{y1} \\ V_{z1} \end{pmatrix}, \vec{V}_2\begin{pmatrix} V_{x2} \\ V_{y2} \\ V_{z3} \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}_{moy} = \frac{\Delta V_x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta V_y}{\Delta t}\vec{j} + \frac{\Delta V_Z}{\Delta t}\vec{k}$$

$$\begin{cases} \Delta V_x = V_{x_2} - V_{x_1} \\ \Delta V_y = V_{y_2} - V_{y_1} \\ \Delta V_z = V_{z_2} - V_{z_1} \end{cases}$$

➢ Accélération instantanée

$$\vec{a}_{inst} = \vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}_{moy} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta V}(t)}{\Delta t} = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{\vec{V}_2(t) - \vec{V}_1(t)}{t_2 - t_1} = \frac{\overrightarrow{dV}(t)}{dt}$$

En coordonnées cartésiennes :

$$\vec{a}_{inst} = \frac{dV_x}{dt}\vec{i} + \frac{dV_y}{dt}\vec{j} + \frac{dV_Z}{dt}\vec{k} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

$$\begin{cases} a_x = \dfrac{dV_x}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2} \\ a_y = \dfrac{dV_y}{dt} = \dfrac{d^2y}{dt^2} \\ a_z = \dfrac{dV_z}{dt} = \dfrac{d^2z}{dt^2} \end{cases}$$

$$\|\vec{a}\| = a = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2}$$

En coordonnées Polaires :

$$\vec{V}(t)=\frac{dr(t)}{dt}\vec{u}_r+r(t)\frac{d\theta(t)}{dt}\vec{u}_\theta \quad \Rightarrow \vec{a}(t)=\frac{\overrightarrow{dV}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dr(t)}{dt}\vec{u}_r\right)+\frac{d}{dt}\left(r(t)\frac{d\theta(t)}{dt}\vec{u}_\theta\right)$$

$$=\frac{d^2r(t)}{dt^2}\vec{u}_r+\frac{dr(t)}{dt}\underbrace{\frac{d\vec{u}_r}{dt}}_{\frac{d\theta(t)}{dt}\vec{u}_\theta}+\frac{dr(t)}{dt}\frac{d\theta(t)}{dt}\vec{u}_\theta+r(t)\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}\vec{u}_\theta+r(t)\frac{d\theta(t)}{dt}\underbrace{\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}}_{-\frac{d\theta(t)}{dt}\vec{u}_r}$$

$$\Rightarrow \vec{a}=\frac{d^2r(t)}{dt^2}\vec{u}_r+\frac{dr(t)}{dt}\frac{d\theta(t)}{dt}\vec{u}_\theta+\frac{dr(t)}{dt}\frac{d\theta(t)}{dt}\vec{u}_\theta+r(t)\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}\vec{u}_\theta-r(t)\frac{d\theta(t)}{dt}\frac{d\theta(t)}{dt}\vec{u}_r$$

$$\Rightarrow \vec{a}=\underbrace{\left(\frac{d^2r(t)}{dt^2}-r(t)\left(\frac{d\theta(t)}{dt}\right)^2\right)}_{a_r}\vec{u}_r+\underbrace{\left(2\frac{dr(t)}{dt}\frac{d\theta(t)}{dt}+r(t)\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}\right)}_{a_\theta}\vec{u}_\theta$$

En coordonnées Cylindrique :

$$\vec{V}(t) = \frac{dr(t)}{dt}\vec{u}_r + r(t)\frac{d\theta(t)}{dt}\vec{u}_\theta + \frac{dZ}{dt}\vec{k}$$

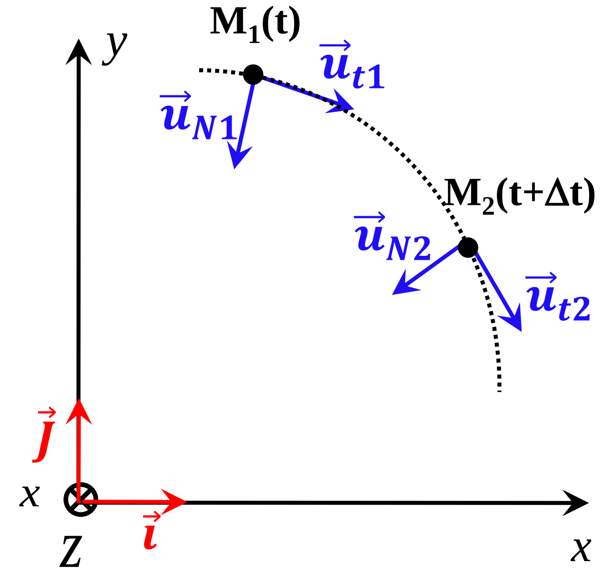
$$\Rightarrow \vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr(t)}{dt}\vec{u}_r\right) + \frac{d}{dt}\left(r(t)\frac{d\theta(t)}{dt}\vec{u}_\theta\right) + \frac{d^2Z}{dt^2}\vec{k}$$

Avec la même méthode, on trouve :

$$\Rightarrow \vec{a} = \underbrace{\left(\frac{d^2r(t)}{dt^2} - r(t)\left(\frac{d\theta(t)}{dt}\right)^2\right)}_{a_r}\vec{u}_r + \underbrace{\left(2\frac{dr(t)}{dt}\frac{d\theta(t)}{dt} + r(t)\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}\right)}_{a_\theta}\vec{u}_\theta + \underbrace{\frac{d^2Z}{dt^2}}_{a_z}\vec{k}$$

$$\|\vec{a}\| = a = \sqrt{a_r{}^2 + a_\theta{}^2 + a_z{}^2}$$

Coordonnées intrinsèques de l’accélération :



