1. الاستمرارية (la continuité):

تعريف :

f دلة مجموعة تعريفها D_f و α عدد حقيقي غير معزول من D_f :

القول ان الدالة f مستمرة عند α يعني ان نهاية الدالة f عند α هي $f(\alpha)$.

f مستمرة عند القيمة α يعني :

$$\lim_{x\to\alpha}(x) = f(\alpha)$$

ملاحضة :

إذا استبدلنا في التعريف السابق العلاقة :

$$\lim_{x\to\alpha}(x) = f(\alpha)$$

بالعلاقة:

$$\lim_{\substack{> \\ x\to\alpha}} f(x) = f(\alpha)$$

نقول إن f مستمر من اليمين عند α.

وإذا استبدلنا تلك العلاقة بالعلاقة :

$$\lim_{\substack{< \\ x\to\alpha}} f(x) = f(\alpha)$$

نقول إن f مستمر من اليسار عندα .

ملاحضة :

القول ان الدالة f مستمرة على مجال I يعني ان f مستمرة عند كل عدد حقيقي من I

خواص تقبل من دون برهان :

- الدوال المرجعية مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها .
- الدوال كثيرة حدود ,$sin\ et\ cos$, مستمرة على $\mathbb{R}$.
- الدوال الناطقة (حاصل قسمة كثير حدود) مستمرة على مجال من مجموعة تعريفها.

مثال :

ادرس استمرارية الدالة g المعرفة كما يلي عند القيم المرفقة بها :

$$g(x)\begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}} & si\ |x| < 1 \quad : -1 < x < 1 \\ 0 & si\ |x| \geq 1 \ : 1 \leq x\ et\ x \leq -1 \end{cases}$$

الدالة g هي مركب دوال مرجعية مستمرة على $\mathbb{R}$ اذن لكي تكون g مستمرة على $\mathbb{R}$

ندرس استمرارية g عند القيمة $x_0 = -1$, et $x_0 = 1$, ومنه نقوم بحساب النهاية عند هذه القيم.

دراسة الاستمرارية عند القيمة $x_0 = 1$:

لكي تكون g مستمرة عند القيمة 1 يجب ان تكون النهاية على يمين 1 تساوي النهاية على يسار 1في هاذي الحالة نقول g مستمرة عند القيمة 1.

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} g(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} e^{\frac{1}{x^2-1}} = 0 = \lim_{\substack{x\to 1\\ x\geq 1}} g(x)$$

اذنg مستمرة عند$x_0 = 1$

ومنه g مستمرة على $\mathbb{R}$

دراسة الاستمرارية عند القيمة $x_0 = -1$,

لكي تكون g مستمرة عند القيمة -1 يجب ان تكون النهاية على يمين -1 تساوي النهاية على يسار -1في هاذي الحالة نقول g مستمرة عند القيمة -1.

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} g(x) = \lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} e^{\frac{1}{x^2-1}} = \lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} e^{\frac{1}{0^-}} = 0 = g(-1)$$

اذنg مستمرة عند$\boldsymbol{x_0 = 1}$

7.1.الامتداد بالستمرارية (prolongement par continuité):

لدينا $I \subset \mathbb{R}$ و $x_0 \in I$ نقول ان الدالة f : $f: I - \{x_0\} \to \mathbb{R}$ امتداد بالستمراريةعند القيمة x_0 اذا قبلت الدالة f نهاية l عند القيمة x_0 :

$$f(x)\begin{cases} g(x) : \ \forall\, I - \{x_0\} \\ g(x_0) = l \end{cases}$$

مثال :

$$f: x \to \frac{x^2-4}{x-2}$$

$$D_f: \mathbb{R} - \{2\}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = 4$$

اذن :

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \mathbb{R} - \{2\} \\ 4 & si\ x = 2 \end{cases}$$

2. الاشتقاقية (la dérivabilité):

تعريف :

نقول عن الدالة f انها تقبل الاشتقاق على مجال مفتوح I من $\mathbb{R}$ اي $I \subset \mathbb{R}$ اذا وفقط اذا قبلت الاشتقاق عند جميع النقط من المجال I . و نقول اذا ان الدالة f تقبل الاشتقاق و نرمز لها بالرمز f' بحيث :

$$f' : I \to \mathbb{R}$$
$$x \to f'(x)$$

كما نرمز لها ايضا :

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x)$$

خواص تقبل دون برهان :

