Chapitre 1

CONCEPTS DE BASE

On fait appel aux probabilités pour décrire une expérience dont le résultat est impossible à prévoir avec certitude, mais dont on connait quand-même l'ensemble des résultats possibles (ce qui n'est pas le cas, par exemple, pour deviner le rêve d'un inconnu).

Expérience 1 : On jette un dé et on lit le numéro apparu sur la face supérieure.
Expérience 2 : On jette deux fois un dé et on note les numéros obtenus.

La notion de résultat d'une expérience n'est pas claire : c'est l'expérimentateur qui décide de ce qui mérite le nom de résultat en fonction de ses propres motivations.

Exemple 1 : Lors de l'expérience 1, on peut s'intéresser au numéro de la face supérieure –il y a alors 6 résultats possibles–, ou seulement à la parité de cette face –il y a alors 2 résultats possibles– (si, par exemple, pour débuter un match de foot, l'arbitre n'a pas de pièce mais un dé...)
Exemple 2 : Lors de la naissance d'un bébé, on peut s'intéresser au sexe de l'enfant (garçon ou fille!), ou bien à la couleur de ses yeux, ou encore à son poids, ou à sa taille.

Il est donc très important de définir avec précision les motivations de l'expérience et, par suite, ce que l'on entend par résultat.

Ce chapitre a pour but d'introduire les premières notions de probabilités et de se familiariser avec les outils qui seront utilisés tout au long du cours.

1.1 INTRODUCTION DE LA NOTION D'ÉVÉNEMENT.

Si, lorsqu'on répète l'expérience dans des conditions identiques, le résultat observé est susceptible de changer, l'expérience est dite **aléatoire**.

L'ensemble de tous les résultats possibles ou **états** est appelé **univers** de l'expérience : on le notera Ω.

Expérience 1 : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $\text{card}\Omega = 6$.
Expérience 2 : $\Omega = \{(1, 1), \cdots, (1, 6), (2, 1), \cdots, (2, 6), \cdots (6, 1), \cdots, (6, 6)\}$; $\text{card}\Omega = 36$.

L'ensemble Ω peut être :
• fini (ensemble des 6 faces d'un dé, des 32 cartes d'un jeu,...) ;
• infini dénombrable (ensemble des entiers naturels, ou d'états que l'on peut numéroter) ;

• infini non dénombrable (position d'une particule dans un liquide, poids, taille,...).

Exemple : On lance une fléchette en direction d'une cible. On peut convenir d'appeler résultat :
→ le gain correspondant à la zone du point d'impact : $\Omega = \{0, 100, 200, 500, 1000\}$;
→ la distance du point d'impact au centre de la cible, mesurée à 1cm près par défaut : $\Omega = \mathbb{N}$;
→ le point d'impact : Ω partie de $\mathbb{R}^2$ correspondant au mur.

Lorsqu'on effectue une expérience aléatoire, certains faits liés à cette expérience peuvent se produire ou non : on les appelle **événements**.

Exemples d'événements :
Pour l'expérience 1, A_1 "le numéro obtenu est pair" ; A_2 "le numéro obtenu est ≥ 4"
Pour l'expérience 2, B "la somme des numéros obtenus est 6".

Chaque résultat possible est appelé **événement simple**.
Les événements susceptibles d'intéresser ne sont pas seulement les événements simples.
Exemple : L'événement "le poids du bébé est compris entre 3 kg et 3,2 kg" est plus intéressant que l'événement simple "le poids du bébé est 3,124 kg". De même, pour les boxeurs, la catégorie est plus importante que le poids précis.

Un événement est lié à une expérience associée à Ω si, pour tout résultat $\omega \in \Omega$, on sait dire si cet événement a lieu ou non. On convient d'identifier un tel événement à l'ensemble des $\omega \in \Omega$ pour lequel il a lieu. Un événement sera donc identifié à une partie de Ω.

Exemple :
Pour l'expérience 1, A_1 est réalisé si et seulement si $\omega \in \{2, 4, 6\}$. On notera $A_1 = \{2, 4, 6\}$.
Pour l'expérience 2, B est réalisé si et seulement si (ω_1, ω_2) vérifie $\omega_1 + \omega_2 = 6$.
On notera $B = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$.

Plus généralement, à chaque expérience, on peut associer un ensemble Ω tel que chaque événement puisse être représenté par une partie de Ω.