On a: $\vec{V}(t) = \dfrac{dS(t)}{dt}\vec{u}_t$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dS(t)}{dt}\vec{u}_t\right) = \frac{d^2S(t)}{dt^2}\vec{u}_t + \frac{dS(t)}{dt}\frac{d\vec{u}_t}{dt}$$

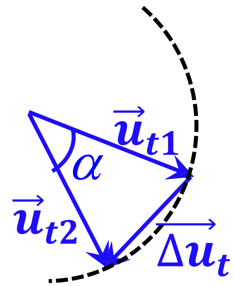
Calcul de $\dfrac{d\vec{u}_t}{dt}$ **:**

❑ Propriété :

La dérivé d'un vecteur unitaire est un vecteur orthogonal à ce vecteur

$$\|\vec{u}_t\| = 1 \Rightarrow \frac{d\vec{u}_t}{dt} \perp \vec{u}_t \quad \Rightarrow \frac{d\vec{u}_t}{dt} = \frac{du_t}{dt}\vec{u}_N$$

$\|\vec{u}_{t1}\| = \|\vec{u}_{t2}\|$



D’autre part, on a :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\Delta u_t} = \vec{u}_{t2} - \vec{u}_{t1} \\ \left\|\overrightarrow{\Delta u_t}\right\| = \|\vec{u}_{t1}\| sin\alpha \end{cases} \quad t_1 \to t_2 \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{\Delta u_t} \to d\vec{u}_t \\ \alpha \to d\alpha \ (sind\alpha \approx d\alpha) \end{cases} \quad \Rightarrow \|d\vec{u}_t\| = \|\vec{u}_t\| d\alpha = d\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{u}_t}{dt} = \frac{du_t}{dt}\vec{u}_N = \frac{d\alpha}{dt}\vec{u}_N$$

$$\vec{a} = \frac{d^2S(t)}{dt^2}\vec{u}_t + \frac{dS(t)}{dt}\frac{d\alpha}{dt}\vec{u}_N = \frac{d^2S}{dt^2}\vec{u}_t + \frac{dS}{dt}\frac{d\alpha}{\mathbf{dS}}\frac{\mathbf{dS}}{dt}\vec{u}_N$$

$$\frac{dS}{d\alpha} = \rho : \text{ Rayon du trajectoire}$$

$$\vec{a} = \underbrace{\frac{d^2S(t)}{dt^2}}_{\vec{a}_t}\vec{u}_t + \underbrace{\frac{1}{\rho}\left(\frac{dS(t)}{dt}\right)^2}_{\vec{a}_N}\vec{u}_N = \frac{dV(t)}{dt}\vec{u}_t + \frac{1}{\rho}V(t)^2\vec{u}_N$$

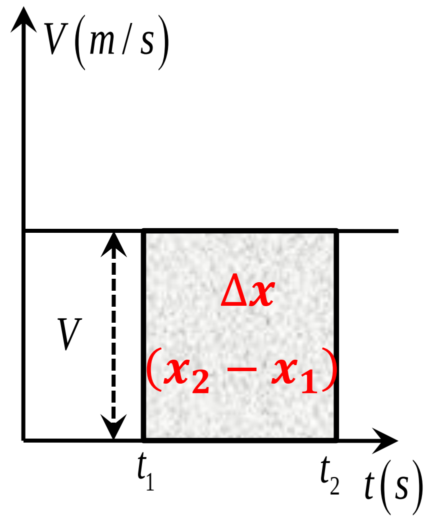
$$\begin{cases} \dfrac{d^2S}{dt^2} = \dfrac{dV}{dt} : Composante\ tengentielle\ de\ \vec{a}\ liée\ au\ changement\ de\ module\ de\ \vec{V} \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{dS}{dt} = \dfrac{1}{\rho}V : Composante\ Normale\ de\ \vec{a}\ liée\ au\ changement\ de\ direction\ de\ \vec{V} \end{cases}$$

$$\vec{a} = a_t\vec{u}_t + a_N\vec{u}_N \qquad \|\vec{a}\| = a = \sqrt{{a_t}^2 + {a_N}^2}$$

II.3. Passage de la vitesse au distance parcourue – Calcul d'intégral:

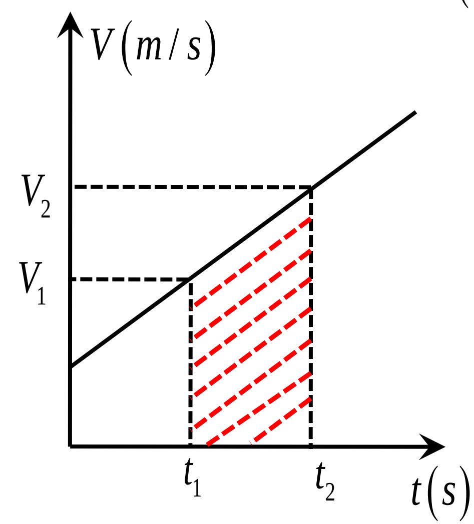
❖ Soit un mobile « *m* » se déplaçant avec une vitesse constante

$$\Rightarrow V_{moy} = V_{inst} = V = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$



Connaissant V et x_1 à t = t_1 $\Rightarrow x_2 = x_1 + V(t_2 - t_1)$

La distance Δx parcourue entre t_1 et t_1 est mesuré par la surface sous la courbe $V(t)$: $\Delta x = V(t_2 - t_1)$

