الدوال العددية : (les fonctions)

1. الدالة و مجموعة التعريف (domaine de définition)

1. الدالة ومجوعة التعريف :

تعريف:

اذا كانت D هي مجموعة تعريف الدالة f فان f ترفق بكل عدد حقيقي x من D نرمز له بالرمز $f(x)$.

ونقول ان $f(x)$ هي صورة x بالدالة f

مجموعة تريف الدالة f هي مجموعة الاعداد الحقيقية x التي يكون من اجلها حساب $f(x)$ ممكنا.

a. العمليات الجبرية لدوال :

ليكن D جزءا من $\mathbb{R}$ ، ولتكن ، $f: D_f \to \mathbb{R}$ و ، $g: D_g \to \mathbb{R}$ دالتين. نعرف مجموع ، $f+g: D_{f\cap} \to \mathbb{R}$ وجداء الدالتين ، $f.g: D_{f\cap g} \to \mathbb{R}$ وجداء دالة في عدد λ ، $\lambda.f: D_f \to \mathbb{R}$ و نسبة الدالتين $\frac{f}{g}: D_{f\cap g: g(x)\neq 0} \to \mathbb{R}$ (في حالة عدم انعدام g) بالعلاقات :

$$\forall x \in D_{f\cap g} \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$\forall x \in D_{f\cap g} \quad (f.g)(x) = f(x).g(x)$$

$$\forall x \in D_{f\cap g} \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \ \ avec\ g(x) \neq 0$$

$$\forall x \in D_f \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

$$\forall x \in D_f \quad (f+k)(x) = f(x) + k$$

b. تركيب الدوال (la décomposition des fonctions) :

تعريف :

f و g دلتان معرفتان على D_f و D_g على الترتيب بحيث :

$D_f\ ; D_g \subset \mathbb{R}$

من اجل كل عدد حقيقي x من D_f, $f(x)$ ينتمي الى D_g :

$$\forall x \in D_f \quad f(x) \in D_g$$

نعرف دالة التركيب f متبوعة بالدالة g الدالة التي نرمز لها بالرمز $g \circ f$ و المعرفة ***على*** D_f :

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)]$$

مثل :

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على $D_f: [0; +\infty[$ و $D_g: [1; +\infty[$:

$$g(x) = \sqrt{x-1}$$
$$f(x) = 2x^2 + 1$$

عرف $f \circ g\ \ et\ g \circ f$

مجال تعريف الدالتين $f \circ g$ et $g \circ$

- لدينا :

$$\forall x \in\ D_g : [1\ ;\ +\infty[\quad g(x) \geq 0\ donc\ g(x) \in D_f$$

ومنه :

$$D_{f \circ g} : [1; +\infty[$$

- لدينا :

$$\forall x \in\ D_f : [0\ ;\ +\infty[\quad f(x) \geq 1\ donc\ f(x) \in \boldsymbol{D_g}$$

ومنه :

$$D_{g \circ f} : [0; +\infty[$$

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= f[g(x)] \\ &= 2\left(\sqrt{x-1}\right)^2 + 1 \\ &= 2x - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g[f(x)] \\ &= \sqrt{(2x^2+1) - 1} \\ &= \sqrt{2x^2} \end{aligned}$$

2. الدالة الزوجية و الفردية (fonction paire et impaire):

ليكن D جزءا من $\mathbb{R}$ $(D \subset \mathbb{R})$ ، متناظرا بالنسبة لـ 0 ، $f : D \to \mathbb{R}$

نقول عن الدالة f إنها زوجية إذا كان :

$$\forall x \in D, f(-x) = f(x)$$

خاصية :

مشتقة الدالة الزوجية هي دالة فردية

مبرهنة :

$$\begin{aligned} f'(-x_0) &= \lim_{x \to -x_0} \frac{f(-x) - f(-x_0)}{-x + x_0} \\ &= -\lim_{x \to -x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= -f'(x_0) \end{aligned}$$

نقول عن الدالة f إنها فردية إذا كان :

$$\forall x \in D \ \ f(-x) = -f(x)$$

خاصية :