Rappel sur le vocabulaire ensembliste :

1- Soit A une partie de Ω.
On note $\overline{A}$ le **complémentaire** de A : c'est l'ensemble de tous les états qui ne sont pas dans A.

Propriété 1.1: $\overline{\overline{A}} = A$.

2- Soient A et B deux parties de Ω.
On note $A \cap B$ **l'intersection** de A et de B : c'est l'ensemble des états qui sont à la fois dans A et dans B.
On note $A \cup B$ **la réunion** de A et de B : c'est l'ensemble des états qui sont dans A ou

dans B (ils peuvent être dans les deux).
On note $A \subset B$ et on dit que A est **inclus** dans B si tous les états de A sont dans B.

Propriétés 1.2 :
1) $\cap$ et $\cup$ sont commutatives et associatives.
2) Si $A \subset B$, alors $A \cap B = A$, $A \cup B = B$ et $\overline{B} \subset \overline{A}$.

3- Si $A_1, \cdots, A_n, \cdots$ sont une infinité dénombrable de parties de Ω, on note $\bigcup\limits_n A_n$ (ou, de façon plus précise, $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n$ la **réunion dénombrable** des A_n : c'est l'ensemble des états qui sont au moins dans l'un des A_n et on note $\bigcap\limits_n A_n$ l'**intersection dénombrable** des A_n : c'est l'ensemble des états qui sont dans tous les A_n à la fois.

Propriétés 1.3 :
1) $\overline{\bigcup\limits_n A_n} = \bigcap\limits_n \overline{A_n}$; $\overline{\bigcap\limits_n A_n} = \bigcup\limits_n \overline{A_n}$.
2) $A \cap \left(\bigcup\limits_n A_n\right) = \bigcup\limits_n (A \cap A_n)$: distributivité de l'intersection par rapport à la réunion ;
$A \cup \left(\bigcap\limits_n A_n\right) = \bigcap\limits_n (A \cup A_n)$: distributivité de la réunion par rapport à l'intersection.

On appelle $\emptyset$ l'**événement impossible** car il n'est jamais réalisé et Ω l'**événement certain** car il est toujours réalisé.
Si $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont **incompatibles** car ils ne peuvent avoir lieu en même temps.

Tribu :

Définition 1.1 : On appelle **tribu** $\mathcal{A}$ sur Ω, tout sous-ensemble de parties de Ω tel que :
i) $\Omega \in \mathcal{A}$;
ii) si $A \in \mathcal{A}$, alors $\overline{A} \in \mathcal{A}$;
iii) si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \in \mathcal{A}$, alors $\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Propriétés 1.4 :
1) $\emptyset \in \mathcal{A}$;
2) si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \in \mathcal{A}$, alors $\bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Le couple $(\Omega, \mathcal{A})$ est appelé **espace probabilisable**.

Exemples de tribus :
- $\{\emptyset, \Omega\}$: la plus petite ;
- $\mathcal{P}(\Omega)$: la plus grande ;
- $\{\emptyset, \Omega, A, \overline{A}\}$.

Cas particulier très important : lorsque Ω est fini ou infini dénombrable, on prend toujours $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. (Ce ne sera pas le cas lorsque $\Omega = \mathbb{R}$, comme on le verra en 13MAS23 : la tribu considérée dans ce cas sera en général la tribu des boréliens $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ qui est la plus petite tribu contenant les intervalles réels).

Système complet d'événements :

On appelle **système complet d'événements** de Ω, toute famille finie ou dénombrable $(A_i)_{i\in I}$ telle que:
i) $A_i \in \mathcal{A}$ pour tout $i \in I$;
ii) $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = \Omega$;
iii) si $i \neq j$, alors $A_i \cap A_j = \emptyset$.
(On dit aussi que les A_i forment une partition dénombrable de Ω).

Exemples :
- $(A, \overline{A})$ si $A \in \mathcal{A}$;
- $(\{\omega_i\})_{i\in\mathbb{N}}$ si $\Omega = \{\omega_i \; ; \; i \in \mathbb{N}\}$ et $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$;
- $([n, n+1[)_{n\in\mathbb{Z}}$ si $\Omega = \mathbb{R}$ et $\mathcal{A} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

1.2 INTRODUCTION DE LA NOTION DE PROBABILITÉ

Une probabilité P est une mesure qui permet d'évaluer les chances de réalisation des événements. Si $\mathcal{A}$ est une tribu sur Ω, à chaque événement A de $\mathcal{A}$, on associe un réel $P(A)$ compris entre 0 et 1, appelé probabilité de l'événement A.

