مسائل النقل

تعتبر مسألة النقل إحدى تطبيقات البرمجة الخطية الهامة حيث أن البرامج الرياضية المستخدمة هي نماذج خطية والهدف من استخدامها هو إيجاد أسلوب أمثل لتوزيع الوحدات أو المنتوجات من عدة مصادر للعرض (منابع) إلى عدة مواقع للطلب (مصبات) بأقل تكلفة ممكنة أو بأعلى ربح، ومشاكل النقل يمكن حلها باستخدام طريقة السمبلاكس إلا أن هذه الطريقة تتطلب خطوات وجداول وعمليات حسابية كثيرة، وهذا الأمر تم معالجته من خلال تفريغ متغيرات مشكلة النقل في جدول خاص يسمى جدول النقل.

شروط استخدام طرق حل مشاكل النقل:

قبل تطبيق طرق حل مشكلة النقل، يجب التأكد من توفر الشروط التالية:

- وجود مجموعة من الطاقات يمكن استخدامها، والتي تسمى منابع أو مصادر.
- أن تكون عدة أوجه لاستغلال هذه الطاقات، وإلا ماكانت هناك مشكلة في توزيع الموارد.
- يجب أن يتساوى مجموع المعروض من الطاقات (العرض) مع المطلوب منها (الطلب).
- أن تكون قيمة سواء كانت تكلفة أو ايراد أو وقت لكل من الطاقات المعروضة بالنسبة لطلب ما.
- وجود هدف لمشكلة النقل سواء تعظيم أو تدنئة.
- تجانس الموارد (نفس وحدة القياس).

جدول النقل:

يفترض نموذج النقل ما يلي:

- مراكز العرض (المنابع أو المصادر) عددها m، وعدد من مراكز الطلب عددها n.
- وجود هدف لمسألة النقل إما تعظيم أو تدنئة.
- تكلفة نقل الوحدة الواحدة من مراكز العرض ($\mathbf{a_i}$) إلى مراكز الطلب ($\mathbf{b_j}$) معلومة ومحددة وهي ($\mathbf{c_{ij}}$) .
- يشترط النموذج ضرورة المساواة بين حجم العرض والطلب (شرط توازن السوق).

يمكن عرض مسألة النقل في شكل جدول يلخص كل معطيات المسألة كما يلي:

D (j) / S (i)	D1	D2	....	Dn	العرض Ai
S1	x_{11} c_{11}	x_{12} c_{12}	....	x_{1n} c_{1n}	a_1

S2	x_{21} c_{21}	x_{22} c_{22}	……………………	x_{1n} c_{1n}	a_2
. . . .	. . . .			. . . .	. . . .
Sm	x_{m1} c_{m1}	x_{m1} c_{m1}	……………………	x_{mn} c_{mn}	a_m
الطلب bj	b1	b2	……………………	bn	$\sum a_i = \sum b_j$

الصياغة الرياضية لمسألة النقل:

دالة الهدف:

$$\boldsymbol{MIN/MAX(Z) = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{1n}x_{1n} + .. + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + .. + c_{2n}x_{2n} + c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + c_{mn}x_{mn}}$$

القيود:

S/C

$$\left.\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} + \cdots + x_{1n} &= a_1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + \cdots + x_{2n} &= a_2 \\ x_{m1} + x_{m2} + x_{m3} + \cdots + x_{mn} &= a_m \end{aligned}\right\}$$ **العرض**

$$\left.\begin{aligned} x_{11} + x_{21} + x_{31} + \cdots + x_{n1} &= b_1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + \cdots + x_{n2} &= b_2 \\ x_{1n} + x_{2n} + x_{3n} + \cdots + x_{mn} &= b_n \end{aligned}\right\}$$ **الطلب**

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_m = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$$ **قيد توازن السوق**

شرط عدم السلبية $x_{11}, x_{12} \dots \dots \dots x_{mn} \geq 0$

c_{ij}:تكلفة نقل الوحدة الواحدة من مراكز العرض (**a_i**) إلى مراكز الطلب (**b_j**).

x_{ij}: الكميات المنقولة من مراكز العرض (**a_i**) إلى مراكز الطلب (**b_j**).

a_i: الكميات المعروضة من المصدر i.

b_j: الكميات المطلوبة من المصب j.

ويمكن كتابة البرنامج الرياضي لمسألة النقل بشكل مختصر كما يلي:

$$MIN/MAX\ (Z) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} Cij\ Xij$$

$$S/C \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} xij = ai \\ \sum_{i=1}^{m} xij \geq bj \\ \sum_{i=1}^{m} ai = \sum_{j>1}^{n} bi \\ xij \geq 0 \end{cases}$$

مثال:

لدى شركة ميرة للأناقة ثلاثة مخازن (م1، م2، م3) تريد من خلالها توزيع الألبسة إلى أربعة مناطق مختلفة من الوطن وهي: عين الدفلى، البليدة، الجلفة، وهران.

كميات عرض المخازن وطلب المناطق مبينة في جدول النقل أدناه:

حجم الطلب		طاقة المخازن	
60	عين الدفلى	50	م1
40	البليدة	100	م2
80	الجلفة	90	م3
60	وهران		

تكاليف نقل الوحدة الواحدة من المخازن إلى المناطق مبينة في الجدول التالي:

المناطق / المخازن	**عين الدفلى**	**البليدة**	**الجلفة**	**وهران**
م1	**5**	**8**	**3**	**6**
م2	**4**	**5**	**7**	**4**
م3	**6**	**2**	**4**	**5**

المطلوب: عرض المسألة في جدول وكتابة البرنامج الرياضي للمسألة.

