
Chapitre : 3

Conduction de chaleur

3.1. Introduction :

On dit que le régime est stationnaire ou permanent si, en tout point, la température est indépendante du temps. L'équation différentielle de la conduction thermique en régime permanent correspond à une forme particulière de l'équation fondamentale de la conduction dans laquelle le champ de température ne varie pas avec le temps ($\frac{\partial T}{\partial t} = 0$).

Certaines applications pratiques peuvent être traitées par des systèmes unidimensionnels ou la température ne varie essentiellement que dans une seule direction. Les cas de référence sont représentés par le problème plan, cylindrique ou sphérique.

3.2. Mur simples avec des faces isothermes :

Ce cas correspond à la conduction d'une plaque d'épaisseur finie et des dimensions infinies. Le champ de température ayant la forme, $T = T(x)$.

Soit un tel mur simple, d'épaisseur e est constitué d'un matériau homogène et isotropique, de conductivité thermique constante λ . Les températures des faces de ce mur sont T_1 et T_2 ($T_1 > T_2$).

Dans l'absence de sources internes ($g = 0$), l'équation différentielle de la conduction s'écrit sous la forme :

$$\frac{dT^2}{dx^2} = 0 \quad (3.1)$$

Pour obtenir la solution de cette équation,

On intègre deux fois et on obtient ;

$$\frac{dT}{dx} = c_1$$

$$T(x) = c_1x + c_2 \quad (3.2)$$

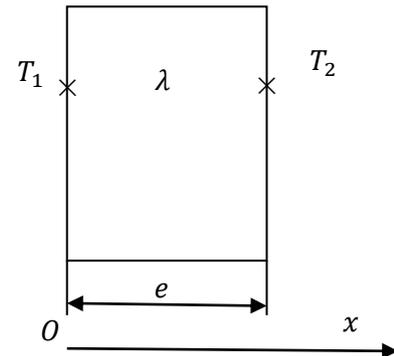


Fig.3.1.bilan thermique d'un mur simple

Pour déterminer les constantes d'intégrations c_1 et c_2 en utilise les conditions aux limites :

$$CL(1): x = 0, T = T_1 \quad (3.3a)$$

$$CL(2): x = e, T = T_2 \quad (3.3b)$$

$$CL(1) \Rightarrow T_1 = c_1(0) + c_2 \Rightarrow c_2 = T_1 \quad (3.4)$$

$$CL(2) \Rightarrow T_2 = c_1(e) + c_2 \Rightarrow c_1 = \frac{T_2 - T_1}{e} \quad (3.5)$$

On remplace l'équation (3.4), l'équation (3.5) dans l'équation (3.2), on obtient le champ de température dans le mur simple :

$$T(x) = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{e} x \quad (3.6)$$

3.2.1. Flux thermique

Le flux thermique dans ce mur s'obtient en utilisant la loi de Fourier ;

$$q = -\lambda s \frac{dT}{dx} = \lambda s \frac{T_1 - T_2}{e} \quad (3.7)$$

On peut écrire cette expression du flux sous la forme ;

$$q = \frac{T_1 - T_2}{\frac{e}{\lambda s}} = \frac{\Delta T}{R_{cd}} \quad (3.8)$$

Cette relation est analogue à loi d'Ohm en électricité qui définit l'intensité du courant I comme le rapport de la différence de potentiel électrique U sur la résistance électrique R_{cl} . La température T apparait ainsi comme un potentiel thermique et le terme $(\frac{e}{\lambda s})$ apparait comme la résistance thermique d'un mur simple d'épaisseur e , de conductivité thermique constante λ et de surface s .

$$I = \frac{\Delta U}{R_{cl}} \Leftrightarrow q = \frac{\Delta T}{R_{cd}} \tag{3.9}$$

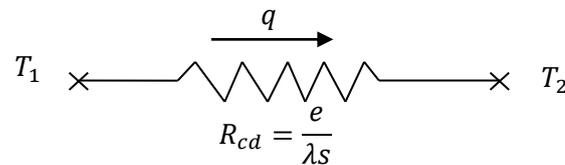


Fig.3.2. Analogie électrique de la Resistance thermique d'un mur simple

3.3. Mur simple avec une source interne :

On considère un mur simple, homogène et isotrope ayant une épaisseur e . On suppose que les températures T_1 et T_2 des surfaces extrêmes du mur sont uniformes et constantes. La source interne g est uniformément distribuée dans le volume du mur.