Approche fréquentielle de la notion de probabilité :

Tous les événements liés à une même expérience n'ont pas la même "chance" d'être réalisés. Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ l'espace probabilisable associé à l'expérience et soit $A \in \mathcal{A}$. Si on répète N fois l'expérience dans des conditions identiques et si A est réalisé N_A fois, le nombre $\frac{N_A}{N}$ est appelé fréquence de réalisation de A sur ces N coups.

En général, la fréquence de réalisation de A tend à se stabiliser lorsque $N \to +\infty$ et lorsque N est grand, $\frac{N_A}{N}$ est la valeur approchée de la mesure d'une grandeur associée à A : sa probabilité.

Remarques :
- $\frac{N_A}{N} \in [0, 1]$;
- Si A et B sont incompatibles, $\frac{N_{A\cup B}}{N} = \frac{N_A}{N} + \frac{N_B}{N}$.

Définition 1.2 : Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. On appelle **probabilité** sur $(\Omega, \mathcal{A})$ toute application P de $\mathcal{A}$ vers $[0, 1]$ telle que :
i) $P(\Omega) = 1$;
ii) pour toute suite d'événements $A_n \in \mathcal{A}$, incompatibles deux à deux, on a :

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) \left(= \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} P(A_n)\right).$$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est appelé **espace probabilisé**.

Propriétés 1.5 :
1) Si $A \subset B$, alors $P(A) \leq P(B)$;
2) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$; $P(\emptyset) = 0$;
3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;
4) $P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \left(\sum\limits_{1 \leq i_1 \cdots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) \right)$;
5) si $(A_n)_n$ est une suite croissante de $\mathcal{A}$ ($A_n \subset A_{n+1}$), alors $P\left(\bigcup\limits_{n} A_n\right) = \lim\limits_{n \to +\infty} P(A_n)$;
6) si $(B_n)_n$ est une suite décroissante de $\mathcal{A}$ ($B_{n+1} \subset B_n$), alors $P\left(\bigcap\limits_{n} B_n\right) = \lim\limits_{n \to +\infty} P(B_n)$.

Preuve :
1) $B = (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A}) = A \cup (B \cap \overline{A})$ et $A \cap (B \cap \overline{A}) = \emptyset$ donc $P(B) = P(A) + P(B \cap \overline{A}) \geq P(A)$.

2) $P(\Omega) = P(A) + P(\overline{A})$ car $A \cup \overline{A} = \Omega$ et $A \cap \overline{A} = \emptyset$. Or $P(\Omega) = 1$ donc $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ et, en particulier pour $A = \Omega$, $P(\emptyset) = 0$.

3) On décompose $A \cup B$ en 3 événements incompatibles 2 à 2 :

$$A \cup B = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B).$$

De même, $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$ et $B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$.
En passant aux probabilités, on obtient :

$$P(A \cup B) = P(A \cap \overline{B}) + P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B),$$

avec $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$ et $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$. On a donc bien :

$$P(A \cup B) = (P(A) - P(A \cap B)) + P(A \cap B) + (P(B) - P(A \cap B)) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

4) Propriété démontrée en 13MAS23 à partir de 3), par récurrence sur n (on suppose la propriété vraie au rang n et on applique 3) à $A = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ et à $B = A_{n+1}$...)

5) Posons $C_0 = A_0$ et pour $n \geq 1$, $C_n = A_n \cap \overline{A}_{n-1}$ (on a alors $A_n = A_{n-1} \cup C_n$). On décompose la preuve en plusieurs étapes :
$\rightarrow$ Les C_i sont 2 à 2 disjoints
En effet, si, par exemple, $i > j$, supposons qu'il existe $\omega \in C_i \cap C_j$. On a alors $\omega \in C_i = A_i \cap \overline{A}_{i-1} \subset \overline{A}_{i-1}$ et $\omega \in C_j \subset A_j \subset A_{i-1}$ car $j \leq i - 1$, ce qui est contradictoire.