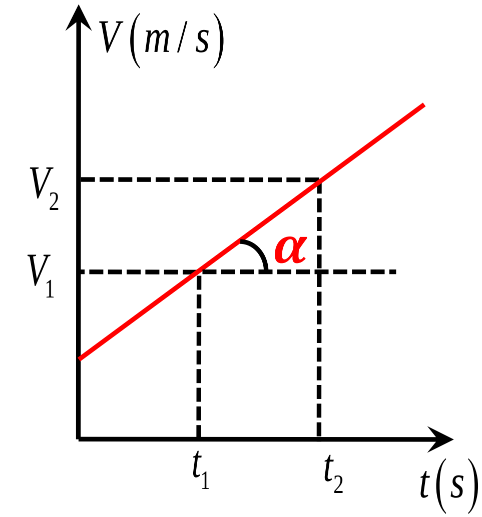


❖ **Lorsque la vitesse n'est pas constante Δx est toujours égale à la surface sous la courbe V(t)** $\left(\Delta x = (V_2 - V_1)(t_2 - t_1)\right)$

II.4- Passage de l'accélération à la vitesse :

Si le mouvement est définie par le donné de son accélération, la vitesse égale à l'intégrale de l'accélération (l'accélération est la dérivée de la vitesse).

$$a = \frac{dV}{dt} \Rightarrow \int_{V_1}^{V_2} dV = \int_{t_1}^{t_2} a\, dt$$



Géométriquement :

- **L'accélération sera la tangente de courbe de V(t)**

$$a = tg\alpha = \frac{V_2 - V_1}{t_2 - t_1}$$

Exemple :

Un objet se déplace sur une ligne droite orientée avec une vitesse qui obéit à la loi :

$$a = 4 - t^2 \;\left(m/s^2\right)$$

- Trouver, en fonction du temps, les expressions de la vitesse et de la position

On donne : $t = 3s \Rightarrow V = 2m/s,\; x = 9m.$

- Représenter à **t = 1s** les vecteurs vitesse et accélération.

Solution :

1. $V = \int a\; dt = \int\left(4 - t^2\right)dt = 4t - \dfrac{t^3}{3} + C$

$$t = 3s \Rightarrow V = 2m/s \Rightarrow 2 = 4.3 - \frac{3^3}{3} + C \Rightarrow C = -1 \qquad \boxed{\Rightarrow V = 4t - \frac{t^3}{3} - 1}$$

$$x = \int V\; dt = \int\left(4t - \frac{t^3}{3} - 1\right)dt = 2t^2 - \frac{1}{12}t^4 - t + C'$$

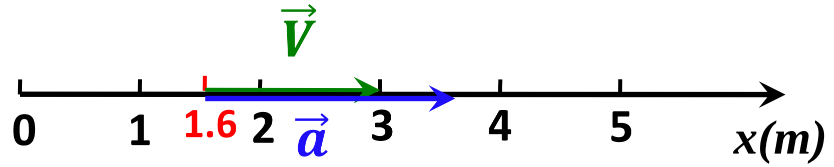
$$t = 3s \Rightarrow x = 9m \Rightarrow C' = 3/4 \qquad \boxed{\Rightarrow x = -\frac{1}{12}t^4 + 2t^2 - t + 3/4}$$

2.
$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{12}t^4 + 2t^2 - t + 3/4 \\ V = -\dfrac{t^3}{3} + 4t - 1 \\ a = 4 - t^2 \end{cases} \Rightarrow t = 1s : \begin{cases} x = -\dfrac{1}{12} + 2 - 1 + 3/4 = 1.6m \\ V = -\dfrac{1}{3} + 4 - 1 = 2.6m/s \\ a = 4 - 1 = 3m/s^2 \end{cases}$$

Echelle : $x : 1\ cm \rightarrow 1\ m$

$V : 1\ cm \rightarrow 2\ m/s$

$a : 1\ cm \rightarrow 1.5\ m/s^2$



III. Quelques mouvements particuliers

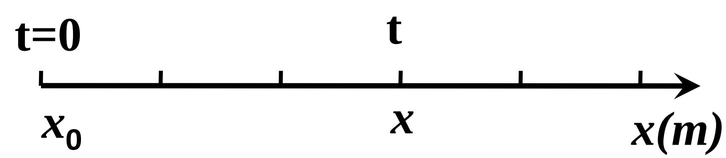
III.1. Mouvement rectiligne:

Dans ce type de mouvement, les trajectoires sont des lignes droites et la position du mobile est décrite par une seule coordonnée $x(t)$ équivalent au chemin parcourue $S(t)$.

III.1.1. Mouvement rectiligne uniforme (MRU): Caractériser par $V(t) = Cts = V$

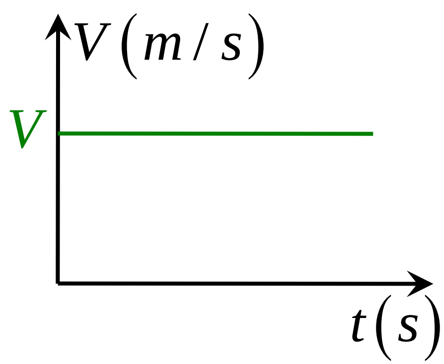
الحركة المستقيمة المنتظمة

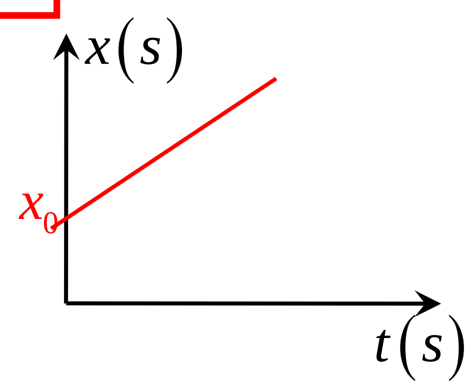
$$V = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = Vdt \quad \Rightarrow x = \int Vdt \quad \Rightarrow x = V.t + C$$



$$a : t = 0s \Rightarrow x = x_0 \quad \Rightarrow C = x_0$$

$\Rightarrow$ **Equation horaire de mouvement :** $\boxed{x(t) = V.t + x_0}$





III.1.2. Mouvement rectiligne uniformément varie (MRUV):