مشتقة الدالة فردية هي دالة الزوجية

مبرهنة :

$$\begin{aligned} f'(-x_0) &= \lim_{x\to -x_0} \frac{f(-x) - f(-x_0)}{-x + x_0} \\ &= \lim_{x\to -x_0} \frac{-f(x) + f(x_0)}{-x + x_0} \\ &= \lim_{x\to -x_0} \frac{-[f(x) - f(x_0)]}{-[x - x_0]} \\ &= f'(x_0) \end{aligned}$$

امثلة :

الدلتان f و g المعرفتان على المجال $D_f \ et \ D_g$:

دالتان زوجيتان $f(x) = \cos x \quad g(x) = |x|$

* الدالتان f و g المعرفتان على $D_f \ et \ D_g$:

دالتان فرديتان $f(x) = \sin x \quad g(x) = x^3$

الدالتان f و g المعرفتان على $D_f \ et \ D_g$:

$$f(x) = \cos x + \sin x \quad g(x) = x + |x|$$

دالتان غير زوجيتين وغير فرديتين.

3. النهايات (les limites):

تعريف :

لتكن $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دالة معرفة على مجال مفتوح I تنتمي إليه نقطة α. نقول عن f إنها تملك نهاية منتهية c عند النقطة α إذا تحقق الشرط:

اي $\lim_{x\to\alpha} f(x) = c$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha_0 > 0 : \forall x \in D_f \ |x - \alpha| < \alpha_0 \Rightarrow |f(x) - c| < \varepsilon$$

a. نظرية (وحدانية النهاية):

لتكن $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دالة معرفة على مجال مفتوح I تنتمي إليه نقطة α. إذا قبلت الدالة f نهاية فهي وحيدة.

ملاحظة:

- نتحدث عن النهاية من اليمين إذا استبدلنا الكتابة $\lim_{x\to\alpha} f(x)$ بالكتابة

$$\lim_{\substack{x>\alpha \\ x\to\alpha}} f(x)$$

أي أن x يقترب من α من جهة اليمين على المحور الحقيقي.

- ونتحدث عن النهاية من اليسار إذا استبدلنا الكتابة $\lim_{\substack{x>\alpha \\ x\to\alpha}} f(x)$ بالكتابة

$$\lim_{\substack{x<\alpha \\ x\to\alpha}} f(x)$$

أي أن x يقترب من α من جهة اليسار على المحور الحقيقي.

b. حالات عدم تعيين :

هناك في حساب النهايات حالات لا نتمكّن فيها من تحديد النهاية إلا بالمزيد من التحري كالحالات الموالية المسماة حالات عدن تعيين :

- حالة عدم تعيين من الشكل: 1^{∞}

مثال :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$$

يجب تحويلها الى دالة نسبية :

اذن :

بوضع:

$$y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$$
$$\ln y=x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$
$$X=\frac{1}{x};si\ x\to+\infty;alors\ X\to0$$
$$\lim_{X\to0} e^{\frac{\ln(1+X)}{X}}$$
$$\lim_{X\to0}\left(\frac{\ln(1+X)}{X}\right)=f'(0);avec\ f(x)=\ln(1+X)$$

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}$$
$$f'(0)=1$$

اذن: $\lim_{X\to0} e^{\frac{\ln(1+X)}{X}}=e$

- حالة عدم تعيين من الشكل: 1^{∞}

مثال :

احسب النهاية التالية :

$$\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}(\sin x)^{x}$$

نضع : $y=(\sin x)^{x}$

$$\ln y = \ln(sin\, x)^x$$
$$\ln y = x\ln(\sin x)$$
$$\ln y = \frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to 0}\frac{x^2.\cos x}{\sin x}$$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{x^2.\cos x}{\sin x} = -\lim_{x\to 0}\frac{2x\cos x - x^2\sin x}{\cos x} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{x}}$$

بما أن : $\ln y = \ln(\sin x)^x$

$$\lim_{x\to 0}\ln y = 0$$

$$\lim_{x\to 0} y = e^0 = 1$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(\sin x)^x$$

- حالة عدم تعيين من الشكل: $0.\pm\infty$

مثال :

$$\lim_{x\to 0} x^{\frac{-7}{2}}\, e^{\frac{1}{|x|}}$$

بوضع :

$$\begin{cases} t = \dfrac{1}{x} & x > 0 \end{cases}$$

$$si\ x \to 0^+ \quad alors\ t \to +\infty$$

$$\lim_{t\to +\infty}\frac{1}{t^{\frac{-7}{2}}}e^t = \lim_{t\to +\infty} t^{\frac{7}{2}}e^t = +\infty$$