$\rightarrow$ $A_N = \bigcup\limits_{n=0}^{N} C_n$: démonstration par récurrence sur N ;

C'est vrai pour $N = 0$ et si $A_N = \bigcup\limits_{n=0}^{N} C_n$, alors

$$\bigcup_{n=0}^{N+1} C_n = A_N \cup C_{N+1} = A_N \cup (A_{N+1} \cap \overline{A}_N) = A_{N+1}.$$

$\rightarrow$ $\underline{\bigcup\limits_n A_n = \bigcup\limits_n C_n}$: en effet, d'abord $C_n \subset A_n$ donc $\bigcup\limits_n C_n \subset \bigcup\limits_n A_n$; d'autre part $A_N = \bigcup\limits_{n=0}^{N} C_n \subset \bigcup\limits_{n\geq 0} C_n$ pour tout $N \geq 0$ donc $\bigcup\limits_{N\geq 0} A_N \subset \bigcup\limits_{n\geq 0} C_n$.

$\rightarrow$ <u>On en déduit</u> $P\left(\bigcup\limits_n A_n\right) = P\left(\bigcup\limits_n C_n\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} P(C_n)$ car les C_n sont 2 à 2 disjoints. Or, par définition d'une série, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} P(C_n) = \lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{n=0}^{N} P(C_n)$ et comme

$$P(A_N) = P\left(\bigcup_{n=0}^{N} C_n\right) = \sum_{n=0}^{N} P(C_n),$$

on a bien $P\left(\bigcup\limits_{n\geq 0} A_n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(A_n)$.

6) Si (B_n) est décroissante $(B_{n+1} \subset B_n)$ et si $A_n = \overline{B}_n$, alors (A_n) est croissante et, d'après 5), on a $P\left(\bigcup\limits_{n\geq 0} \overline{B}_n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(\overline{B}_n) = 1 - \lim\limits_{n\to+\infty} P(B_n)$. Or

$$P\left(\bigcup_{n\geq 0} \overline{B}_n\right) = 1 - P\left(\overline{\bigcup_{n\geq 0} \overline{B}_n}\right) = 1 - P\left(\bigcap_{n\geq 0} B_n\right).$$

Donc $P\left(\bigcap\limits_{n\geq 0} B_n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(B_n)$. □

<u>**Cas particuliers très importants :**</u>

1- Ω fini : $\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$ et $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.
Soient $p_1, \cdots, p_n$, n nombres réels. Il existe une probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{A})$ telle que, pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, $P(\{\omega_i\}) = p_i$ si et seulement si, pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, $p_i \geq 0$ et $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$.
La probabilité P est alors unique et, pour tout $A \in \mathcal{A}$, $P(A) = \sum\limits_{i;\omega_i\in A} p_i$.

Définition 1.3 : On dit qu'il y a **équiprobabilité** lorsque les probabilités de tous les événements simples sont égales.

Théorème 1.1 : S'il y a équiprobabilité, alors, pour tout événement A, on a $P(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega}$.

Preuve : Supposons que $\text{card}\Omega = n$. Il existe λ tel que $p_i = \lambda$ pour tout i. On a alors $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = n\lambda = 1$, d'où $\lambda = \frac{1}{n}$ et, pour tout $A \in \mathcal{A}$, $P(A) = \sum\limits_{i;\omega_i\in A} p_i = (\text{card}A) \times \lambda = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega}$.□

<u>*Exemples de calculs de probabilités dans le cas où Ω est fini.*</u>
<u>*Exemple 1*</u> : On lance un dé non truqué et on considère les événements A "le résultat est pair" et B "le résultat est multiple de 3".

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ et, pour $1 \leq i \leq 6$, $P(\{i\}) = \frac{1}{6}$ (le dé étant non truqué, il y a équiprobabilité).

$$A = \{2, 4, 6\}\ ;\ B = \{3, 6\}\ ;\ A \cap B = \{6\}\ ;\ A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}.$$

$P(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ et de même $P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$; $P(A \cup B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.
On peut vérifier que l'on a bien $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Exemple 2 : Dans une salle qui contient 4 rangs de 10 personnes, on place une personne au hasard. Quelle chance a-t-elle d'être au premier rang ? (1/4). Au premier rang, à la première place ? (1/40).

Exemple 3 : Quelle est la probabilité, en tapant successivement 3 lettres de l'alphabet au hasard, d'écrire le mot "TFC" ? ($1/26^3$).

