البرامج الثنائية(المرافقة النظيرة):

لكل مشكلة برمجة خطية هناك مشكلة أخرى مرتبطة بها، نسمي إحدى هاتين المشكلتين بالمشكلة الأولية أو الأصلية، والأخرى نسميها الثنائي أو المقابل، وتمتلك كلتا المشكلتين خواص مرتبطة مع خواص الأخرى، ويتضمن استخدام النموذج المقابل على فوائد عديدة منها:

1. سهولة وسرعة التوصل إلى الحل الأمثل , حيث قد تتطلب إحدى المشاكل إجراءات حل مطولة وفق الطريقة المبسطة للنموذج المقابل, وعلى العكس من ذلك , فقد تتصف حل المشكلة بالنموذج المقابل بالصعوبة , عليه يكون حلها أسهل عند تحويلها إلى النموذج الأصلي
2. تساعد الإدارة على معرفة قيمة البدائل الأخرى للقرار.
3. تقليص الجهد الحسابي عند احتواء نموذج البرمجة الأولي على عدد كبير من القيود.
4. يمكن الحصول على الحل الأمثل للنموذج الثنائي مباشرة من جدول الحل الأمثل للنموذج الأولي والعكس صحيح.
5. للتخلص من الإشارة السالبة في الجانب الأيمن (إن وجدت) وهو من أهم ما يمكن الحصول عليه في حالة التحويل إلى النموذج الثنائي.
6. بهدف التعرف على أبعاد المشكلة الثنائية، فإذا كان البرنامج الأولي يعظم الربح، فبإمكاننا التعرف على البرنامج الثنائي ويكون يهدف إلى تخفيض تكاليف نفس المشكلة. كما يعطي الكثير من الحقائق الاقتصادية التي تساعد على تفهم أبعاد المشكلة، وخاصة فيما يتعلق بأسعار الظل.

خطوات تحويل البرنامج الأولي إلى البرنامج الثنائي:

هناك خطوات يجب إتباعها عند عملية تحويل النموذج الأولي إلى المقابل أو العكس وهي كما يلي:

- نعكس صيغة دالة الهدف، فإذا كانت في البرنامج الأولي تعظيم فإننا نعكسها تدنئة في البرنامج الثنائي والعكس.
- الطرف الأيمن لقيود البرنامج الأولي نجعلها معاملات دالة الهدف في البرنامج الثنائي.
- معاملات دالة هدف البرنامج الأولي نجعلها الطرف الأيمن لقيود البرنامج الثنائي.
- تحويل مصفوفة المعاملات للمتغيرات في قيود البرنامج الأولي، بحيث تصبح الصفوف أعمدة والعمدة صفوف(معاملات كل متغير في قيود البرنامج الأولي تصبح قيودا في البرنامج الثنائي).

- إضافة شرط عدم السلبية على متغيرات البرنامج الثنائي.
- عدد المتغيرات في البرنامج الأولي يساوي عدد المتغيرات في البرنامج الثنائين وعدد القيود في البرنامج الأصلي يساوي عدد المتغيرات في البرنامج الثنائي.

ثنائية البرامج القانونية:

فإن كان البرنامج الأصلي مكتوب في شكله القانوني كما يلي:

$$Min\ Z = \sum_{j=1}^{n} Cj\ Xj$$

$$\text{S/C} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} aj\ xj \geq bi \\ xj \geq 0,\ j = 1 \dots \dots . n \\ i = 1 \dots \dots . m \end{cases}$$

الشكل القانوني دالة الهدف تعاكس القيود دائما.

$$Max\ W = \sum_{i=1}^{m} bi\ yi$$

$$\text{S/C} \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} aj\ yi \leq cj \\ yi \geq 0,\ j = 1 \dots \dots . n \\ i = 1 \dots \dots . m \end{cases}$$

مثال:

$$Max\ Z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{S/C} \begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 4 \\ 2x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

الشكل القانوني (الأصلي):

$$Max\ Z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{S/C} \begin{cases} -3x_1 + x_2 \leq -4 \\ 2x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

البرنامج الثنائي:

$$Min\ W = -4y_1 + 3y_2$$

$$\text{S/C} \begin{cases} -3y_1 + 2y_2 \geq 2 \\ y_1 + y_2 \geq 3 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

مثال:

البرنامج الأصلي

$$MIN(Z) = 5x_1 + 2x_2 + x_3$$

$$\text{S/C} \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 20 \\ 6x_1 + 8x_2 + 5x_3 \geq 30 \\ 7x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 40 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

البرنامج الثنائي:

$$MAX(W) = 20y_1 + 30y_2 + 40y_3$$

$$\text{S/C} \begin{cases} 2y_1 + 6y_2 + 7y_3 \leq 5 \\ 3y_1 + 8y_2 + y_3 \leq 2 \\ y_1 + 5y_2 + 3y_3 \leq 1 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

ثنائية البرامج المختلطة:

في هذه الحالة نتبع الخطوات التالية:

1. إذا كان القيد في البرنامج الأولي مساواة (=) فإن المتغيرة المرافقة له تكون حرة (∀).
2. إذا كان أحد المتغيرات في البرنامج الأولي حر (∀) فإن القيد المقابل له في البرنامج الثنائي يكون مساواة (=).