- كل دالة كثير حدود (fonction polynome) قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$
- الدوال المثلثية (fonction trigonométrique) $\sin x , \cos x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$
- الدالة قيمة مطلقة (fonction valeur absolue) قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_-^*$; $\mathbb{R}_+^*$
- الدالة الجذرية (fonction racine carré) قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$
- الدالة الناطقة (fonction rationnelle) قابلة للاشتقاق على مجال تعريفها.

a. العدد المشتق (le nombre dérivé):

تعريف :

f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$ $(I \subset \mathbb{R})$. $a \; et \; h + a$ عددان حقيقيان من I مع $h \neq 0$ $\big((a; a+h) \subset I\big)$

نقول ان f تقبل الاشتقاق عند a اذا قبلت النسبة $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ نهاية محدودة لما يؤول h الى 0.

تسمى هذه النهاية العدد المشتق للدالة f عند a و نرمز لها بالرمز $'(\quad)$.

لدينا :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a) \qquad \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$$

$$\boldsymbol{x = a + h}$$

ملاحضة :

اذا قبلت الدالة f الاشتقاق عند كل عدد حقيقي x من I $(\forall x \in I)$ نقول انها تقبل الاشتقاق على I

و تسمى الدالة :

$f'\colon x \to f'(x)$ الدالة المشتقة لدالة f

تعريف :

لتكن الدالة $\boldsymbol{f}$ معرفة على مجال $\boldsymbol{I}$ و ليكن $\boldsymbol{x_0 \in I}$ نقول ان الدالة $\boldsymbol{f}$ من الفئة $\boldsymbol{C^1}$ على مجال $\boldsymbol{I}$ ونرمز لها بالرمز $\boldsymbol{f \in C^1(I,R)}$ اذاكانت الدالة $\boldsymbol{f}$ قابلة للاشتقاق على مجال $\boldsymbol{I}$ ومشتقتها $\boldsymbol{f'}$ مستمرة على مجال $\boldsymbol{I}$

b. المشتقات المتتابعة (la dérivé nième):

تعريف :

f دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ $(I \subset \mathbb{R})$

اذا قبلت الدالة f' الاشتقاق على المجال I فان دالتها المشتقة $(f')'$ تسمى المشتقة الثانية لدالة f و نرمز لها f''. اذا قبلت الدالة f'' الاشتقاق على المجال Iفان دالتها المشتقة $(f'')'$ تسمى المشتقة الثالثة لدالة f و نرمز لها f'''.

اذن :

$$f', f'', f''', \dots\dots\dots .. f^{(n)}$$

تسمى المشتقات المتتابعة لدالة f .

مشتقة الدالة f من الرتبة $n+1$ نرمز لها بالرمز :

$$f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)' \quad \forall n \in N$$

و نقبل ان : $f^{(0)} = f$

اذا كانت المشتقة من الرتبة n لدالة f مستمرة على المجال I نقول ان الدالة f من الفئة n

ونرمز لها بالرمز : $f \in (C^n; I)$

ملاحضة :

- اذا كانت الدالة f من الفئة C^0 معناه ان الدالة f مستمرة
- اذا كانت الدالة f من الفئة C^1 معناه ان الدالة f قابلة للاشتقاق و الدالة f' مستمرة

3. الاشتقاقية و الاستمرارية :

اذا قبلت الدالة f' الاشتقاق على المجال I فانها مستمرة على المجال I.

ملاحضة :

عكس هذه الخاصية ليس دائما محقق.

مثال :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f : x \to |x|$$

f مستمرة عند 0 ولكن غير قابلة لاشتقاق عند 0.

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{|x|}{x} = 1 \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{|x|}{x} = -\mathbf{1}$$

مثال :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f : x \to \sqrt{|x|}$$

f مستمرة عند 0 ولكن غير قابلة لاشتقاق عند 0.

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\sqrt{|x|}}{x} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{\sqrt{|x|}}{x} = \frac{\sqrt{-x}}{x} = \frac{-1}{\sqrt{x}} = -\infty$$

تطبيق :

لدينا الدالة $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعرفة كما يلي :

$$f(x) : \begin{cases} x^2 sin\left(\frac{1}{x}\right) & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

هل الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

احسب $f'(x) \quad / \ x \in \mathbb{R}$

هل $'(\quad) \quad / \ x \in \mathbb{R}$ مستمرة على $\mathbb{R}$

هل $\boldsymbol{f \in C^1(I, R)}$

الحل :

من اجل $x \neq 0$ الدالة $f(x) = x^2 sin\left(\frac{1}{x}\right)$ قابلة لاشتقاق لانها مركب دوال مرجعية قابلة لاشتقاق

على $\mathbb{R}$ اذن $f(x) = x^2 sin\left(\frac{1}{x}\right)$ قابلة لاشتقاق على $\mathbb{R}^*$.