2- Ω infini dénombrable : $\Omega = \{\omega_i \,;\, i \in \mathbb{N}\}$ et $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Il existe une probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{A})$ telle que, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $P(\{\omega_i\}) = p_i$ si et seulement si, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $p_i \geq 0$ et $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} p_i = 1$.
La probabilité P est alors unique et, pour tout $A \in \mathcal{P}$, $P(A) = \sum\limits_{i;\omega_i \in A} p_i$.

Remarque : On ne peut pas avoir équiprobabilité dans le cas infini dénombrable car, pour qu'une série converge, il est nécessaire que son terme général tende vers 0 et si $p_i = \lambda$ pour tout i, on doit avoir $\lambda = 0$; mais alors $\sum\limits_i p_i = 0 \neq 1$.

1.3 ÉVÉNEMENTS INDÉPENDANTS

Approche intuitive : 2 événements sont indépendants si la réalisation de l'un est sans effet sur la réalisation de l'autre. En termes de probabilités, on a la définition suivante :

Définition 1.4 : Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
1) Deux événements A et B de $\mathcal{A}$ sont **indépendants** si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
2) Une famille d'événements $(A_n)_n$ est dite **famille d'événements indépendants** si, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $\{i_1, \cdots, i_p\} \subset \mathbb{N}$,

$$P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_p}) = P(A_{i_1}) \times \cdots \times P(A_{i_p}). \qquad (*)$$

Mises en garde :
1- Ne pas confondre événements incompatibles ($A \cap B = \emptyset$) et événements indépendants ($P(A \cap B) = P(A)P(B)$).

2- L'indépendance dépend de la probabilité considérée.
Exemple : Soit P_1 la probabilité définie sur $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ par :

$$P_1(\{1\}) = P_1(\{2\}) = \frac{1}{6} \;;\; P_1(\{3\}) = \frac{1}{3} \;;\; P_1(\{4\}) = P_1(\{5\}) = P_1(\{6\}) = \frac{1}{9}$$

et soit P_2 l'équiprobabilité sur Ω. Soient $A = \{1, 2\}$ et $B = \{2, 3\}$.
On a $P_1(A) = \frac{2}{6}$; $P_1(B) = \frac{1}{2}$; $P_1(A \cap B) = \frac{1}{6}$ donc $P_1(A)P_1(B) = P_1(A \cap B)$.
D'autre part, $P_2(A) = P_2(B) = \frac{1}{3}$; $P_2(A \cap B) = \frac{1}{6}$; $P_2(A \cap B) = \frac{1}{6}$ donc $P_2(A)P_2(B) = \frac{1}{9} \neq P_2(A \cap B)$.

Les événements A et B sont indépendants pour P_1 mais pas pour P_2.

3- Il faut vérifier $(*)$ pour toutes les sous-familles : en particulier, l'indépendance 2 à 2 d'événements n'implique pas leur indépendance.

Exemple 1 : Soit $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et P l'équiprobabilité sur Ω.
Soient $A = \{1, 2, 3\}$; $B = \{2, 4, 6\}$ et $C = \{1, 2, 4, 5\}$.
On a $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$; $P(C) = \frac{2}{3}$; $P(A \cap B) = P(A \cap B \cap C) = P(\{2\}) = \frac{1}{6}$.
On a bien $P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{6} = P(A \cap B \cap C)$ mais $P(A)P(B) = \frac{1}{4} \neq P(A \cap B)$ et les événements A, B et C ne sont donc pas indépendants.

Exemple 2 : On jette deux fois un dé et on considère les événements A"le premier lancer est pair", B"le deuxième lancer est pair" et C"la somme des 2 lancers est paire".
On a $P(A) = P(B) = \frac{3\times 6}{36} = \frac{1}{2}$ et comme $A \cap B = A \cap C = B \cap C = A \cap B \cap C$, on a de plus $P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = P(A \cap B \cap C) = \frac{3\times 3}{36} = \frac{1}{4}$. De plus, $P(C) = \frac{9+9}{36} = \frac{1}{2}$.
On a $P(A \cap B) = P(A)P(B)$; $P(A \cap C) = P(A)P(C)$; $P(B \cap C) = P(B)P(C)$ mais A, B et C ne sont pas indépendants car $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \neq P(A)P(B)P(C)$.

Le concept d'indépendance est donc très délicat : ainsi, il sera parfois difficile de deviner ou de pressentir l'indépendance, qui devra donc être vérifiée par le calcul.

Théorème 1.2 : Si (A, B) est un couple d'événements indépendants, il en est de même des couples $(\overline{A}, B)$, $(A, \overline{B})$ et $(\overline{A}, \overline{B})$.