عرض المسألة في شكل جدول:

	عين الدفلى	**البليدة**	**الجلفة**	**وهران**	**العرض**
م1	5	8	3	6	**50**
م2	4	5	7	4	**100**
م3	6	2	4	5	**90**
الطلب	**60**	**40**	**80**	**60**	**240**

البرنامج الرياضي للمسألة:

$$MIN(Z) = 5x_{11} + 8x_{12} + 3x_{13} + 6x_{14} + 4x_{21} + 5x_{22} + 7x_{23} + 4x_{24} + 6x_{31} + 2x_{32} + 4x_{33} + 5x_{34}$$

القيود:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 50$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 100$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} =_{4}90$$

العرض

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 60$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 40$$

الطلب

قيد توازن السوق $50 + 100 + 90 = 60 + 40 + 80 + 60$

شرط عدم السلبية $x_{11}, x_{12} \dots \dots .. x_{34} \geq 0$

مراحل حل مشكلة النقل:

1. مرحلة إيجاد الأساسي الأولي.
2. اختبار الأمثلية.
3. تحسين الحل وإيجاد الحل الأمثل.

1-مرحلة إيجاد الحل الأساسي الأولي:

لإيجاد الحل الأساسي الأولي هناك ثلاث طرق وهي:

- طريقة الزاوية الشمالية الغربية
- طريقة التكاليف الدنيا في حالة(MIN)،أو الأرباح العظمى في حالة (MAX).
- طريقة Voguel أو تسمى الفروقات العظمى في حالة (MIN)،أو الفروقات الدنيا في حالة (MAX).

1. **طريقة الزاوية الشمالية الغربية:**

نفس التسمية والخطوات في حالة التعظيم والتدنئة، حيث تعتمد هذه الطريقة على توزيع الكميات المعروضة انطلاقا من ملئ المربع أو الخلية التي تقع في الركن الشمالي الغربي من الجدول وإشباع السطر أو العمود وتكرر العملية إلى أن توزع كل الكميات المعروضة على نقاط الموصوفة مع إشباع السطر أو العمود أو كلاهما معا في الأخير وتملئ الخلايا بأقل كمية مابين الكميات المعروضة والكميات المطلوبة. ثم نختبر صحة الحل الأساسي الأولي باستخدام العلاقة التالية:

عدد الخلايا المملوءة $= \mathrm{M} + \mathrm{N} - 1$.

في الأخير نقوم بحساب التكلفة الإجمالية التي تساوي $\sum \mathrm{cij}\ \mathrm{xij}$.

سنطبق هذه الطريقة على المسألة السابقة كما يلي:

- نبدأ بملأ أول خانة موجودة في الزاوية الشمالية الغربية (الموجودة في الأعلى إلى اليسار) وهي (**م1**ع) حيث أن كمية المطلوبة 50 وحدة بينما الكية المعروضة 60 وحدة نأخذ أقل قيمة وهي 50 حيث يصرف المخزن م1 كل كميته المعروضة، وتبقى 10 وحدات مطلوبة من ع (عين دفلى).
- ننتقل إلى الخلية الموالية وهي: (**م2** ع)نجد أن الكمية المطلوبة المتبقية هي 10 وحدات بينما الكمية المعروضة 100 وحدة وبالتالي أقصى كمية يمكن تلبيتها هي 10 وحدات بحيث تلبي عين دفلى كل طلبها، في حين أن الكمية المعروضة المتبقية في المخزن م2 هي 90 وحدة.
- ننتقل إلى الخلية الموالية وهي: (**م2 ب**) نجد أن الكمية المطلوبة من البليدة(ب) هي 40 وحدة بينما الكمية المعروضة المتبقية في م2 هي 90 وبالتالي يستطيع م2 تلبية كل طلب (ب) وتتبقى له 50 وحدة.
- ننتقل إلى الخلية الموالية وهي: (**م2 ج**) نجد أن الكمية المطلوبة من الجلفة(ج) هي 80 وحدة بينما الكمية المعروضة المتبقية في م2 هي 50 وبالتالي أقصى كمية يمكن تلبيتها هي 50 وبهذا يكون م2 قد صرف كل كميته المعروضة، بينما لا زالت الجلفة تحتاج إلى 30 وحدة.
- ننتقل إلى الخلية (م3ج) حيث أن الكمية المعروضة من م3 هي 90 وحدة بينما كمية المطلوبة المتبقية للجلفة هي 30 وحدة وبالتالي يستطيع م3 تلبية ما تبقى من احتياج للجلفة وتتبقى فيه 60 وحدة.
- ننتقل إلى الخلية الأخيرة (م3و) حيث نلاحظ أن الكمية المطلوبة من وهران (و) تساوي الكمية المعروضة المتبقية في المخزن م3 وهي 60 وحدة وهنا يتشبع الطرفين في آن واحد. وفي الأخير نلاحظ أن كل المخازن صرفت منتجاتها ولبيت احتياجات كل منطقة كما هو موضح في الجدول التالي:

مثال: جدول الحل الأساسي الأول بطريقة الزاوية الشمالية الغربية

العرض	وهران	الجلفة	البليدة	عين الدفلى	
50	6 /	3 /	8 /	5 **50**	**م1**
100	4 /	7 **50**	5 **40**	4 **10**	**م2**
90	5 **60**	4 **30**	2 /	6 /	**م3**

الطلب	60	40	80	60	240

عدد الخلايا المملوءة: $3+4-1=6$

$$\sum cij\ xij = 5(50)+4(10)+5(40)+7(50)+4(30)+5(60)=1260$$

مثال (2):

تمتلك مؤسسة ثلاث وحدات إنتاجية (S1,S2,S3) تمون أربع نقاط بيع /(D1,D2,D3,D4) الطاقة الإنتاجية لهذه الوحدات وكذا الكميات المطلوبة من قبل مختلف نقاط البيع بالإضافة إلى تكاليف نقل الوحدة الواحدة من مختلف الوحدات الإنتاجية إلى مختلف نقاط البيع موضحة في الجدول أدناه:

	D1	D2	D3	D4	العرض
S1	30	36	38	26	50
S2	42	28	30	34	30
S3	50	24	34	44	70
الطلب	30	60	20	40	150

المطلوب: إيجاد الحل الأساسي الأول بإتباع طريقة الزاوية الشمالية الغربية.