L'équation différentielle qui décrit la distribution de la chaleur dans ce mur prend la forme :

$$\frac{dT^2}{dx^2} + \frac{g}{\lambda} = 0 \tag{3.10}$$

Par une double intégration, on obtient le champ de température ;

$$\frac{dT}{dx} = \frac{-g}{\lambda} x + c_1$$

et donc : $T(x) = \frac{-g}{2\lambda} x^2 + c_1 x + c_2 \tag{3.11}$

Les constantes d'intégrations sont déterminées à partir des conditions aux limites de l'équation (3.3).

$$CL(1) \Rightarrow c_2 = T_1$$

$$CL(2) \Rightarrow c_1 = \frac{g}{2\lambda} e - \frac{T_1 - T_2}{e}$$

On introduit ces valeurs dans l'équation (3.11)

$$T(x) = \frac{-g}{2\lambda} x^2 + \left(\frac{g}{2\lambda} e - \frac{T_1 - T_2}{e}\right)x + T_1 \quad (3.12)$$

3.3.1. Flux thermique

On utilise la loi de Fourier, on obtient le flux thermique

$$q = \lambda s \frac{dT}{dx} = -\lambda s \left(\frac{-g}{\lambda} x + c_1\right)$$

$$q = g s x - c_1 s \lambda = g s x - \frac{g}{2} s e + \frac{\lambda s}{e} (T_1 - T_2) \quad (3.13)$$

3.4. Mur multicouches en contact avec deux fluides :

Les murs réels sont constitués de plusieurs couches de matériaux différents. Les températures des fluides en contact avec les deux faces du mur sont T_{f_1} et T_{f_2} ($T_{f_1} > T_{f_2}$).

Les coefficients d'échange de chaleur par convection sont h_1 et h_2 .

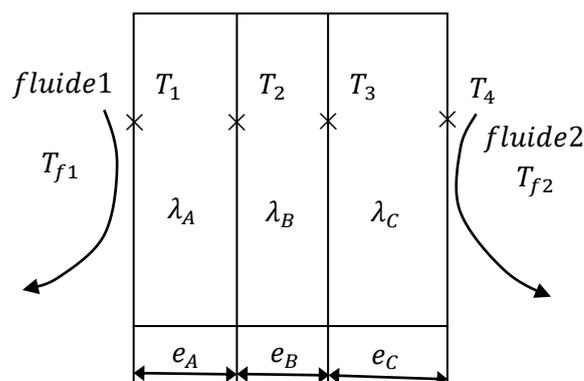


Fig.3.3.Schématization d'un mur multicouche

Sous les hypothèses de régime permanent de transfert thermique par conduction et en l'absence de sources internes de chaleur, le flux thermique se conserve lors de la traversée du mur et s'écrit :

$$q = h_1s(T_{f_1} - T_1) = \frac{\lambda_A s}{e_A}(T_1 - T_2) = \frac{\lambda_B s(T_2 - T_3)}{e_B} = \frac{\lambda_C s(T_3 - T_4)}{e_C} = h_2s(T_4 - T_{f_2}) \quad (3.14)$$

En résolvant l'équation (3.14) par rapport des différences de température on obtient:

$$T_{f_1} - T_1 = \frac{q}{h_1s} \quad (3.15a)$$

$$T_1 - T_2 = \frac{q}{\frac{\lambda_A s}{e_A}}, \quad (3.15b)$$

$$T_2 - T_3 = \frac{q}{\frac{\lambda_B s}{e_B}}, \quad (3.15c)$$

$$T_3 - T_4 = \frac{q}{\frac{\lambda_C s}{e_C}}, \quad (3.15d)$$

$$T_4 - T_{f_2} = \frac{q}{h_2s} \quad (3.15e)$$

En additionnant membre a membre les relations de l'équation (3.15), on trouvera :

$$T_{f_1} - T_{f_2} = q\left(\frac{1}{h_1s} + \frac{e_A}{\lambda_A s} + \frac{e_B}{\lambda_B s} + \frac{e_C}{\lambda_C s} + \frac{1}{h_2s}\right)$$

$$\text{D'où, } q = \frac{T_{f_1} - T_{f_2}}{\frac{1}{h_1s} + \frac{e_A}{\lambda_A s} + \frac{e_B}{\lambda_B s} + \frac{e_C}{\lambda_C s} + \frac{1}{h_2s}} \quad (3.16)$$

est :

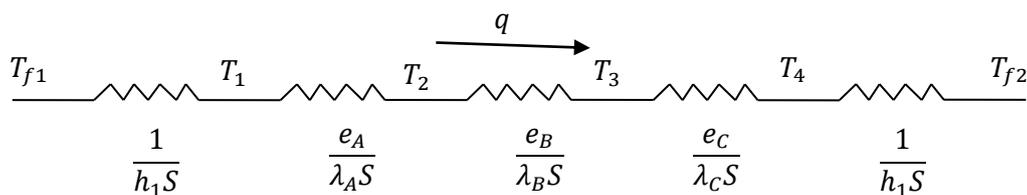


Fig.3.4. Schéma électrique équivalent

En général, pour un mur à n couches, le flux thermique s'écrit sous la forme ;

$$q = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{\frac{1}{h_1 S} + \sum_{i=1}^n \frac{e_i}{\lambda_i S} + \frac{1}{h_2 S}} \quad (3.17)$$

3.5. Cylindres creux long avec des faces isothermes :

On considère un cylindre creux de conductivité thermique λ constante, de rayon intérieur R_1 et de rayon extérieur R_2 et de longueur L . Les températures des faces internes et externes étant respectivement T_1 et T_2 ($T_1 > T_2$).