الحركة المستقيمة المتغيرة بإنتظام

Caractériser par $a(t) = Cts = a$

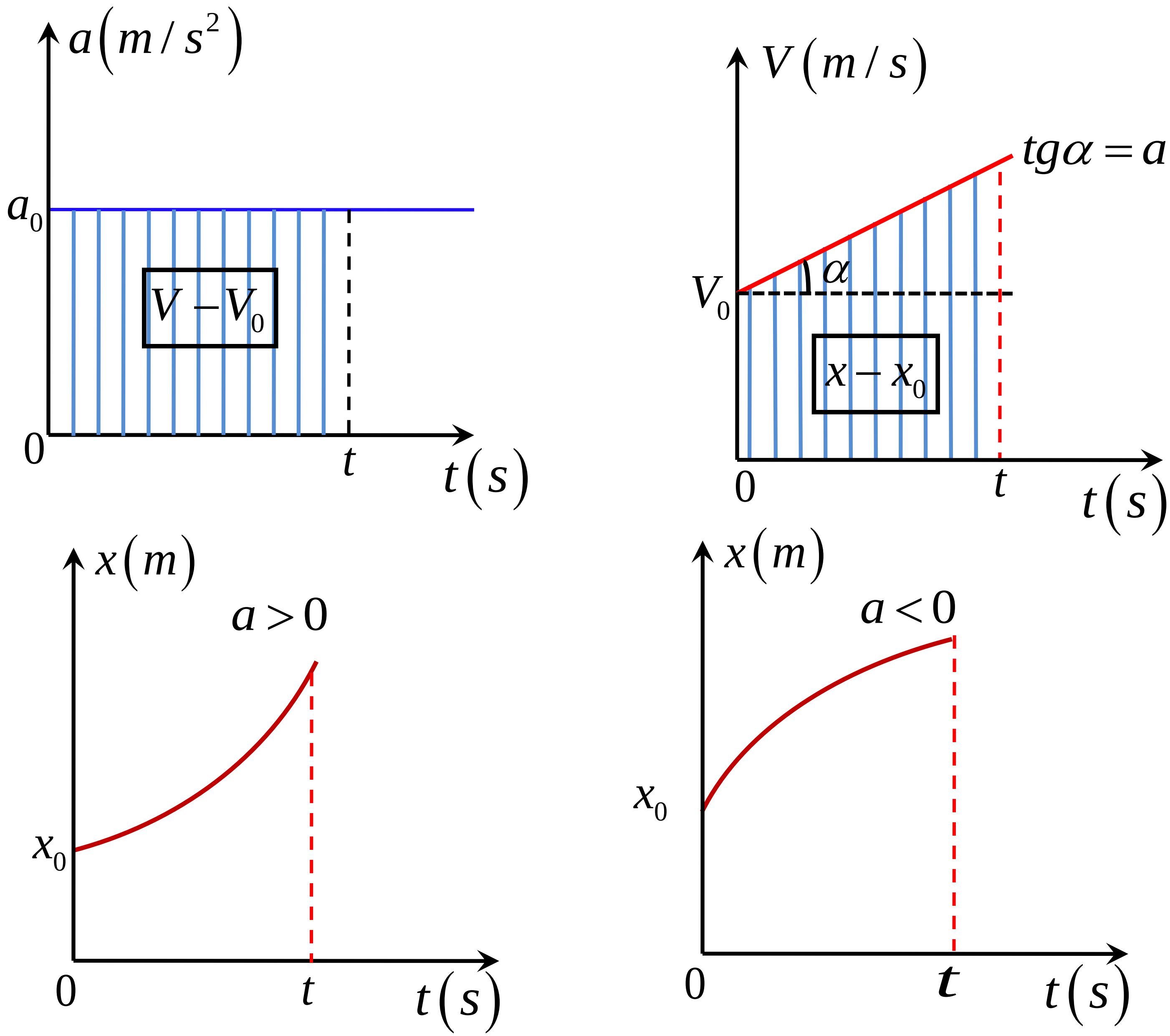
$$a = \frac{dV}{dt} \Rightarrow dV = adt \quad \Rightarrow V = \int adt \quad \Rightarrow V = a.t + C$$

$$a : t = 0s \Rightarrow V = V_0 \quad \Rightarrow C = V_0 \quad \Rightarrow V(t) = at + V_0$$

$$dx = Vdt = (at + V_0)dt \Rightarrow x = \int (at + V_0)dt$$

$$x = \int atdt + \int V_0 dt \ = a\int tdt + V_0 \int dt \ = a\frac{t^2}{2} + V_0 t + C$$

$$a : t = 0s \Rightarrow x = x_0 \boxed{\Rightarrow x(t) = a\frac{t^2}{2} + V_0 t + x_0}$$ **(Equation horaire de mouvement)**



a(m/s²)
a₀
V − V₀
0
t
t(s)
V(m/s)
tgα = a
α
V₀
x − x₀
0
t
t(s)
x(m)
a > 0
x₀
0
t
t(s)
x(m)
a < 0
x₀
0
t
t(s)

Remarque :

L'accélération ou la décélération d'un mouvement uniformément varie est définie par La signe du produit scalaire $\vec{a}.\vec{V}$:

$\vec{a}.\vec{V}>0$: **Deux cas sont possibles :**

$\vec{a} > 0 \; et \; \vec{V} > 0$: MRU Accéléré dans le sens **positif** du mouvement

$\vec{a} < 0 \; et \; \vec{V} < 0$: MRU Accéléré dans le sens **négatif** du mouvement