جدول الحل الأساسي الأول بطريقة الزاوية الشمالية الغربية

	D1	D2	D3	D4	العرض
S1	(30) 30	(36) 20	(38) /	(26) /	50
S2	(42) /	(28) 30	(30) /	(34) /	30
S3	(50) /	(24) 10	(34) 20	(44) 40	70
الطلب	30	60	20	40	150

عدد الخلايا المملوءة: 3+4-1=6

$\sum cij\ xij$ =30(30)+36(20)+28(30)+24(10)+34(20)+44(40)=5140

2. طريقة التكاليف الدنيا:

تسمى التكالبف الدنيا في حالة التدنئة والأرباح العظمى في حالة التعظيم، فمن عيوب طريقة الزاوية الشمالية الغربية هو عدم اهتمامها بهدف المسألة لذا جاءت هذه الطريقة لمعالجة هذا العيب فهي تأخذ بعين الاعتبار تكاليف النقل بحيث تبحث عن أقل تكلفة في الجدول وتملأ هذه الخلية بنفس المبدأ السابق لكن العكس في حالة التعظيم حيث نعمل على ملأ الجدول بإتباع من أكبر ربح إلى أدناه، وإذا تساوت التكاليف تملأ الخلية التي تسمح لنا بتصريف أو توزيع أكبر كمية ممكنة لأنها تخفض التكاليف الإجماليةفي حالة التدنئة وتعظم الأرباح في حالة التعظيم، وتكرر العملية إلى حين ملأ كل الجدول ثم تختبر صحة الحل الأساسي بنفس القاعدة السابقة ، وسوف نطبقها على المسألة السابقة كما يلي:

- نلاحظ أن أقل تكلفة في الجدول هي 2 والموجودة في الخلية (م3ب) حيث الكمية المعروضة هي 90 وحدة بينما الكمية المطلوبة هي 40 وحدة وبالتالي نستطيع تلبية كل احتياجات البليدة وتتبقى 50 وحدة في المخزن م3.

- التكلفة الأصغر الموالية هي 3 الموجودة في الخلية (م1ج) حيث الكمية المعروضة 50 وحدة والكمية المطلوبة هي 80 وحدة وبالتالي أقصى كمية يمكن تلبيتها هي 50 وحدة بحيث يصرف م1 كل كميته المعروضة وتتبقى 30 وحدة مطلوبة من الجلفة.
- التكلفة الأصغر الموالية هي 4 الموجودة في الخلية (م2ع) حيث أن الكمية المعروضة 100 وحدة والكمية المطلوبة 60 وحدة وبالتالي يستطيع م2 تلبية كل احتياجات عين دفلى وتتبقى فيه 40 وحدة.
- التكلفة الموالية هي 4 الموجودة في الخلية (م2و) حيث أن الكمية المطلوبة هي 60 وحدة والكمية المعروضة 40 وحدة وبالتالي أقصى كمية يمكن تلبيتها هي 40 وحدة بحيث تنفذ الكمية المعروضة من م2 وتبقى 20 وحدة مطلوبة من وهران.
- التكلفة الموالية 4 الموجودة في الخلية (م3ج) حيث أن الكمية المطلوبة 30 وحدة والكمية المعروضة 50 وحدة وبالتالي يستطيع المخزن تلبية ما تبقى من احتياجات الجلفة وتتبقى فيه 20 وحدة.
- التكلفة الموالية الموجودة في آخر خلية (م3 و) حيث أن الكمية المتبقية في المخزن م3 تساوي الكمية المتبقية المطلوبة لوهران، وفي الأخير نلاحظ أن كل المخازن صرفت منتجاتها ولبيت احتياجات كل منطقة كما هو موضح في الجدول التالي:

جدول الحل الأساسي الأول بطريقة التكلفة الدنيا:

العرض	وهران	الجلفة	البليدة	عين الدفلى	
50	6 /	3 **50**	8 /	5 /	**م1**
100	4 **40**	7 /	5 /	4 **60**	**م2**
90	5 **20**	4 **30**	2 **40**	6 /	**م3**
240	**60**	**80**	**40**	**60**	**الطلب**

عدد الخلايا المملوءة: 6=1-4+3

$$\sum cij\ xij = 3(50)+4(60)+4(40)+2(40)+4(30)+5(20)=1020$$

مثال(2): نطبق نفس خطوات الحل في المثال السابق

العرض	D4	D3	D2	D1	

S1	10 (30)	/ (36)	/ (38)	40 (26)	50
S2	10 (42)	/ (28)	20 (30)	/ (34)	30
S3	10 (50)	60 (24)	/ (34)	/ (44)	70
الطلب	30	60	20	40	150

عدد الخلايا المملوءة: $3+4-1=6$

$Z=4300$

طريقة Voguel: الفروقات العظمى

وتسمى أيضا طريقة الجزاء تعتبر من أهم الطرق لما تتميز به من القدرة على الوصول إلى الحل الأمثل أو الأقرب منه ويتم إيجاد الحل الأساسي في حالة التدنئة بإتباع الخطوات التالية:

- نحسب الفرق بين أقل تكلفتين (التكلفة الدنيا و التكلفة الموالية لها في الصغر) بالنسبة للأسطر و الأعمدة ، تسمى هذه الفروقات بأرقام فوقل.
- نحدد أكبر فارق أو أكبر رقم من أرقام فوقل المحسوبة ، بعد تحديده نبحث عن أقل تكلفة مقابلة له في السطر أو العمود الذي وجد فيه هذا الرقم ثم تقوم بملأ هذه الخانة.
- نعيد العملية من جديد مع تفادي إيجاد الفروقات بالنسبة للأسطر و الأعمدة المشبعة حتى يتم تصريف كل الكميات المعروضة و تلبية كافة الاحتياجات.