3. إذا كان القيد غير نظامي مع دالة الهدف أي نجد قيد مع (MAX) أكبر أو يساوي أو مع (MIN) أقل أو تساوي فإنه يتم تحويله إلى الصيغة القانونية بضرب طرفي المتراجحة في × (1−).

ويمكن تلخيص خطوات التحويل من البرنامج الأصلي إلى البرنامج الثنائي أو العكس:

إذا كان الشكل الأصلي مختلط ويصعب كتابته في الشكل القانوني نستعين في هذه الحالة بالجدول التالي:

Min Dual (primal)	Max primal (Dual)
معاملات دالة الهدف	الطرف الثاني القيود (bi)
الطرف الثاني في القيود	معاملات دالة الهدف (Cj)
عدد المتغيرات =	**=عدد القيود**
المتغيرة (i) ≤ 0	القيد (i) :$\leq$
المتغيرة (i) ≥ 0	القيد (i) :$\geq$
المتغيرة (i) $\vartheta\vartheta$	القيد (i) :$=$
عدد القيود=	**=عدد المتغيرات**
القيد (j) :$\leq$	المتغيرة (j) ≤ 0
القيد (j) :$\geq$	المتغيرة (j) ≥ 0
القيد (j) :$=$	المتغيرة (j) $\vartheta\vartheta$

أمثلة:

$$MAX\ (W) = 2y_1 + 6y_2 + 4y_3$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \leq 2 \\ y_1 - y_2 - 1y_3 \geq 1 \\ y_1 + 3y_3 = 3 \\ y_1 \geq 0\ , y_2 \leq 0, y_3\ \vartheta\vartheta \end{cases}$$

$$MIN\ (Z) = 2x_1 + x_2 + 3x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \geq 2 \\ 2x_1 - x_2 \leq 6 \\ -x_2 + 3x_3 = 4 \\ x_1 \geq 0\ , x_2 \leq 0, x_3\ \vartheta \end{cases}$$

خصائص البرنامج الثنائي: ثنائية البرنامج الثنائي هي البرنامج الأولي إذا كان للبرنامج الأولي حل الأمثل لا نهائي فإن ثنائية تكون متناقصة لا يمكن حلها.

$$MAX\ (Z) = 5x_1 + 10x_2 + 7x_3 \qquad MIN\ (W) = 3y_1 + 2y_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 + 2y_2 \geq 5 \\ 2y_1 + y_2 \geq 10 \\ y_1 + y_2 \geq 7 \end{cases}$$

$$MIN\ (Z) = \mathbf{2x_1 + x_2 + 3x_3} \qquad MAX\ (W) = 2y_1 + 6y_2 + 4y_3$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \geq 2 \\ 2x_1 - x_2 \leq 6 \\ -x_2 + 3x_3 = 4 \\ x_1 \geq 0\ , x_2 \leq 0, x_3\ \vartheta\vartheta \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 + 2y_2 \leq 2 \\ y_1 - y_2 - y_3 \geq 1 \\ y_1 + 3y_3 = 3 \\ y_1 \geq 0\ , y_2 \leq 0, y_3 \vartheta\vartheta \end{cases}$$

$$Max\ W = 4y_1 + 3y_2 \qquad MinZ = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + +2x_4 + 3x_5$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \leq 2 \\ y_1 - 2y_2 \leq 3 \\ 2y_1 + 2y_2 \leq 5 \\ y_1 + y_2 \leq 2 \\ 3y_1 + y_2 \leq 3 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 \geq 4 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 \geq 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4\ , x_5 \geq 0 \end{cases}$$

المقارنة بين الحلول المثلى (البرنامج أولى – البرنامج الثنائي)

- القيم المقابلة لمتغيرات الفجوة والتي تظهر في السطر الأخير تساوي القيم الرئيسية على وجه الترتيب للبرنامج الثنائي لكن بالقيمة المطلقة.
- قيم متغيرات الفجوة في البرنامج الثنائي التي تظهر في السطر الأخير تساوي على وجه الترتيب قيم المتغيرات الرئيسية في البرنامج الأولي.
- قيم عمود الثوابت في البرنامج الأولي تساوي القيم المقابلة في سطر دالة الهدف في جدول الحل المثل للبرنامج الثنائي، والعكس لكن بالقيمة المطلقة.
- إذا كان للبرنامج الأولي حل أمثل فإن قيمة دالة الهدف في البرنامجين متساوية.