$\vec{a}.\vec{V} < 0$: **Deux cas sont possibles :**

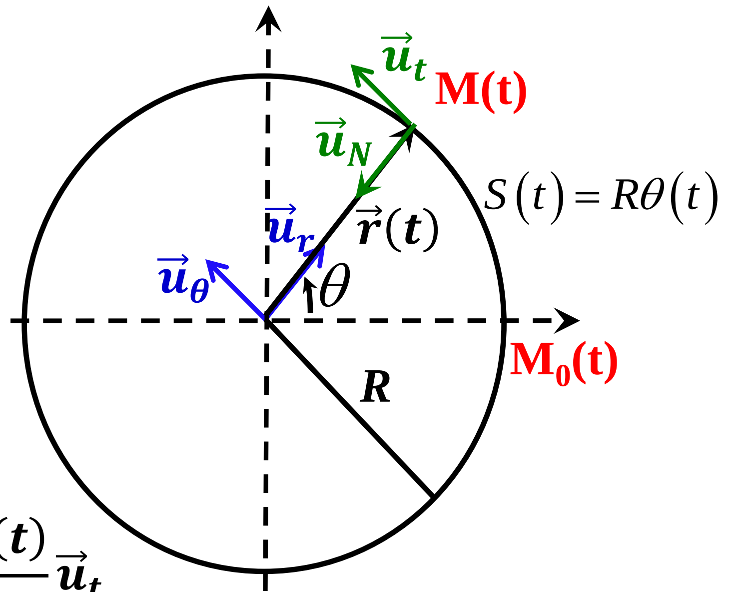
$\vec{a} < 0 \; et \; \vec{V} > 0$: MRU décéléré dans le sens **positif** du mouvement

$\vec{a} > 0 \; et \; \vec{V} < 0$: MRU décéléré dans le sens **négatif** du mouvement

III.2. Mouvement circulaire:

Ce type de mouvement est caractérisé par un trajectoire circulaire d'un rayon constant :

r(t)=cte=R



En coordonnées polaires: $\vec{r}(t) = R\vec{u}_r$

$$\vec{V}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(R\vec{u}_r) = \cancelto{0}{\frac{dR}{dt}}\vec{u}_r + R\cancelto{\frac{d\theta(t)}{dt}\vec{u}_\theta}{\frac{d\vec{u}_r}{d}}$$

$$\Rightarrow \vec{V}(t) = R\frac{d\theta(t)}{dt}\vec{u}_\theta$$

En coordonnées intrinsèques : $\vec{V}(t) = \frac{dS(t)}{dt}\vec{u}_t = R\frac{d\theta(t)}{dt}\vec{u}_t$

$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} \; : \textit{Vitesse angulaire, } [\omega] = rad/s$$

$$\Rightarrow \vec{V}(t) = R\omega(t)\vec{u}_\theta = R\omega(t)\vec{u}_t$$

Expression de l'accélération :

En coordonnées intrinsèques : $\vec{a} = a_t\vec{u}_t + a_N\vec{u}_N = \frac{dV(t)}{dt}\vec{u}_t + \frac{1}{R}V^2\vec{u}_N$

$$\Rightarrow \vec{a}(t) = R\frac{d\omega(t)}{dt}\vec{u}_t + R\omega^2(t)\vec{u}_N = R\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}\vec{u}_t + R\left(\frac{d\theta(t)}{dt}\right)^2\vec{u}_N$$

En coordonnées polaires :

$$\vec{a} = \left(\overset{0}{\cancel{\frac{d^2R(t)}{dt^2}}} - R\left(\frac{d\theta(t)}{dt}\right)^2\right)\vec{u}_r + \left(2\overset{0}{\cancel{\frac{dR(t)}{dt}}}\frac{d\theta(t)}{dt} + R(t)\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}\right)\vec{u}_\theta$$

$$\Rightarrow \vec{a} = -R\left(\frac{d\theta(t)}{dt}\right)^2\vec{u}_r + R(t)\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}\vec{u}_\theta$$

Remarque:

$$\frac{d\omega(t)}{dt} = \alpha : Accélération\ \ angulaire, [\alpha] = rad / s^2$$

III.2.1. Mouvement circulaire uniforme (MCU):

الحركة الدائرية المنتظمة

Ce type de mouvement est caractérisé par une vitesse angulaire constante:

$$V(t) = Cte = R\omega(t) \Rightarrow \omega(t) = Cte$$

$$\vec{a} = \begin{cases} a_t = R\dfrac{d\omega(t)}{dt} = 0 \\ a_N = R\omega^2 \end{cases} \quad \textbf{Ou} \quad \vec{a} = \begin{cases} a_r = -R\omega^2(t) \\ a_\theta = R\dfrac{d\omega(t)}{dt} = 0 \end{cases}$$

Equation horaire du mouvement:

$$\omega(t) = Cte = \omega \Rightarrow \frac{d\theta(t)}{dt} = \omega \Rightarrow \theta(t) = \int \omega\, dt = \omega\, t + C$$

À $\boldsymbol{t = 0}$: $\boldsymbol{\theta(t) = \theta_0 \Rightarrow C = \theta_0}$

Donc l'équation horaire du mouvement est donnée par: $\boxed{\boldsymbol{\theta(t) = \omega\, t + \theta_0}}$

III.2.2. *Mouvement circulaire uniformément varie (MCUV):*

الحركة الدائرية المتغيرة بانتظام

Ce type de mouvement est caractérisé par une accélération tangentielle constante

$$a_t(t) = cte \Rightarrow R\frac{d\omega}{dt} = cte \Rightarrow \frac{d\omega(t)}{dt} = cte = \alpha \Rightarrow \omega(t) = \int \alpha\, dt$$

$$\Rightarrow \omega = \alpha t + \omega_0 \quad (t = 0 : \omega = \omega_0)$$

D'autre part, on a :

$$\Rightarrow \omega = \frac{d\theta(t)}{dt} \Rightarrow \theta(t) = \int \omega\, dt = \int (\alpha t + \omega_0)\, dt \Rightarrow \theta(t) = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t + C'$$