ملاحظة : في حالة وجود قيمتين عظمتين من أرقام فوقل نقارن بين التكلفتين المقابلتين لهذه الأرقام ونختار أقل تكلفة بحيث نملأ الخانة المنتمية لها،في حالة تساوي التكلفتين نختار التكلفة التي توزع أكبر كمية.

أما في حالة التعظيم نملأ الجدول بإتباع الخطوات التالية:

- نحسب الفرق بين أكبر ربحين (الربح الأكبر و الربح الموالي له في الكبر) بالنسبة للأسطر و الأعمدة تسمى هذه الفروقات بأرقام فوقل.
- نحدد أصغر فارق أو أصغر رقم من أرقام فوقل المحسوبة ، بعد تحديده نبحث عن أكبر ربح مقابل له في السطر أو العمود الذي وجد فيه هذا الرقم ثم تقوم بملأ هذه الخانة.

- نعيد العملية من جديد مع تفادي إيجاد الفروقات بالنسبة للأسطر و الأعمدة المشبعة حتى يتم تصريف كل الكميات المعروضة و تلبية كافة الاحتياجات.

ملاحظة : في حالة وجود قيمتين صغيرتين متساويتين من أرقام فوقل نقارن بين الربحين المقابلين لهذه الأرقام ونختار أكبر ربح بحيث نملأ الخانة المنتمية له،في حالة تساوي الربحين نختار الربح الذي يوزع أكبر كمية.

مثال:

	عين دفلى	البليدة	الجلفة	وهران	العرض				
م1	5 /	8 /	3 **50**	6 /	**50**	02	02	02	02
م2	4 **40**	5 /	7 /	4 **60**	**100**	01	03	03	/
م3	6 **20**	2 **40**	4 **30**	5 /	**90**	02	01	02	02
الطلب	**60**	**40**	**80**	**60**	**240**				
	01	03	01	01					
	01	/	01	01					
	01	/	01	/					
	01	/	01	/					

مثال (2):

	D1	D2	D3	D4	العرض					
S1	30 **30**	36 **/**	38 **/**	26 **20**	**50**	01	10	12^*	/	/
S2	42 **/**	28 **/**	30 **10**	34 **20**	**30**	02	02	04	04	/
S3	50 **/**	24 **60**	34 **10**	44 **/**	**70**	10	10^*	10	10	/
الطلب	**30**	**60**	**20**	**40**	**150**					
	12^*	04	04	08						
	/	04	04	08						
	/	/	04	08						
	/	/	04	10^*						
			04	/						

$Z=4180$

مرحلة إيجاد الحل الأمثل:

1. **طريقة التخطي:**

تستخدم هذه الطريقة للحصول على الحل الأمثل وهذا طبعا انطلاقا من الحل الأساسي المقبول الأول الذي تم الحصول عليه بإحدى الطرق الثلاث المذكورة أعلاه (الزاوية الشمالية الغربية التكلفة الدنيا،فوقل).

تقوم هذه الطريقة على محاولة إدخال بعض الخلايا الفارغة (الخلية الفارغة) في الحل وإخراج بعض الخلايا المملوءة من الحل وبغرض معرفة الخلية التي سوف تدخل إلى الحل تقوم بعملية تقييم الخلية الفارغة عملية تقيم الخلايا الفارغة تتم كما يلي:

بالنسبة لهذا المثال ننطلق من الحل الأساسي المقبول الأول المتحصل عليه بطريقة التكلفة الدنيا.

سوف نقوم بالإجراء التالي:

لتكن الخلية الفارغة التالية S1D2،أو تقوم بتوجيه أو تحويل أو إضافة وحدة إلى هذه الخلية (S1 D2) فإن هذا الأخير يؤدي إلى زيادة التكلفة ب36. ومن أجل المحافظة على توزان القيود يجب إنقاص أو تخفيض وحدة واحدة من الخلايا S1D2، S3D2 وإضافة وحدة واحدة إلى خانة S3D1 كما الحال موضح في الجدول أدناه.

	D1	D2	D3	D4	العرض
	30 **10**	36 /	38 /	26 **40**	**50**
S2	42 **10**	28 /	30 **20**	34 /	**30**
S3	50 **10**	24 **60**	34 /	44 /	**70**
الطلب	**30**	**60**	**20**	**40**	**150**

المسار في طريقة **التخطي** موضح بالأسهم التي هي معرفة بإشارات (+) و (−) في الخلايا المناسبة. فالإشارة (+) تتعلق بالخلية التي تتلقى أو يضاف إليها وحدة واحدة وإشارة (−) تتعلق بالخلية التي تتعلق بخانة التي تنقص منها وحدة واحدة . السؤال المطروح هو ما أثر الإجراء على التكلفة الكلية للنقل؟

الإجابة يقدمها الجدول التالي:

**** أثر الإجراء (تحويل وإضافة وحدة واحدة إلى الخلية S1D2) على التكلفة الإجمالية للنقل**

العملية	أثر العملية على التكلفة

إضافة وحدة واحدة إلى الخليةS1D2	36+
تخفيض وحدة واحدة إلى الخليةS3D2	24−
إضافة وحدة واحدة إلى الخليةS3D1	50+
تخفيض وحدة واحدة إلى الخليةS1D1	30−
التغيير الصافي	**32+**

من الجدول يتضح بان إجراء إضافة وحدة واحدة إلى الخليةS1D2 ينعكس بارتفاع التكلفة الإجمالية بـ32.وبما أن هذا الإجراء يؤدي إلى ارتفاع التكلفة الإجمالية للنقل فيجب أن لا نقوم به.ولنبحث عن إجراء آخر من شأنه تخفيض التكلفة الإجمالية للنقل.