Preuve :

$$P(\overline{A})P(B) - P(\overline{A} \cap B) = (1 - P(A))P(B) - (P(B) - P(A \cap B)) = P(A \cap B) - P(A)P(B)$$

donc, si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, alors $P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A})P(B)$.
Comme A et B jouent des rôles symétriques, on a le même résultat pour $(A, \overline{B})$, puis, en remplaçant B par $\overline{B}$, pour $(\overline{A}, \overline{B})$. □

Plus généralement,

Théorème 1.3 : Si $(A_n)_n$ est une famille d'événements indépendants, il en est de même de $(A'_n)_n$, avec $A'_n = A_n$ ou bien $A'_n = \overline{A_n}$.

Preuve : Voir 13MAS23.

La notion d'indépendance sera reprise au Chapitre 4, à propos des probabilités conditionnelles.

Chapitre 2

RAPPELS D'ANALYSE COMBINATOIRE

Lorsque l'univers Ω d'une expérience est fini, on utilise l'équiprobabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ chaque fois qu'aucun événement simple n'a de privilège sur les autres.

Dans ce cas, le calcul des probabilités se ramène donc au calcul du nombre d'éléments de Ω et de ses sous-ensembles.

L'analyse combinatoire est précisément l'ensemble des méthodes permettant de compter les éléments d'un ensemble.

Définition 2.1 : L'ensemble des p-uplets $(y_1, \cdots, y_p)$ où $y_i \in N_i$ pour tout $i \in \{1, \cdots, p\}$ est appelé **produit cartésien** des N_i. Il est noté $N_1 \times \cdots \times N_p$, ou bien $\prod_{i=1}^{p} N_i$.
Si $N_1 = \cdots = N_p = N$, alors $\prod_{i=1}^{p} N_i$ est noté N^p.

Propriété 2.1 : $\text{card}(N_1 \times \cdots \times N_p) = \text{card}N_1 \times \cdots \times \text{card}N_p$ et $\text{card}(N^p) = (\text{card}N)^p$.

On notera $A_p, B_p, \cdots$ des ensembles de cardinal p.

2.1 TIRAGES ORDONNÉS AVEC REMISE (ou applications).

On note $\mathcal{F}(E_p, F_n)$ l'ensemble des applications de E_p vers F_n.

Théorème 2.1 : $\text{card}\mathcal{F}(E_p, F_n) = n^p$.

Preuve : Soit $E_p = \{e_1, \cdots, e_p\}$. À tout e_i de E_p, on associe, de façon unique $f(e_i)$ dans F_n. La donnée de f équivaut à celle du p-uplet $(f(e_1), \cdots, f(e_p))$ de $(F_n)^p$ et, d'après la propriété 2.1, $\text{card}\mathcal{F}(E_p, F_n) = (\text{card}F_n)^p = n^p$. $\square$

Exemple 2.1 : Combien de "mots" (ayant un sens ou pas) de 5 lettres peut-on former ?

On prend 26 boules gravées de A à Z que l'on place dans une urne. On fait 5 tirages **successifs** (on veut un mot donc l'ordre des lettres a de l'importance), **avec remise** de la boule après chaque tirage (une lettre peut figurer plusieurs fois dans un mot).

L'ensemble des résultats possibles est l'ensemble des 5-uplets $(u_1, \cdots, u_5)$ avec $u_i \in \{A, \cdots, Z\}$. On a alors $\text{card}\Omega = 26^5$.

2.2 TIRAGES ORDONNÉS SANS REMISE (ou injections).

On note $\mathcal{I}(E_p, F_n)$ l'ensemble des injections de E_p vers F_n, lorsque $n \geq p$.

Théorème 2.2 : $\mathrm{card}\mathcal{I}(E_p, F_n) = n(n-1)\cdots(n-(p-1))$.

Preuve : Il est nécessaire que $n \geq p$ car chaque élément de E_p doit avoir une image distincte.

La donnée de j dans $\mathcal{I}(E_p, F_n)$ équivaut à celle du p-uplet $(j(e_1), \cdots, j(e_p))$ formé de p éléments **distincts** de F_n : il y a n choix possibles pour $j(e_1)$; le choix de $j(e_1)$ étant fait, il ne reste plus que $n-1$ choix possibles pour $j(e_2), \cdots$, et, pour $j(e_p)$, il ne reste plus que $n-(p-1)$ choix ($p-1$ éléments de F_n ayant déjà été utilisés).