- $\infty - \infty$

c. خاصية العدد المشتق :

احسب النهاية : $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x}$

$$\lim_{x\to 0}\cos x = 1$$

لازالة هذه حالة عدم التعيين نلجاء الى طريقة العدد المشتق :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $f(x) = \cos x$

بمان الدالة الدالة f قابلة لاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة :

$$f'(x) = -\sin x$$

$$f'(0) = 0$$

اذن من تعريف العدد المشتق لدينا :

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) = 0$$

4. نضرية اوبتال : (théorème de l'hopital-bernoulli)

لتكن الدالة $f(x)$ المعرفة على مجال $I = [a;b]$ من $\mathbb{R}$ بالعلاقة :

$$f(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$$

اذا كانت الدالتين : $h(x)\ et\ g(x)$ قابلتين لاشتقاق على المجال : $]a;b[$

لدينا : $\alpha \in [a;b]$ عدد حقيقي .

في حالة عدم التعيين $\frac{\infty}{\infty}$ و $\frac{0}{0}$ يمكن حساب النهاية بالطريقة التالية :

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \lim_{x\to\alpha}\frac{h(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\alpha}\frac{h'(\alpha)}{g'(\alpha)}$$

مثال :

احسب النهايات التالية :

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x(1-\cos x)}{x^2+x^3};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x(1-\cos x)}{x^2+x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x(1-cos\,x)+e^x(\sin x)}{2x+3x^2} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x(1-cos\,x)+e^x(\sin x)}{2x+3x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x(1-cos\,x)+e^x(sin\,x)+e^x(sin\,x)+e^x\cos x}{2+6x}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x(1-\cos x)}{x^2+x^3}=\frac{1}{2}$$

2. نضرية الحصر : (théorème des gendarmes)

لتكن الدوال التالية f, g, h معرفة على المجال I من $\mathbb{R}$ بحيث :

$$\forall x \in I \;\; f(x) \le g(x) \le h(x)$$

لدينا :

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \lim_{x\to\alpha} h(x) = l \;\; alors \;\; \lim_{x\to\alpha} g(x) = l$$

لتكن الدالتان f, g معرفتان على المجال I من $\mathbb{R}$ بحيث $]m; +\infty[$:

اذا كان : $g(x) \le f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

اذن : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

اذا كان : $g(x) \le f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

اذن : $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

ملاحضة :

يمكن تطيق نص النضرية فيما يخص المتتاليات

يمكن تطيق نص النضرية فيما يخص $\pm\infty$ او عدد حقيقي.

3. المستقيم المقارب المائل :

ليكن (C_f) التمثيل البياني لدالة f في معلم وليكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة :

$$y = ax + b$$

القول ان المستقيم (Δ) مستقيم مقارب للمنحني (C_f) عند $\pm\infty$ يعني :

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-(ax+b)] = 0$$

a. البحث عن المستقيم المقارب المائل :

ليكن (C_f) التمثيل البياني لدالة f في معلم وليكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة :

$$y = ax + b \; (a \neq 0)$$

نفرض ان :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \; ; \; \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \; ;$$

$$ou \; bien$$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty ; \; \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$$

نفرض ان (Δ) مستقيم مقارب للمنحني (C_f)عند $+\infty$.

ومنه حسب التعريف :

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$$

نضع :

$$g(x)=f(x)-(ax+b)$$

ومنه

$$f(x)=g(x)+(ax+b)\ ;\ \lim_{x\to+\infty}g(x)=0$$

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{g(x)+(ax+b)}{x}=\frac{1}{x}g(x)+a+\frac{b}{x}$$

بما ان :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{b}{x}=0\quad et\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}g(x)=0\quad\Rightarrow\frac{f(x)}{x}=a$$

كما لدينا ايضا :

$$f(x)-ax=g(x)+b\ ;\ \lim_{x\to+\infty}g(x)=0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}[f(x)-(ax)]=b$$

نتيجة :

اذا كان المستقيم (Δ) ذو المعادلة :

$$y=ax+b\ (a\neq 0)$$

مستقيما مقاربا ل (C_f) عند $+\infty$.

فان : $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a\quad et\ \lim_{x\to+\infty}[f(x)-(ax)]=b$