سوف نقوم بالإجراء التالي:

لتكن الخلية الفارغة التاليS2D2،لو نقوم بتوجيه أو تحويل أو إضافة وحدة واحدة إلى هذه الخلية(S2D2) فإن هذا الإجراء يؤدي إلى زيادة التكلفة بـــ28. ومن أجل المحافظة على توازن القيود أي من أجل عدم خرق القيود يجب إنقاص أو تخفيض وحدة واحدة من الخلاياS2D1،S3D2 وإضافة وحدة واحدة إلى الخليةS3D1.

السؤال المطروح هو ما هو أثر هذا الإجراء على التكلفة الكلية للنقل؟

الإجابة يقدمها الجولة التالي:

****أثر الإجراء (تحويل وإضافة وحدة واحدة إلى الخلية إلى الخليةS2D2) على التكلفة الإجمالية للنقل.**

العملية	أثر العملية على التكلفة
إضافة وحدة واحدة إلى الخلية S2D2	28+
تخفيض وحدة واحدة إلى الخلية S3D2	24−
إضافة وحدة واحدة إلى الخلية S3D1	50+
تخفيض وحدة واحدة إلى الخلية S2D1	42−
التغيير الصافي	**12+**

من الجدول يتضح بأن إجراء إضافة وحدة واحدة إلى الخلية S2D2 ينعكس بارتفاع التكلفة الإجمالية بـــ12 .وبما أن هذا الإجراء يؤدي إلى ارتفاع التكلفة الإجمالية للنقل فيجب أن لا نقوم به. ولنبحث عن إجراء أخر شأنه تخفيض التكلفة الإجمالية للنقل.

إن تقيم الخلايا الفارغة الأخرى (الإجراءات الأخرى وأثرها على التكلفة الإجمالية للنقل) يقدمها الجدول أدناه:

الخلية الفارغة	المسار أو الإجراء	الأثر على التكلفة الإجمالية
S1D3	S1D3, S2D3, S2D1, S1D1	$+38-30+24-30=+20$
S3D3	S3D3, S3D1, S2D1, S2D3	$+34-50+42-30=-4$
S2D4	S2D4, S2D1, S1D1, S1D4	$+34-42+30-36=-4$
S3D4	S3D4, S3D1, S1D1, S1D4	$+44-50+30-26=-2$

من الجدول أعلاه يتبين بأنه يوجد 03 خانات(S3D3، S2D4، S3D3)تحتوي على قيم سالبة على التوالي (-4،-4،-2) فإذا أضفنا وحدة واحدة إلى هذه الخلايا فإن ذلك ينعكس بتحسين التكلفة الإجمالية أي تخفيضها.

السؤال المطروح ما هي الخلية التي سوف نختارها أو بعبارة أخرى ما هو الإجراء الذي سوف نختاره؟

نختار الخلية التي (الإجراء الذي) تؤدي إلى أفضل تحسين التكلفة الإجمالية،و بما أنه توجد خانتين (إجرائين) تتحقق فيها هذه الخاصية(S3D3، S2D4)،نختار واحدة لا على التعيين ولتكن الخليةS3D3. هذا الإجراء أو اختيار الخلية S3D3 يؤدي إلى تخفيض التكلفة الإجمالية بـ 04 **من أجل كل وحدة مضافة أو محولة إلى هذه الخلية.**

إذا تم إضافة تحويل وحدة واحدة إلى الخلية S3D3 فإن ذلك يؤدي إلى تخفيض التكلفة الإجمالية بـ04.

إذا تم إضافة تحويل 02 وحدتين إلى الخليةS3D3 فإن ذلك يؤدي إلى تخفيض التكلفة الإجمالية بـ $02 \times 04 = 08$.

إذا تم إضافة تحويل 03 وحدات إلى الخلية S3D3 فإن ذلك يؤدي إلى تخفيض التكلفة الإجمالية بـ $03 \times 04 = 12$.

إذا تم إضافة تحويل 04 وحدات إلى الخليةS3D3 فإن ذلك يؤدي إلى تخفيض التكلفة الإجمالية ب $04 \times 04 = 16$.

السؤال المطروح هو كالتالي: ما هي الكمية القصوى والعظمى التي يمكن إضافتها أو تحويلها إلى الخلية S3D3؟

إن أكبر وأعظم كمية يمكن تحويلها أو إضافتها إلى الخلية S3D3 هي 10 وحدات.

إن تحويل أو إضافة10 وحدات إلى الخليةS3D3 يتبعه تخفيض 10 وحدات من الخليةS3D1 وإضافة 10 وحدات إلى الخليةS2D1 وتخفيض 10 وحدات من الخليةS2D3 هذا الإجراء ينجر عنه انخفاض التكلفة الإجمالية بــ04 × 10 وحدات = 40 أي انتقال التكلفة من 4300 إلى 4260.وعليه يصبح الحل الأمثل كما يلي:

	D1	D2	D3	D4	offre
S1	30 10	36 /	38 /	26 40	50
S2	42 20	28 /	30 10	34 /	30
S3	50 /	24 60	34 10	44 /	70
Demande	30	60	20	40	150

من أجل معرفة فيما إذا كان هذا هو الحل أمثل أم لا يجب القيام بعملية تقييم الخلايا الفارغة

الخلية الفارغة	المسار أو الإجراء	الأثر على التكلفة الإجمالية
S1D2	S1D2, S1D1, S2D1, S2D3, S3D3, S3D2	36−30+42−30+34−24=28
S1D3	S1D3, S2D3, S2D1, S1D1	38−30+42−30=20
S2D2	S2D2, S3D2, S3D3, S2D3	28−24+34−30=8
S2D4	S1D4, S1D4, S1D1, S2D1	34−26+30−42=−4
S3D1	S3D1, S2D1, S2D3, S3D3	50−42+30−34=4
S3D4	S3D4, S3D3, S2D3, S2D1, S1D1, S1D4	44−34+30−42+30−26=2

إن عملية تقيم الخلايا الفارغة الموضحة في الجدول أعلاه توضح بأن الخلية S2D4 تحتوي على قيمة سالبة تساوي−04. فإذا أضفنا وحدة واحدة إلى هذه الخلية S2D4 فإنه يترتب عنه إنخفاض التكلفة الإجمالية

بـ 04 .ومنه تحسين قيمة دالة الهدف. إن أكبر وأعظم كمية يمكن تحويلها أو إضافتها إلى الخلية S2D4 هي 20 وحدة.