Ainsi, on a bien $\mathrm{card}\mathcal{I}(E_p, F_n) = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-(p-1))$. □

Exemple 2.2 : Combien de mots de 5 lettres peut-on former sans utiliser 2 fois la même lettre ?

On reprend les boules de l'exemple 2.1 : on fait 5 tirages **successifs** (il s'agit toujours d'un mot, donc l'ordre a toujours de l'importance) mais **on ne remet pas** les boules déjà tirées dans l'urne (afin de ne pas retomber sur la même lettre).

On a alors $\mathrm{card}\Omega = 26 \times 25 \times 24 \times 23 \times 22$.

Remarque : Si $n = p$, les injections sont en fait des bijections et on a alors :

$$\mathrm{card}\mathcal{I}(E_n, F_n) = n(n-1) \times \cdots \times 2 \times 1 = n!$$

Dans le cas général, $(n \geq p)$, $\mathrm{card}\mathcal{I}(E_p, F_n) = \frac{n!}{(n-p)!}$ que l'on note A_n^p.

2.3 TIRAGES NON ORDONNÉS SANS REMISE (ou combinaisons).

Définition 2.2 : Si $n \geq p$, on appelle **coefficient binomial** C_n^p (ou parfois $\binom{n}{p}$), le nombre $\frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Propriétés 2.2 :
1) $C_n^p = C_n^{n-p}$;
2) $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$ (formule de Pascal)

Preuve :
1) $C_n^{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = C_n^p$.

2) $C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1} = \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} + \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} = \frac{(n-1)!}{p!(n-p)!}(n-p+p) = \frac{n!}{p!(n-p)!} = C_n^p$.

On peut aussi faire une justification directe des propriétés 2.2 :
1) Évident : il revient au même de choisir p éléments parmi n que d'en éliminer $n-p$.

2) Parmi les n éléments, on en considère un en particulier, que l'on note a. Si Ω désigne l'ensemble des choix de p objets, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, où Ω_1 désigne l'ensemble des choix de p objets dont a fait partie, et Ω_2 désigne l'ensemble des choix de p objets sans a.

$\mathrm{card}\Omega_1 = C_{n-1}^{p-1}$ (il ne faut choisir que $p-1$ éléments parmi $n-1$, puisqu'on a déjà a).
$\mathrm{card}\Omega_2 = C_{n-1}^p$ (il faut choisir p objets parmi les $n-1$ autres que a).

Comme card$\Omega = C_n^p$ et comme card$\Omega = $ card$\Omega_1 + $ cardΩ_2 (car Ω_1 et Ω_2 sont disjoints), on a bien le résultat. □

Définition 2.3 : Une p-**combinaison** de F_n est une partie de F_n à p éléments.

Théorème 2.3 : Le nombre de p-combinaisons de F_n est C_n^p.

Preuve : À toute injection j de $\mathcal{I}(E_p, F_n)$, on associe la partie $\{j(e_1), \cdots, j(e_p)\}$.

Il y a $p!$ injections qui donnent la même partie $\{j(e_1), \cdots, j(e_p)\}$ (autant de façons que de classer les $j(e_i)$ pour $1 \leq i \leq p$).

On utilise alors le "**principe des bergers**" : pour compter les moutons de son troupeau, le berger compte les pattes, et, chaque mouton ayant 4 pattes, il divise par 4. Ici, pour compter les parties, on compte les injections (rôle des pattes) et, chaque partie (rôle du mouton) donnant lieu à $p!$ injections, on divise par $p!$.

Pour $n \geq p$, le nombre de parties est donc $\frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = C_n^p$. □

Exemple 2.3 : Combien de "mains" de 5 cartes différentes existe-t-il dans un jeu de 32 ?

Il y en a C_{32}^5, qui correspond au nombre de façons de choisir 5 cartes parmi 32 (l'ordre des cartes dans la main n'a pas d'importance!)

2.4 TIRAGES NON ORDONNÉS AVEC REMISE (ou combinaisons avec répétitions).

Définition 2.4 : Une p-**combinaison avec répétition** de F_n est une liste de p éléments de F_n, les répétitions étant autorisées et l'ordre dans la liste n'intervenant pas.

Par exemple $[a, a, b, c, c, f]$ est une 6-c.a.r.

