الدوال الاصلية (les fonctions primitives):

1. تعريف الدالة الاصلية لدالة على مجال
2. مجموع الدوال الاصلية لدالة
3. حساب الدوال الاصلية

1. تعريف الدالة الاصلية :

تعريف:

f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$: $f: I \to \mathbb{R}$.

نسمي دالة اصلية للدالة f على مجال I كل دالة F قابلة لاشتقاق على I مشتقتها F' هي :

$$F: I \to \mathbb{R}$$
$$F'(x) = f'(x)\ \forall x \in I$$

مثال :

الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$F: x \to \mathbb{R}$$
$$F(x) = x^3 - |x| - 3$$

هي دالة اصلية على $\mathbb{R}$ لدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$F': x \to \mathbb{R}$$
$$F'(x) = 3x^2 - x = f(x) \quad si\ x > 0$$
$$F'(x) = 3x^2 + x = f(x) \quad si\ x < 0$$

مجموعة الدوال الاصلية لدالة :

خواص :

اذا كان f دالة مستمرة على مجال I فان f تقبل دوال اصلية على المجال I.

اذا كان F دالة اصلية للدالة f على مجال I فان كل الدوال الاصلية للدالة f على المجال I تكتب من الشكل :

$$F: x \to I$$
$$F(x) + k \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

مثال :

الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$f: x \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x - 3$$

كل دالة تاخذ الشكل :

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 - 3(x) + \mathrm{k} \quad \mathrm{k} \in \mathbb{R}$$

تعبر دالة اصلية لدالة f

خاصية :

f دالة مستمرة على مجال I من $\mathbb{R}$: $f: I \to \mathbb{R}$. x_0 و α اعداد حقيقية من I

اذا تحقق الشرط : $F(x_0) = \alpha$

اذن توجد دالة اصلية وحيدة F لدالة f على المجال I

مثال :

لدينا الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالشكل :

$$f(x) = x - \sin x$$
$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

الدالة الاصلية لدالة f :

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - \cos x + k$$
$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$
$$1 = \frac{\pi^2}{8} + k$$
$$k = 1 - \frac{\pi^2}{8}$$
$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - cos\, x + 1 - \frac{\pi^2}{8}$$

حساب الدوال الاصلية :

$f(x)$	$F(x)$	I
α (عدد حقيقي)	$\alpha x + k$	$\mathbb{R}$
x	$\frac{1}{2}x^2 + k$	$\mathbb{R}$
$x^n \ (n \in \mathbb{N}^*)$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + k$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + k$	$\mathbb{R} - \{0\}$

$\frac{1}{x^n} \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$	$-\frac{1}{(n+1)x^{n-1}} + k$	$\mathbb{R} - \{0\}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + k$	$\mathbb{R}_+^*$
$\sin x$	$-\cos x + k$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x + k$	$\mathbb{R}$
$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + k$	$\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + k$	$\mathbb{R}^*$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$

المصدر : من تاليف الكاتب

2. الدوال الصلية و العمليات على الدوال :

f	Fonction primitive	Condition sur u
$u'u$	$\frac{1}{2}u^2 + k$	
$u'u^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1} + k$	
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u} + k$	$\forall x \in I \; u(x) \neq 0$
$\frac{u'}{u^n} \quad (n \in \mathbb{N} \; ; \; n \geq 2)$	$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}} + k$	$\forall x \in I \; u(x) \neq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + k$	$\forall x \in I \; u(x) > 0$
$u'e^u$	e^u	
$\frac{u'}{u}$	$\ln u$	$u \neq 0$

امثلة :

3. حساب التكامل (les intégrales):

تعريف :

f دالة مستمرة على مجال $a, b. I$ عددين حقيقيان $(a, b) \in I$

يسمى العدد الحقيقي $F(b)-F(a)$ التكامل من a الى b للدالة f و نرمز له :

$$\int_a^b f(x)dx$$

نقرء التكامل من a الى b للدالة $f(x)$ تفاضل x

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

3.1. خواص التكامل :

a. علاقة شال(relation de chasles) :

f دالة مستمرة على مجال $a, b, c. I$ اعداد حقيقية $(a, b, c) \in I$ ومنه :

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

البرهان :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx &= [F(x)]_a^b + [F(x)]_b^c\\ &= F(b) - F(a) + F(c) - F(b)\\ &= F(c) - F(a)\end{aligned}$$

$$\int_a^c f(x)dx = F(c) - F(a)$$

اذن :