إن تحويل أو إضافة 20 وحدة إلى الخليةS2D4 يتبعه تخفيض 20 وحدة من الخليةS1D4 ولإضافة 20 وحدة إلى الخلية S1D1 وتخفيض 20 وحدة من الخليةS2D1 هذا هو الإجراء ينجر عنه انخفاض التكلفة الإجمالية بـ4×20 وحدة= 80 أي انتقال التكلفة من 4260 إلى 4180. وعليه يصبح الحل الجديد كما يلي:

	D1	D2	D3	D4	العرض
S1	30 30	36 /	38 /	26 20	50
S2	42 /	28 /	30 10	34 20	30
S3	50 /	24 60	34 10	44 /	70
الطلب	30	60	20	40	150

من أجل معرفة فيما إذا كان الحل هو حل أمثل أم لا يجب القيام بعملية تقيم الخلايا الفارغة.

الخلية الفارغة	المسار أو الإجراء	الأثر على التكلفة الإجمالية
S1D2	S1D2, S3D2, S3D3, S2D3, S2D4, S1D4	36−24+34−30+34−26=24
S1D3	S1D3, S1D4, S2D4, S2D3	38−26+34−30=16
1S2D	S2D1, S1D1, S1D4, S2D4	42−30+26−34=4
2S2D	S2D2, S2D3, S3D3, S3D2	28−30+34−24=8
S3D1	S3D1, S1D1, S1D4, S2D4,S2D3,S3D3	50−30+26−34+30−34=8
S3D4	S3D4, S3D3, S2D3, S2D4	44−34+30−34=6

من الجدول التقييم (جدول تقيم الخلايا الفارغة) أعلاه يتضح بأن جميع القيم المسجلة موجبة وهذا يعني أن إدخال أي خانة إلى الحل سوف يؤدي إلى ارتفاع في التكلفة الإجمالية للنقل وعلى هذا نستنتج بأن هذا الحل هو **حل أمثل**.

ملاحظة:إذا أعطت عملية تقييم الخلايا الفارغة قيمة تساوي الصفر يعني هذا وجود حل متعدد،أي دخول هذه الخلية الفارغة إلى الحل لا يغير قيمة دالة الهدف.

02/طريقة التوزيع المعدل:

تستخدم هذه الطريقة للحصول على الحل الأمثل وهذا طبعا انطلاقا من الحل الأساسي المقبول الذي تم الحصول عليه بإحدى الطرق الثلاث المذكورة أعلاه.(**الزاوية الشمالية الغربية،التكلفة الدنيا،فوقل**).

تقوم هذه الطريقة على محاولة إدخال بعض الخلايا الفارغة (الخلية الفارغة) في الحل وإخراج بعض الخلايا المملوءة من الحلب النسبة لهذا المثال ننطلق من الحل الأساسي المقبول الأول المتحصل عليه بطريقة التكلفة الدنيا.

للحصول على الحل الأمثل بهذه الطريقة نتبع المراحل التالية:

المرحلة الأولى: حساب U_iو V_j من أجل كل خانة مملوءة وذلك انطلاقا من العلاقة التالية:

$C_{ij} = U_i + V_j$

$$C_{ij} = U_i + V_j$$

$$C_{11} = U_1 + V_1$$

$$30 = U_1 + V_1$$

نلاحظ بأن المعادلة الأخيرة لها عدد لا نهائي من الحلول وعليه نعطي قيمة لـ $_1$ ولتكن 0 ونستنتج $30 = V_1$ ونكتب النتيجة في الجدول.

$$C_{21} = U_2 + V_1 \Rightarrow U_2 = C_{21} - V_1 \Rightarrow U_2 = 42 - 30 = 12$$
$$C_{31} = U_3 + V_1 \Rightarrow U_3 = C_{31} - V_1 \Rightarrow U_3 = 50 - 30 = 12$$
$$C_{32} = U_3 + V_2 \Rightarrow V_2 = C_{32} - U_3 \Rightarrow V_2 = 24 - 20 = 04$$
$$C_{23} = U_2 + V_3 \Rightarrow V_3 = C_{23} - U_2 \Rightarrow V_3 = 30 - 12 = 18$$
$$C_{14} = U_1 + V_4 \Rightarrow V_4 = C_{14} - U_1 \Rightarrow V_4 = 26 - 00 = 26$$

	D1	D2	D3	D4	العرض	U_i
S1	30 **10**	36 /	38 /	26 **40**	**50**	$U_1 = 00$
S2	42 **10**	28 /	30 **20**	34 /	**30**	$U_2 = 12$
S3	50	24	34	44	**70**	$U_3 = 20$

	10	**60**	/	/		
الطلب	**30**	**60**	**20**	**40**	**150**	
$\boldsymbol{V_j}$	$\boldsymbol{V_1 = 30}$	$\boldsymbol{V_2 = 04}$	$\boldsymbol{V_3 = 18}$	$\boldsymbol{V_4 = 26}$		

التكلفة الإجمالية هي 10×30+40×26+10×42+10×50+60×24 =4300.