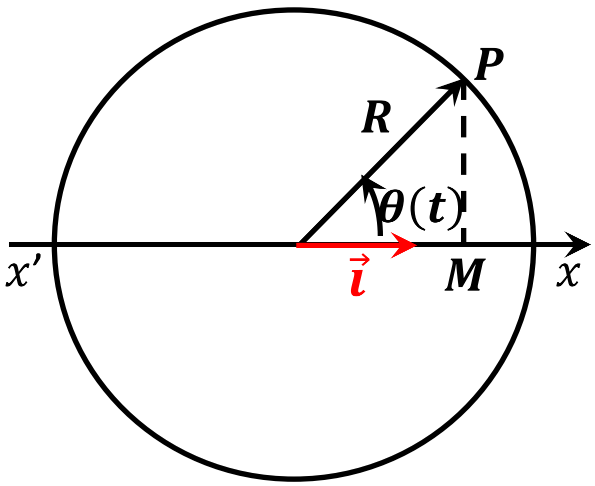
$$\text{à } t = 0 : \theta = \theta_0 \Rightarrow C' = \theta_0.$$

$$\boxed{\theta(t) = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t + \theta_0}$$ **(équation horaire du mouvement)**

III.3. Mouvement Harmonique (Rectiligne sinusoïdal:

الحركة الجيبية

Considérer comme la projection, sur un diamètre, du mouvement circulaire uniforme d'un point « P »d'une vitesse angulaire ω sur un cercle de rayon R,



Avec $\theta(t) = \omega\, t + \theta_0$

Soit « M » la projection de « P » sur *(x'x)*:

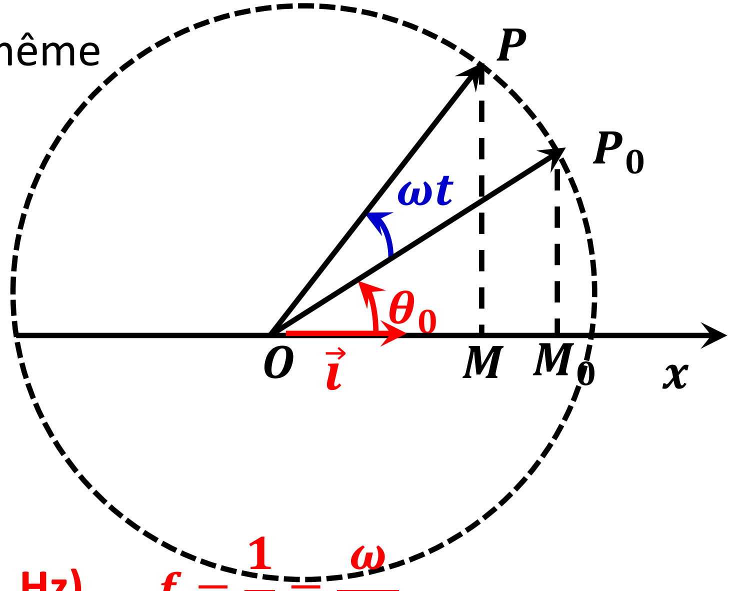
$\overrightarrow{OM}(t) = x\vec{\imath} = R cos\theta(t)\vec{\imath} = Rcos(\omega\, t + \theta_0)\vec{\imath}$

$\omega\, t + \theta_0$: *Phase de mouvement*

θ_0: *Phase initiale ou phase à l'origine de temps,*

$-R < x < +R$: *est appelé* ***Amplitude de mouvement***

- Le mouvement de « ***P*** » se reproduit identique à lui-même chaque fois que l'angle $\boldsymbol{\omega t}$ augmente **de** $\boldsymbol{2\pi}$



$\boldsymbol{T = \frac{2\pi}{\omega}}$: présente la période de mouvement **(s)**

- $\boldsymbol{\omega = 2\pi f}$: Pulsation ou fréquence angulaire **(rad/s)**
- $\boldsymbol{f}$: est la fréquence de mouvement ≡ nombres d'oscillation par unité de temps liés à la période **(1/s, Hz)** $\boldsymbol{f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}}$

$$\vec{V} = V_x\vec{\imath} = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} = \frac{d}{dx}\big(Rcos(\omega\, t + \theta_0)\big)\vec{\imath} = -R\omega sin(\omega\, t + \theta_0)\vec{\imath}$$

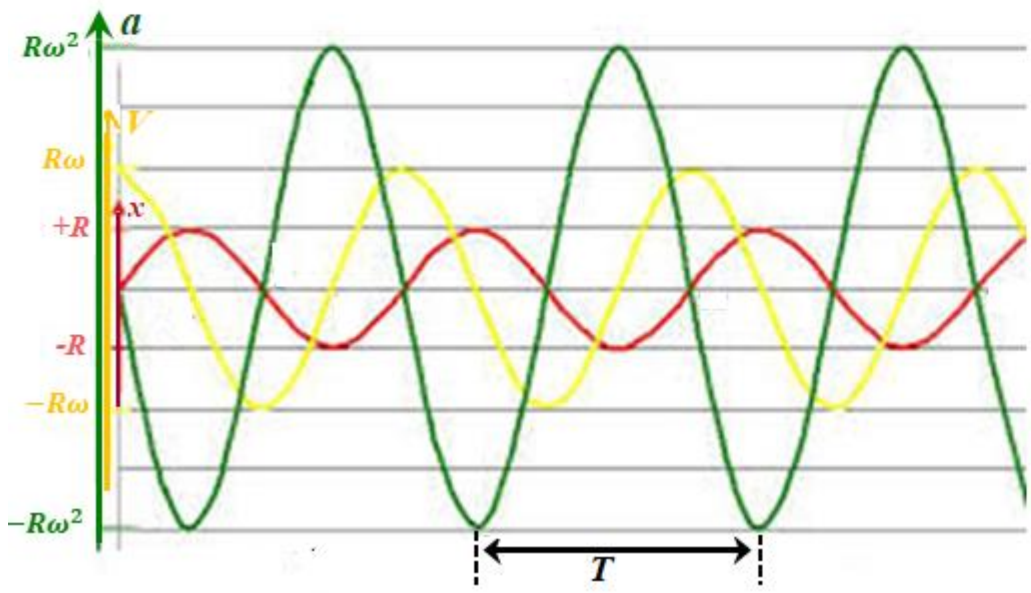
$$\vec{a} = a_x\vec{\imath} = \frac{dV_x}{dt}\vec{\imath} = \frac{d}{dx}\big(-R\omega sin(\omega\, t + \theta_0)\big)\vec{\imath} = -R\omega^2 cos(\omega\, t + \theta_0)\vec{\imath} = -\boldsymbol{\omega^2 x\vec{\imath}}$$