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

مثال :

$$\begin{aligned}\int_{-2}^1 \sqrt{(x^2-1)^2}\, dx &= \int_{-2}^1 |x^2-1|\, dx\\ &= \int_{-2}^{-1} (x^2-1)\, dx + \int_{-1}^1 (-x^2+1)\, dx\\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_{-2}^{-1} + \left[-\frac{1}{3}x^3 + x\right]_{-1}^1\\ &= \frac{8}{3}\end{aligned}$$

خاصية :

f دالة مستمرة على مجال $a, b.\ I$ اعداد حقيقية $(a, b) \in I\ et\ a \neq b$ ومنه :

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

برهان :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) = -[F(a) - F(b)] = -\int_b^a f(x)dx$$

b. الخطية :

التطبيق : $\begin{cases} I \to R \\ f \to \int_a^b f(x)dx \end{cases}$ خطي معناه :

اذا كان الدالتين $g\ et\ f$ دالتين معرفتين على مجال I و k عدد حقيقي من اجل كل عددين حقيقين $(a\ et\ b) \in I$ لدينا :

$$\forall (f,g) \in I^2, \qquad \int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\forall f \in I, \forall k \in R, \qquad \int_a^b (k)f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

c. المقارنة :

لتكن الدالتين f, g المعرفتين على المجال I $(f,g) \in I^2$

(a,b) اعداد حقيقية بحيث : $a < b$ اذن :

$$si\ \forall x \in [a,b];\ \ 0 \le f(x), alors\ 0 \le \int_a^b f(x)dx$$

$$si\ \forall x \in [a,b];\ \ g(x) \le f(x), alors\ \int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)dx$$

d. المقارنة و القيمة المطلقة (inégalité et valeur absolue) :

$$\forall f \in I, \qquad a < b\ ;\ \left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$$

مبرهنة :

من خواص القيمة المطلقة لدينا :

$$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$$

بتطبيق خاصية المقارنة لدينا :

$$-\int_a^b |f(x)| \le \int_a^b f(x) \le \int_a^b |f(x)|$$

اذن :

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

e. بعض الخواص الاضافية :

f دالة مستمرة على مجال I . $-a, a$ اعداد حقيقية $(-a, a) \in I$ ومنه :

اذا كانت الدالة f زوجية اذن :

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$$

برهان :

لبرهنة هذه الخاصية نستعمل خاصية مشتق الدالة الفردية هي دالة زوجية

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx = 2[F(a) - F(0)]$$

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)dx &= \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx \\ &= F(0) - F(-a) + F(a) + F(0) \\ &= -F(0) + F(a) + F(a) - F(0) \\ &= 2[F(a) - F(0)]\end{aligned}$$

مثال :

اذا كانت الدالة f فردية اذن :

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

برهان :

لبرهنة هذه الخاصية نستعمل خاصية مشتق الدالة الزوجية هي دالة فردية

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)dx &= F(a) - F(-a) \\ &= F(a) - F(a) \\ &= 0\end{aligned}$$

مثال :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)\, dx = [-\cos(x)]_{-\pi}^{\pi} = -\cos\pi + \cos-\pi = 0$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^2 \sin^3 x}{\sqrt{1+x^2}} dx = 0$$

$$\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\ c'est\ une\ fonction\ paire$$

$$\sin^n x \begin{cases} si\ n = 2n & elle\ est\ paire \\ si\ n = 2n+1 & elle\ es\ impaire \end{cases}$$

3.2. القيمة المتوسطة (la valeur moyenne) :

القيمة المتوسطة لدالة على مجال :

f دالة مستمرة على مجال $[a;b]$.

القيمة المتوسطة للدالة f على مجال $[a;b]$. نرمزلها بالرمز μ هي العدد الحقيقي :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

حصر القيمة المتوسطة :

4. بعض طرق حساب التكامل :

4.1. المكاملة بالتجزئة (intégration par partie):

لتكن الدالتين $f\ et\ g$ دالتين قابلتين لاشتقاق على المجال I من ℝ بين ان :

$$\int f'(x).g(x)dx = f(x).g(x) - \int f(x).g'(x)\,dx$$

لدينا :

$$[f(x).g(x)]' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$$

بمكاملة الطرفين نجد :

$$\int [f(x).g(x)]'\,dx = \int f'(x).g(x)\,dx + \int f(x).g'(x)\,dx$$
$$f(x).g(x) = \int f'(x).g(x)\,dx + \int f(x).g'(x)\,dx$$
$$\int f'(x).g(x)\,dx = f(x).g(x) - \int f(x).g'(x)\,dx$$