المرحلة الثانية:حساب S_{ij} من أجل أو لكل خلية فارغة وذلك انطلاقا من العلاقة التالية:

$$S_{ij} = C_{ij} - U_i - V_j$$

الخلية الفارغة			
S1D2	$S_{12} = C_{12} - U_1 - V_2$	$\longrightarrow$	$S_{12} = 36 - 00 - 04 = 32$
S1D3	$S_{13} = C_{13} - U_1 - V_3$	$\longrightarrow$	$S_{13} = 38 - 00 - 18 = 20$
S2D2	$S_{22} = C_{22} - U_2 - V_2$	$\longrightarrow$	$S_{22} = 28 - 12 - 04 = 12$
S2D4	$S_{24} = C_{24} - U_2 - V_4$	$\longrightarrow$	$S_{24} = 34 - 12 - 26 = -4^*$
S3D3	$S_{33} = C_{33} - U_3 - V_3$	$\longrightarrow$	$S_{33} = 34 - 20 - 18 = -4^*$
S3D4	$S_{34} = C_{34} - U_3 - V_4$	$\longrightarrow$	$S_{34} = 44 - 20 - 26 = -2^*$

إن إدخال إحدى الخلايا الفارغة التالية: S2D4, S3D3 , S3D4 إلى الحل عن طريق تحويل أو توجيه أو إضافة وحدة إلى هذه الخلايا يؤدي إلى تخفيض التكلفة الإجمالية للنقل بـ 04،04، 02 على التوالي. فأي الخلايا نختار إن الخلية التي يتم اختيارها هي الخلية التي تخفض التكلفة الإجمالية للنقل بأكبر قيمة وعلى هذا الأساس نختار إدخال الخانتين التاليتين S2D4،S2D3 وليكن الاختيار هو S3D3.

إن إدخال الخلية الفارغة S3D3 إلى الحل يعني تحويل أو توجيه أو إضافة وحدة واحدة إلى هذه الخلية وبغرض المحافظة على توازن العمود الثالث يجب تخفيض وإنقاص وحدة واحدة من الخلية المملوءةS2D3 ومن أجل المحافظة على عدم خرق توازن السطر الثاني نضيف وحدة واحدة إلى الخلية المملوءة S2D1 ومن أجل المحافظة على توازن العمود الأول نخفض وننقص وحدة واحدة من الخلية المملوءةS3D1 حسب ما هو موضح في المسار المبين بالأسهم هذا الإجراء ينجر عن تخفيض التكلفة الإجمالية بـ 04 كما هو مبين في النتيجة المتحصل عنها عند حساب S_{33}.

ملاحظة:

بدلا من إضافة وحدة واحدة إلى الخلية الفارغة S3D3 دعنا نضيف 10 وحدات وبغرض المحافظة على توازن العمود الثالث يجب تخفيض وإنقاص 10 وحدات من الخلية المملوءة S2D3 ومن أجل عدم خرق توازن السطر الثاني نضيف 10 وحدات إلى الخلية المملوءة المبين بالأسهم. هذا الإجراء ينجر عن تخفيض التكلفة الإجمالية بـ 04×10 =40 لتنتقل من 4300 إلى 4260 ونتيجة لهذا الإجراء يصبح الحل الجديد هو كما يلي:

	D1	D2	D3	D4	العرض	U_i
S1	30 10	36 /	38 /	26 40	50	$U_1 = 00$
S2	42 10	28 /	30 20	34 /	30	$U_2 = 12$
S3	50 10	24 60	34 /	44 /	70	$U_3 = 16$
الطلب	30	60	20	40	150	
V_j	$V_1 = 30$	$V_2 = 08$	$V_3 = 18$	$V_4 = 26$		

التكلفة الإجمالية هي:10 ×30+40× 26+20× 42+10 ×30 +60 ×24+10×34 =4260.

نعود إلى المرحلة الأولى:

المرحلة الأولى: حساب U_i و V_j من أجل كل خانة مملوءة وذلك انطلاقا من العلاقة التالية: $C_{ij} = U_i + V_j$

$$C_{ij} = U_i + V_j$$

$$C_{11} = U_1 + V_1$$

$$30 = U_1 + V_1$$

نلاحظ بأن المعادلة الأخيرة لها عدد لا نهائي من الحلول وعليه نعطي قيمة لـ U_1 ولتكن 0 ونستنتج $V_1 = 30$ ونكتب النتيجة في الجدول، وكذا بالنسبة لباقي U_iو V_j هي موضحة في الجدول أعلاه

المرحلة الثانية: حساب S_{ij} من أجل أو لكل خانة فارغة وذلك انطلاقا من العلاقة التالية:

$$S_{ij} = C_{ij} - U_i - V_j$$

الخلية الفارغة			
S1D2	$S_{12} = C_{12} - U_1 - V_2$	$\longrightarrow$	$S_{12} = 36 - 00 - 08 = 28$
S1D3	$S_{13} = C_{13} - U_1 - V_3$	$\longrightarrow$	$S_{13} = 38 - 00 - 18 = 20$
S2D2	$S_{22} = C_{22} - U_2 - V_2$	$\longrightarrow$	$S_{22} = 28 - 12 - 08 = 08$
S2D4	$S_{24} = C_{24} - U_2 - V_4$	$\longrightarrow$	$S_{24} = 34 - 12 - 26 = -4^*$
S3D1	$S_{31} = C_{31} - U_3 - V_1$	$\longrightarrow$	$S_{31} = 50 - 16 - 30 = 4$
S3D4	$S_{34} = C_{34} - U_3 - V_4$	$\longrightarrow$	$S_{34} = 44 - 16 - 26 = 02$

إن إدخال الخلية S2D4 إلى الحل عن طريق تحويل أوت وجيه أو إضافة وحدة واحدة إلى هذه الخلية يؤدي إلى تخفيض التكلفة الإجمالية للنقل بــ04.