Théorème 2.4 : Le nombre de p-combinaisons avec répétitions de F_n est C_{p+n-1}^{n-1}.

Preuve : Il revient au même de considérer les applications f de $F_n = \{x_1, \cdots, x_n\}$ dans $\mathbb{N}$ vérifiant $f(x_1) + \cdots + f(x_n) = p$. En effet, à chaque élément de F_n, on associe son nombre (éventuellement nul) d'apparitions dans la p-c.a.r..

Il revient aussi au même de considérer toutes les répartitions possibles de p boules identiques dans n tiroirs $x_1, \cdots, x_n$. En effet, à chaque tiroir, on associe le nombre de boules qu'il contient. On va utiliser cette dernière modélisation pour démontrer le théorème, mais on va procéder à l'envers, c'est-à-dire aligner d'abord les p boules et placer ensuite les $n-1$ cloisons des tiroirs.

Pour placer la première cloison, on a $p+1$ choix possibles car les p boules délimitent $p+1$ espaces libres. Une fois placée la première cloison, on a $p+2$ choix pour la deuxième car la première cloison a partagé un espace libre en 2, $\cdots$ Ainsi, pour placer la $(n-1)$-ième et dernière cloison, on a $p+n-1$ choix.

On a donc $(p+1) \times \cdots \times (p+n-1)$ façons de placer les cloisons. Mais les $n-1$ cloisons étant identiques, l'ordre de placement n'intervient pas et une même configuration peut être obtenue de $(n-1)!$ façons différentes.

D'après le principe des bergers, le nombre de configurations est donc :

$$\frac{(p+1)\times\cdots\times(p+n-1)}{(n-1)!}=\frac{(p+n-1)!}{p!(n-1)!}=C^p_{n+p-1}=C^{n-1}_{p+n-1}. \qquad \square$$

Exemple 2.4 : Au jeu des "chiffres et des lettres", combien y-a-t-il de tirages possibles ?

Il s'agit de 9-c.a.r. de 26 éléments donc ce nombre de choix est $C^9_{26+9-1}=C^9_{34}$.

2.5 PARTAGES D'ENSEMBLES.

Problème : Etant donné p entiers positifs ou nuls, $n_1,\cdots,n_p$, vérifiant $n_1+\cdots+n_p=n$, on cherche le nombre de partages de F_n en p parties $A_1,\cdots,A_p$ telles que card$A_i=n_i$.

Théorème 2.5 : Le nombre de partages de F_n en p parties $A_1,\cdots,A_p$ telles que card$A_i=n_i$ est $\frac{n!}{n_1!\cdots n_p!}$.

Preuve : On commence par choisir les éléments de A_1 : il faut en choisir n_1 parmi n, soit $C^{n_1}_n$ choix. Puis, on choisit, parmi les $n-n_1$ qui restent, les n_2 éléments de A_2, soit $C^{n_2}_{n-n_1}$ choix...

Une fois choisis les éléments de $A_1,\cdots,A_{p-1}$, il ne reste plus que $C^{n_p}_{n-n_1-\cdots-n_{p-1}}=C^{n_p}_{n_p}=1$ choix pour ceux de A_p (tous ceux qui restent).

Le nombre de partages est donc :

$$\begin{aligned}C^{n_1}_nC^{n_2}_{n-n_1}\cdots C^{n_p}_{n-n_1-\cdots-n_{p-1}} &= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}\frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!}\cdots\frac{(n-n_1-\cdots-n_{p-1})!}{n_p!0!}\\ &= \frac{n!}{n_1!\cdots n_p!}\end{aligned}$$

$\square$.

Exemple 2.5 : Au jeu "des chiffres et des lettres", combien y-a-t-il de tirages possibles contenant n_A fois la lettre $A,\cdots,$ n_Z fois la lettre Z, avec $n_A+\cdots+n_Z=9$?

Le nombre de choix est donc $\frac{9!}{n_A!\cdots n_Z!}$.

Remarques :

1) Un certain nombre de "n_i" sont nuls (ici au moins 17) et on a alors $n_i!=1$.

2) Il s'agit d'un tirage **avec remise** (une lettre peut apparaître plusieurs fois) et **ordonné** (on fait des mots donc l'ordre des lettres est imposé). La différence avec le 2.1 est qu'ici, la fréquence d'apparition des lettres est imposée dès le départ, alors que dans 2.1., tout est permis.