Ceci indique que l'accélération dans un mouvement sinusoïdal est opposée au vecteur position

$$\Rightarrow \boldsymbol{\vec{a} = -\omega^2 x\vec{\imath} = -\omega^2 \overrightarrow{OM}}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM}(t) = x\vec{\imath} = R\cos(\omega t + \theta_0)\vec{\imath} \\ \vec{V} = -R\omega\sin(\omega t + \theta_0)\vec{\imath} \\ \vec{a} = -R\omega^2\cos(\omega t + \theta_0)\vec{\imath} = -\omega^2\overrightarrow{OM} \end{cases},$$

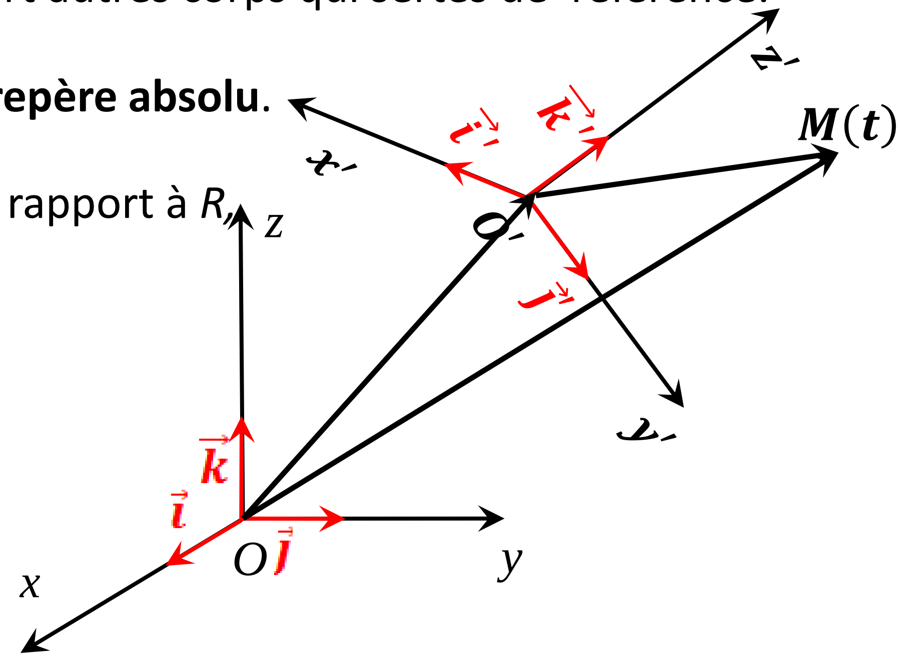
$$\boldsymbol{x = 0 \Rightarrow \cos(\omega t + \theta_0) = 0 \Rightarrow \sin(\omega t + \theta_0) = \pm 1 \Rightarrow V = V_{max} = \pm R\omega \quad \Rightarrow a = 0}$$



IV. Mouvement relatif

IV.1. Changement de référentiel:

Dans la physique relative, le repos, comme le mouvement, sont des notions relatives, ils dépendent de la situation du mobile par rapport autres corps qui sertes de référence.



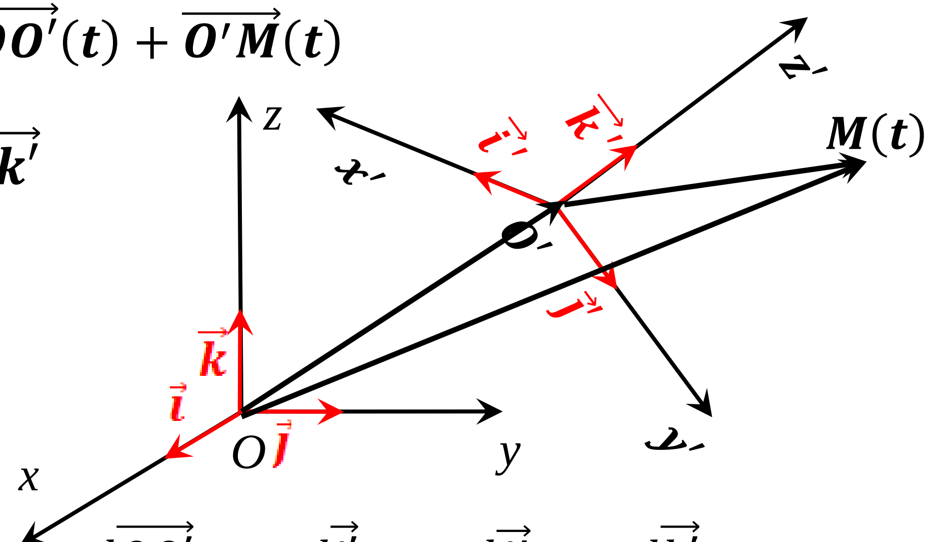
- Soit *R(O,xyz)* un repère supposé fixe, **appelé repère absolu**.
- Soit *R'(O',x'y'z')* un repère en mouvement par rapport à *R*, **appelé repère relatif**.