مثال :

$$\int \ln(x+1)\,dx$$

نفرض ان :

$$u(x) = \ln(x+1) \qquad u'(x) = \frac{1}{x+1}$$
$$V(x) = \int dx \qquad V(x) = x$$

$$\int f(x)\,dx = u(x).V(x) - \int u'(x)V(x)dx$$

$$\begin{aligned}\int \ln(x+1)\,dx &= x\ln(x+1) - \int \frac{x}{x+1}dx\\ &= x\,ln(x+1) - \int \left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx\\ &= x\,ln(x+1) - \int dx + \int \left(\frac{1}{x+1}\right)dx\\ &= x\ln(x+1) - x + \ln(x+1) + k\end{aligned}$$

4.2.طريقة الاسهم :

هذه الطريقة تسمح لنا بحساب التكاملات لدوال من الشكل :

$$\int x^n \sin ax\,dx\ ;\ \int x^n \cos ax\,dx\ ;\ \int x^n e^{ax}\,dx\ ;\ \int e^{ax}\cos(bx)\,dx\ ;$$

$$\int e^{ax}\,cos(bx)\quad ; n \in \mathbb{N}^+ ; a,b\ \in \mathbb{R}$$

مثال :

$$\int x^2 \cos 2x\,dx$$

$(x^2)^n$		$\int \cos 2x\,dx$
x^2	+	$\cos 2x$
$2x$	-	$\frac{1}{2}\sin 2x$
2	+	$-\frac{1}{4}\cos 2x$
0		$\frac{1}{8}\sin 2x$

$$\begin{aligned}\int x^2\cos 2x\,dx &= \frac{x^2}{2}\sin 2x + \frac{x}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + k\\ &= \left(x^2+\frac{1}{2}\right)\frac{\sin 2x}{2} + \frac{x}{2}cos\ 2x + k\end{aligned}$$

حالة خاصة :

حساب تكامل الدوال الدورية (Primitives des fonctions périodiques):

اذا كانت الدالة تاخذ شكل من الاشكال التالية :

$$\int \cos\beta x . e^{\alpha x}\,dx \quad ; \int \sin \beta x\,.\,e^{\alpha x}dx$$

الدالة الاصلية تحسب بالطريقة التالية :

$$I = \int \cos\beta x . e^{\alpha x}\, dx$$

$$= \frac{1}{\alpha}\cos\beta x\,.\,e^{\alpha x} + \frac{1}{\alpha}\sin\beta x\,.\,e^{\alpha x} - \int cos\,\beta x . e^{\alpha x}\, dx$$

$$I = \frac{1}{\alpha}\cos\beta x\,.\,e^{\alpha x} + \frac{1}{\alpha}\sin\beta x\,.\,e^{\alpha x} - I$$

$$2I = \frac{1}{\alpha}cos\,\beta x\,.\,e^{\alpha x} + \frac{1}{\alpha}sin\,\beta x\,.\,e^{\alpha x}$$

$$I = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\alpha}cos\,\beta x\,.\,e^{\alpha x} + \frac{1}{\alpha}sin\,\beta x\,.\,e^{\alpha x}\right]$$

مثال :

احسب التكامل اللمعرف ب :

$$I = \int \sin x\,.\,e^{x} dx$$

$$I = \int \sin x\,.\,e^{x} dx = \sin x\,.\,e^{x} - \cos x\,.\,e^{x} - \int sin\,x\,.\,e^{x} dx$$

$$I = \int sin\,x\,.\,e^{x} dx = sin\,x\,.\,e^{x} - cos\,x\,.\,e^{x} - I$$

$$2I = sin\,x\,.\,e^{x} - cos\,x\,.\,e^{x}$$

$$I = \frac{1}{2}[sin\,x\,.\,e^{x} - cos\,x\,.\,e^{x}]$$

4.3.المكاملة بالتعويض :

مثال :

$$\int \sqrt{x-5}\, dx$$

نفرض :

$$u = x - 5 \qquad du = dx$$

$$\int \sqrt{u}\, du = \int u^{\frac{1}{2}}\, du$$

$$= \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}}$$

$$\int \sqrt{x-5}\, dx = \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} + k$$

مثال :

$$\int_1^e \frac{1}{1 + x \ln x} dx$$

نضع :

$$t = \ln x\,; \qquad dt = \frac{1}{x} dx$$

$$\ln 1 = 0$$

$$\ln e = 1$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln 2$$

مثال :

$$\int \tan x\, dx$$

لدينا :

$$\int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

نضع :

$$\cos x = t; \qquad -\sin x\, dx = dt$$

$$\int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{-1}{t} dt = -\ln t + k$$

$$\int \tan x\, dx = -\ln(\cos x) + k$$