لكي تكون الدالة f قابلة لاشتقاق على $\mathbb{R}$ ندرس قابلية اشتقاق الدالة f عند القيمة $x_0 = 0$:

نحسب نهاية النسبة :

$$\lim_{x_0 \to 0} \frac{f(x) - f(x)}{x - 0} = \lim_{x_0 \to 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x_0 \to 0} x sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$-1 \leq sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

$$-x \le x\, sin\left(\frac{1}{x}\right) \le x$$

اذن الدالة f قابلة لاشتقاق عند القيمة $x_0 = 0$ و العدد المشتق هو 0

$$f'(x) = 0$$

حساب الدالة المشتقة :

$$f'(x): \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

لكي تكون الدالة f' مستمرة على $\mathbb{R}$ يجب ان تكون مستمرة عند القيمة $x_0 = 0$:

الدالةf' مستمرة عند القيمة $x_0 = 0$ معناه نهايةf' عند $x_0 = 0$ موجودة اذن :

$$\lim_{x\to 0} 2x\, sin\frac{1}{x} - cos\frac{1}{x}$$

$$-1 \le -cos\frac{1}{x} \le 1$$

$$-2x \le 2x\, sin\frac{1}{x} \le 2x$$

$$-2x - 1 = h(x) \le 2x\, sin\frac{1}{x} - cos\frac{1}{x} \le 2x + 1 = g(x)$$

$$\lim_{x\to 0}(2x+1) = 1 \neq \lim_{x\to 0}(-2x-1) = -1$$

اذن نهاية الدالة f'غير موجودة ومنه f' مستمرة على $\mathbb{R}^*$

ومنه ليستf من الفئة ^{1}

a. القيم الحرجة (les points critiques) :

تعريف :

نقول عن القيمة c انها قيمة حرجة لدالة f اذا كانت تنتمي الى مجال تعريف الدالة f اي : $c \in D_f$ و كانت المشتقة عند القيمة c معدومة $f'(c) = 0$ او غير موجودة او كانت القيمة c طرفية اي :

$$\boldsymbol{f'(c) = 0}$$
$$\boldsymbol{ou}$$
$$\boldsymbol{f'(c) =} \text{غير موجودة}$$

مثال :

اوجد القيم الحرجة للدالة التالية :

$$f(x) = \frac{2x^2}{x+2}$$

الخطوة الاولى مجال تعريف الدالة f D_f :

الدالة f معرفة على المجال : $D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$

الخطوة الثانية حساب المشتقة f':

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 8x}{(x+2)^2} = \frac{2x(x-4)}{(x+2)^2}$$

لايجاد القيم الحرجة نقم بحل المعادلة : $f'(x) = 0$

$$\frac{2x(x-4)}{(x+2)^2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x(x-4) = 0 & \Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ x - 4 = 0 \Longrightarrow x = 4 \end{cases} \\ (x+2)^2 = 0 & \Rightarrow \ x = -2 \end{cases}$$

نلاحض ان : $c_1 = 0 \in D_f\ ; et\ \ c_2 = 4 \in D_f;\ c_3 = -2 \notin D_f$

اذن مجموع القيم الحرجة :

$$\begin{pmatrix} c_1 = 0 \\ c_2 = 4 \end{pmatrix}$$

مثال : 2

اوجد القيم الحرجة للدالة المعرفة كما يلي :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 1 \\ 2x & x < 1 \end{cases}$$

نلاحض ان مجال تعرف الدالة هو : $D_f = \mathbb{R}$

اذن نبحث عن المشتقة من الرتبة 1 :

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & x > 1 \\ 2 & x < 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 & \Rightarrow x = 0 \quad x > 1 \\ 2 \neq 0 & \qquad\qquad x < 1 \end{cases}$$

من اجل القيمة $]1; +\infty[$ $c_1 = 0 \notin$ اذن القيمة $c_1 = 0$ ليست قيمة حرجة