$$\overrightarrow{OM}(t)\Big/_{R} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OM}(t)\Big/_{R'} = x'\vec{i'} + y'\vec{j'} + z'\vec{k'}$$

Pour un observateur lié au repère R, le mouvement de R'(O'x'y'z') est connu par l'intermédiaire du mouvement de O' / O et de façons dont les axes Ox', Oy' et Oz' tournent autour de O'

Relation entre les positions: $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}}(\boldsymbol{t}) = \overrightarrow{\boldsymbol{OO'}}(\boldsymbol{t}) + \overrightarrow{\boldsymbol{O'M}}(\boldsymbol{t})$



$$\boldsymbol{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \overrightarrow{OO'} + x'\vec{i'} + y'\vec{j'} + z'\vec{k'}}$$

Relation entre les vitesses:

$$\vec{V}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OO'}(t)}{dt} + \frac{d\overrightarrow{O'M}(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}} = \underbrace{\frac{dx'}{dt}\vec{i'} + \frac{dy'}{dt}\vec{j'} + \frac{dz'}{dt}\vec{k'}} + \underbrace{\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'\frac{d\vec{i'}}{dt} + y'\frac{d\vec{j'}}{dt} + z'\frac{d\vec{k'}}{dt}}$$

$\boldsymbol{\vec{V}_a(t)}$ **: Vitesse absolue** $\boldsymbol{\vec{V}_r(t)}$ **: Vitesse relative** $\boldsymbol{\vec{V}_e(t)}$ **: Vitesse d'entrainement**

$$\boxed{\Rightarrow \boldsymbol{\vec{V}_a(t) = \vec{V}_r(t) + \vec{V}_e(t)}}$$

Remarque :

Si le repère ***R'*** est en translation seulement par rapport à ***R*** : $\boldsymbol{\vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'} = Ctes}$

$$\frac{d\vec{i'}}{dt} = \frac{d\vec{j'}}{dt} = \frac{d\vec{k'}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \boldsymbol{\vec{V}_e(t) = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}}$$

Relation entre les accélérations: $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{V}}{dt}$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx'}{dt}\vec{i'} + \frac{dy'}{dt}\vec{j'} + \frac{dz'}{dt}\vec{k'}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'\frac{d\vec{i'}}{dt} + y'\frac{d\vec{j'}}{dt} + z'\frac{d\vec{k'}}{dt}\right)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} = \frac{d^2x'}{dt^2}\vec{i'} + \frac{dx'}{dt}\frac{d\vec{i'}}{dt} + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{j'} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\vec{j'}}{dt} + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{k'} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\vec{k'}}{dt}$$

$$+ \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \frac{dx'}{dt}\frac{d\vec{i'}}{dt} + x'\frac{d^2\vec{i'}}{dt^2} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\vec{j'}}{dt} + y'\frac{d^2\vec{j'}}{dt^2} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\vec{k'}}{dt} + z'\frac{d^2\vec{k'}}{dt^2}$$

$$\vec{a}_a = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$ **: Accélération absolue**

$$\vec{a}_r = \frac{d^2x'}{dt^2}\vec{i'} + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{j'} + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{k'}$$ **: Accélération relative**

$$\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x'\frac{d^2\vec{i'}}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{j'}}{dt^2} + z'\frac{d^2\vec{k'}}{dt^2}$$ **: Accélération d'entrainement**

$$\vec{a}_C = 2\left(\frac{dx'}{dt}\frac{d\vec{i'}}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\vec{j'}}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\vec{k'}}{dt}\right)$$ **: Accélération de Coriolis**

$$\boxed{\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_C}$$

Remarques: On accepte que:

$$\frac{d\vec{i'}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{i'} \;, \frac{d\vec{j'}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{j'} \,, \frac{d\vec{k'}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{k'}$$

1- $\vec{V}_e = \dfrac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'\dfrac{d\vec{i'}}{dt} + y'\dfrac{d\vec{j'}}{dt} + z'\dfrac{d\vec{k'}}{dt} = \dfrac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'\vec{\omega} \wedge \vec{i'} + y'\vec{\omega} \wedge \vec{j'} + z'\vec{\omega} \wedge \vec{k'}$

$$= \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \left(x'\vec{i'} + y'\vec{j'} + z'\vec{k'}\right) \quad \boxed{\Rightarrow \vec{V}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}}$$

2- $\vec{a}_C = 2\left(\dfrac{dx'}{dt}\dfrac{d\vec{i'}}{dt} + \dfrac{dy'}{dt}\dfrac{d\vec{j'}}{dt} + \dfrac{dz'}{dt}\dfrac{d\vec{k'}}{dt}\right) = 2\left(\dfrac{dx'}{dt}\vec{\omega} \wedge \vec{i'} + \dfrac{dy'}{dt}\vec{\omega} \wedge \vec{j'} + \dfrac{dz'}{dt}\vec{\omega} \wedge \vec{k'}\right)$

$$= 2\vec{\omega} \wedge \left(\frac{dx'}{dt}\vec{i'} + \frac{dy'}{dt}\vec{j'} + \frac{dz'}{dt}\vec{k'}\right) \quad \boxed{\Rightarrow \vec{a}_C = 2\vec{\omega} \wedge \vec{V}_r}$$

3- Pour $\vec{a}_e$: $\dfrac{d^2\vec{i'}}{dt^2} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{d\vec{i'}}{dt}\right) = \dfrac{d}{dt}\left(\vec{\omega} \wedge \vec{i'}\right) = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{i'} + \vec{\omega} \wedge \dfrac{d\vec{i'}}{dt} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{i'} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \vec{i'}\right)$

On remplace dans $\vec{a}_e$ et on trouve:

$$\boxed{\vec{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} += \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)}$$