- ثنائية البرنامج الثنائي هي البرنامج الأولي.
- إذا كان حل البرنامج الأولي لا نهائي فإن ثنائيته تكون متناقضة لا يمكن حلها.
- إذا كان البرنامج الأولي يعبر عن تحديد الكمية الواجب إنتاجها قصد تعظيم الربح فالشكل النظير (المرافق) يمثل قيمة أو سعر الوحدة الواحدة من كل مورد قصد التقليل من التكلفة الكلية ومن هنا جاءت تسمية أسعار الظل التي تطلق على الأشكال المرافقة:

مثال:

$$MIN\ (Z) = 3x_1 + 10x_2$$

البرنامج الأولي:

$$\text{SLC} \begin{cases} 5x_1 + x_2 \geq 10 \\ -2x_1 + 7x_2 \geq 14 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

جدول الحل الأمثل للبرنامج الأولي:

	x_1	x_2	s_1	s_2	Bi
x_1	1	0	-7/37	1/37	56/37
x_2	0	1	-2/37	-35/259	90/37
Zj-cj	0	0	-41/37	-47/37	1068/37

البرنامج الثنائي:

$$MAX\ (Z) = 10y_1 + 14y_2$$

$$\begin{cases} 5y_1 - 2y_2 \leq 3 \\ y_2 \leq 10 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

استنتاج جدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي:

	y_1	y_2	y_3^e	y_5^e	Bi
y_1	1	0	7/37	2/37	41/37
y_2	0	1	1/37	35/259	47/37
Z	0	0	+56/37	90/37	+1068/37

خطوات استنتاج جدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي من جدول الحل الأمثل للبرنامج الأولي:

عمود Bi للبرنامج الأولى ← سطر(Z) في البرنامج الثنائي مع إضافة (−).

سطر Z للبرنامج الأولى ← عمود Bi في البرنامج الثنائي دون إضافة أي إشارة.

سطر القيد للبرنامج الأولى ← عمود مع قلب الإشارة.

Z تبقى نفسها في كلا الجدولين.

مثال:

$$MAX(Z) = 2x_1 + 9x_2 + x_3$$

$$\text{S/C} \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 7x_3 \leq 10 \\ x_1 + 3x_3 \leq 7 \\ x_1 + 7x_2 + 7x_3 \leq 25 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

جدول الحل الأمثل للبرنامج الأولي:

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	Bi
x_1	1	0	35/12	7/12	0	-1/6	5/3
s_2	0	0	1/12	-7/12	1	1/6	16/3

x_2	0	1	7/12	-1/12	0	1/6	10/3
Z	0	0	121/12	5/12	0	7/6	100/3

البرنامج الثنائي: $MIN(W) = 10y_1 + 7y_2 + 25y_3$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + y_3 \geq 2 \\ 2y_1 + 7y_3 \geq 9 \\ 7y_1 + 3y_2 + 7x_3 \geq 1 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

جدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي:

	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	Bi
x_1	1	7/12	0	-7/12	1/12	0	5/12
s_3	0	-1/12	0	-35/12	-7/12	1	121/12
x_3	0	-1/6	1	1/6	-1/6	1	7/6
Z	0	-16/3	0	-5/3	-10/3	0	100/3

تمارين:

أمثلة إضافية:أكتب البرنامج المرافق للبرامج التالية

$$\text{MAX (Z)} = x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 - 2x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{MAX (Z)} = 3x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 9 \\ x_1 + 2x_2 \leq 100 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{MAX (Z)} = 8x_1 + 9x_2$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 \leq 18 \\ 7x_1 + 4x_2 \leq 28 \\ 8x_1 + 9x_2 \leq 36 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{MAX (Z)} = 7x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_1 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{MAX (Z)} = 3x_1 + 4x_2$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \leq 200 \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 150 \\ 5x_1 + 4x_2 \geq 100 \\ 8x_1 + 4x_2 \geq 80 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{MAX (Z)} = x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 20 \\ 2x_1 + x_2 \leq 30 \\ x_1 \leq 25 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{MIN (Z)} = 6x_1 + 5x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 5 \\ 3x_1 + 4x_2 \geq 9 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{MAX (Z)} = x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} ¾x_1 + x_2 \geq 3 \\ x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 \leq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{MIN (Z)} = 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 = 3 \\ 4x_1 + 5x_2 \geq 10 \\ x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{MIN (Z)} = 10x_1 + 30x_2$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ 6x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_2 \geq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$