من اجل القيمة $]1; +\infty[$ $c_2 = 1 \in$ اذن لمعرفة هل القيمة $c_2 = 1$ قيمة حرجة نقوم بحساب العدد المشتق للقيمة $c_2 = 1$ اذا كان العدد المشتق موجود نقول عن القيمة انها ليست قيمة حرجة واذا كانت المشتقة غير موجودة فان القيمة هي قيمة حرجة

$$\begin{cases} f'(1)^+ = 2 \\ f'(1)^- = 2 \end{cases}$$

اذن العدد المشتق للدالة f عند القيمة $c_2 = 1$ موجود اذن الدالة لا تقبل قيم حرجة.

b. القيم الحدية المحليه (extremum local):

تعريف :

f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$ $(I \subset \mathbb{R})$. و α عدد حقيقي من المجال I.

- القول ان $f(\alpha)$ قيمة حدية محلية عضمى للدالة f يعني انه يوجد مجال مفتوح I' محتوى في I, $(I' \subset I)$ يشمل α بحيث من اجل كل x من المجال I', $[\forall x \in I']$:

$$f(x) \leq f(\alpha) = M$$

- القول ان $f(\alpha)$ قيمة حدية محلية صغرى للدالة f يعني انه يوجد مجال مفتوح I' محتوى في I, $(I' \subset I)$ يشمل α بحيث من اجل كل x من المجال I', $[\forall x \in I']$:

$$f(\alpha) = m \leq f(x)$$

القول ان $f(\alpha)$قيمة حدية محلية ل f يعنى $f(\alpha)$ قيمة حدية محلية عضمى او صغرى.

مستلزمة :

- f دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I من $\mathbb{R}$ $(I \subset \mathbb{R})$. α عدد حقيقي من I
- اذا انعدمت الدالة المشتقة f' عند القيمة α مغيرة اشارتها اذن $f(\alpha)$ قيمة حدية محلية
- اذا قبلت الدالة f قيمة حدية محلية (صغرى او كبرى) عند القيمة α فان: $f'(\alpha) = 0$
- العكس غير صحيح اي انعدام المشتقة لا يعني بضرورة وجود قيمة حدية محلية .

مثال :

$$f: x \to x^3$$
$$f': x \to 3x^2$$
$$f': 0 \to 0$$

نلاحض ان المشتقة تنعدم عند القيمة 0 ولكن القيمة 0 ليست قيمة حدية محلية.

نضرية :

اذا كانت الدالة f معرفة و قابلة لاشتقاق من الدرجة $n = 2$على مجال I من $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$ $f: I \to \mathbb{R}$.بحيث $f'(\alpha) = 0$ اذن :

- اذا كان : $f''(\alpha) < 0$ اذن الدالة تقبل قيمة حدية محلية كبرى.
- اذا كان : $f''(\alpha) > 0$ اذن الدالة تقبل قيمة حدية محلية صغرى.

ملاحضة :

اذا كان لدينا : $f'(\alpha) = 0 \;\; et \; f''(\alpha) = 0$

لا يمكن استنتاج ان الدالة تقبل قيمة حدية محلية و لكن يمكن الجوء الى طرق اخرى.

c. البحث عن القيم الحدية :

ادا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق و نريد معرفة القيم الحدية لدينا شرطين :

الشرط الاول (condition d'ordre 1) :

البحث عن القيم الحرجة اي :

$$f'(x) = 0$$

في هذه الحالة وجود القيم التي تعدم المشتق نقول عنها انها قيمة مرشحة $(points\ critiques)$

الشرط الثاني (condition d'ordre 2) :

- اذا كان : $f''(c) > 0$ اذن نقول عن القيمة c قيمة حدية صغرى .
- اذا كان : $f''(c) < 0$ اذن نقول عن القيمة c قيمة حدية كبرى.

تطبيق :

اوجد القيم الحدية ان امكن للدالة المعرفة كما يلي :

$$f(x) = x^2 e^{-x}$$

الخطوة الاولى :

البحث عن القيم الحرجة :

$$f'(x) = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = xe^{-x}(2 - x)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow xe^{-x}(2 - x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2 - x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

القيم $(0; 2) \in D_f$ اذن هي قيم حرجة للدالة f

الخطوة 2 :

$$f''(x) = (-2x + 2)e^{-x} - e^{-x}(2x - x^2)$$

بتعويض :

$$f''(0) = 2 > 0 \ \Leftrightarrow 0\ est\ un\ min$$

$$f''(2) = -2e^{-2} < 0 \ \Leftrightarrow 0\ est\ un\ max$$