بدلا من إضافة وحدة واحدة إلى الخلية الفارغة S2D4 دعنا نضيف 20 وحدة وبغرض المحافظة على توازن العمود الرابع يجب تخفيض وإنقاص 20 وحدة من الخلية المملوءة S1D4 ومن أجل عدم خرق توازن السطر الأول نضيف 20 وحدة إلى الخلية المملوءة S1D1 ومن أجل المحافظة على توازن العمود الأول نخفض وننقص 20 وحدة من الخلية المملوءة S2D1 حسب ما هو موضح في المسار المبين بالأسهم هذا الإجراء ينجر عن تخفيض التكلفة الإجمالية بـ 04×20= 80

لتنتقل من 4260 إلى 4180 ونتيجة لهذا الإجراء يصبح الجديد هو كما يلي:

	D1	**D2**	**D3**	**D4**	**العرض**	$\boldsymbol{U_i}$
S1	30 **30**	36 /	38 /	26 **20**	**50**	$\boldsymbol{U_1 = 00}$
S2	42 /	28 /	30 **10**	34 **20**	**30**	$\boldsymbol{U_2 = 08}$
S3	50 /	24 **60**	34 **10**	44 /	**70**	$\boldsymbol{U_3 = 12}$
الطلب	**30**	**60**	**20**	**40**	**150**	
$\boldsymbol{V_j}$	$\boldsymbol{V_1 = 30}$	$\boldsymbol{V_2 = 12}$	$\boldsymbol{V_3 = 22}$	$\boldsymbol{V_4 = 26}$		

التكلفة الإجمالية هي 30× 30+26×20+30×10+34×20+24×60+34×10=4180.

نعود إلى المرحلة الأولى

المرحلة الأولى:حساب U_iو V_j من أجل كل خانة مملوءة وذلك انطلاقا من العلاقة التالية:

$$C_{ij} = U_i + V_j$$

$$C_{ij} = U_i + V_j$$

$$C_{11} = U_1 + V_1$$

$$30 = U_1 + V_1$$

نلاحظ بأن المعادلة الأخيرة لها عدد لا نهائي من الحلول وعليه نعطي قيمة لـ U_1 ولتكن 0 ونستنتج $V_1 = 30$ ونكتب النتيجة في الجدول، وكذا بالنسبة لباقي U_iو V_j هي موضحة في الجدول أعلاه.

المرحلة الثانية:حسابS_{ij} من أجل أو لكل خانة فارغة وذلك انطلاقا من العلاقة التالية:

$$S_{ij} = C_{ij} - U_i - V_j$$

الخلية الفارغة			
S1D2	$S_{12} = C_{12} - U_1 - V_2$	$\longrightarrow$	$S_{12} = 36 - 00 - 02 = 34$
S1D3	$S_{13} = C_{13} - U_1 - V_3$	$\longrightarrow$	$S_{13} = 38 - 00 - 22 = 16$
S2D1	$S_{21} = C_{21} - U_2 - V_1$	$\longrightarrow$	$S_{21} = 42 - 08 - 30 = 04$
S2D2	$S_{22} = C_{22} - U_2 - V_2$	$\longrightarrow$	$S_{22} = 28 - 08 - 12 = 18$
S3D1	$S_{31} = C_{31} - U_3 - V_1$	$\longrightarrow$	$S_{31} = 50 - 12 - 30 = 08$
S3D4	$S_{34} = C_{34} - U_3 - V_4$	$\longrightarrow$	$S_{34} = 44 - 12 - 26 = 06$

نلاحظ بأن جميع S_{ij} موجبة أي إدخال أي خانة فارغة إلى الحل عن طريق تحويل أو توجيه أو إضافة وحدة واحدة إلى هذه الخلية يؤدي إلى زيادة التكلفة الإجمالية للنقل ومنه الحل المتحصل عليه حل أمثل.

الحالات الخاصة في طريقة النقل:

1. حالة عدم التوازن (عدم تساوي العرض مع الطلب):

لقد وضحنا سابقا أنه قبل تطبيق أي طريقة للحل يجب أن يكون شرط التوازن محقق (العرض=الطلب)، لكنه في الواقع نادر الحدوث لذلك إذا كان:

- العرض أقل من الطلب يجب أن نضيف سطرا وهميا تكلفته صفر ثم نكمل الحل.
- الطلب أقل من العرض يجب أن نضيف عمودا وهميا تكلفته صفر ثم نكمل الحل.

2. حالة الانحلالية (الحلول الناقصة):

يعتبر الحل ناقصا إذا كان عدد الخلايا المملوءة (Xij) أقل تماما من (m+n−1) حيث يستحيل الوصول إلى الحل الأمثل. ويتم معرفة هذه الحالة من خلال عدم القدرة على تحديد بعض قيم I وJ . وبالتالي يجب إضافة قيمة صغيرة جدا هي ε تقدر بـ $\varepsilon = 0.0000001$

حيث: $X_{ij} = X_i \pm \varepsilon$ ثم نكمل الحل.

ملاحظة: يجب إضافة ε في خلية فارغة بحيث لا تشكل مسارا مغلقا مع بقية الخلايا المملوءة.

3. حالة الطرق الممنوعة:

تظهر هذه الحالة عند استحالة العلاقة بين سطر ما وعمود ما لظروف معينة مثلا عدم توفر مواصفات مادة ما لطلب مستهلك ما. مما يستوجب تقييد (غلق) الطريق الممنوع أي عدم التوزيع في تلك الخلية من خلال وضع أكبر تكلفة تفوق بقية التكاليف في المسألة ثم نقوم بالحل باتباع احدى الطرق.

4. حالة الحلول البديلة:

إذا وجدنا $C_{ij} = 0$ في خلية فارغة فإنه يوجد حل بديل حيث نضع Δ في تلك الخلية ثم نكمل مسار مغلق ونكمل الحل.