On suppose que le gradient longitudinal de température est négligeable devant le gradient radial. La conduction thermique est donc unidirectionnelle suivant la direction radiale. Le cylindre ne contient pas de source interne de chaleur ($g = 0$).

Dans le cadre de ces hypothèses, l'équation différentielle de la conduction en coordonnées cylindriques s'écrit sous la forme :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0 \quad (3.18)$$

Pour une double intégration de cette équation,

on obtient le champ de température ;

$$r \frac{dT}{dr} = c_1 \implies \frac{dT}{dr} = \frac{c_1}{r}$$

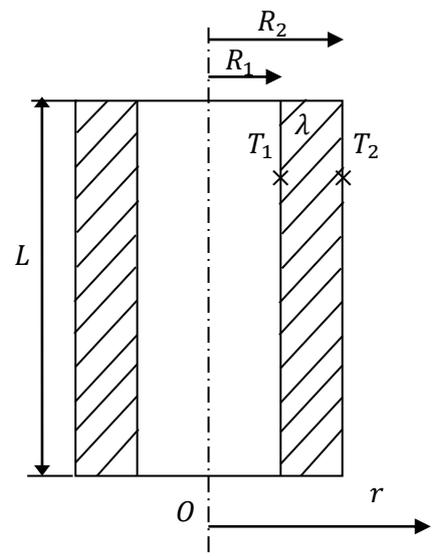


Fig.3.5. Schéma d'un cylindre creux

$$D'o\grave{u} \quad T(r) = c_1 \ln r + c_2 \quad (3.19)$$

Les constantes d'intégrations c_1 et c_2 sont déterminées d'après les conditions aux limites :

$$CL(1): r = R_1, T = T_1 \quad (3.20a)$$

$$CL(2): r = R_2, T = T_2 \quad (3.20b)$$

$$CL(1) \Rightarrow T_1 = c_1 \ln R_1 + c_2$$

$$CL(2) \Rightarrow T_2 = c_1 \ln R_2 + c_2$$

D'où les valeurs de c_1 et c_2 sont :

$$c_1 = \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \quad \text{et} \quad c_2 = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{R_1}{R_2}} \ln R_1$$

On remplace les valeurs de c_1 et c_2 dans l'équation (3.19), on obtient l'équation de champ de température dans un cylindre ;

$$T(r) = T_1 - (T_1 - T_2) \frac{\ln \frac{r}{R_1}}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \quad (3.21)$$

3.5.1. Flux thermique

D'après la loi de Fourier, le flux thermique est ;

$$q = -\lambda s \frac{dT}{dr}$$

$$\text{avec ; } s = 2\pi r L \quad \text{et} \quad \frac{dT}{dr} = \frac{c_1}{r}$$

$$D'o\grave{u}, \quad q = -\lambda 2\pi r L \frac{c_1}{r} = -2\pi \lambda L c_1$$

$$q = 2\pi \lambda L \frac{(T_1 - T_2)}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \quad (3.22)$$

cette relation peut aussi être mise sous la forme

$$q = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{1}{2\pi\lambda L} \ln \frac{R_2}{R_1}} = \frac{(T_1 - T_2)}{R_{cd}} \quad (3.23)$$

Où la résistance thermique de la conduction pour un cylindre creux est donnée par ;

$$R_{cd} = \frac{1}{2\pi\lambda L} \ln \frac{R_2}{R_1} \quad (3.24)$$

Dans les applications pratiques, on utilise le flux thermique linéaire qui est donné par la relation :

$$q_L = \frac{q}{L} = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{1}{2\pi\lambda} \ln \frac{R_2}{R_1}} \quad (3.25)$$

3.6. Cylindre creux multicouches en contact avec deux fluides :

C'est le cas pratique d'un tube recouvert d'une ou plusieurs couches de matériaux différents et où l'on connaît que les températures T_{f1} et T_{f2} des fluides en contact avec les faces internes et externes du tube.

h_1 et h_2 sont les coefficients de transfert de chaleur par convection entre les deux fluides et les faces internes et externes.

Le flux thermique à travers chaque section est le même, il est représenté par :

$$q = h_1 2\pi R_1 L (T_{f1} - T_1) = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{1}{2\pi\lambda_A L} \ln \frac{R_2}{R_1}} = \frac{(T_2 - T_3)}{\frac{1}{2\pi\lambda_B L} \ln \frac{R_3}{R_2}} = h_2 2\pi R_3 L (T_3 - T_{f2}) \quad (3.26)$$

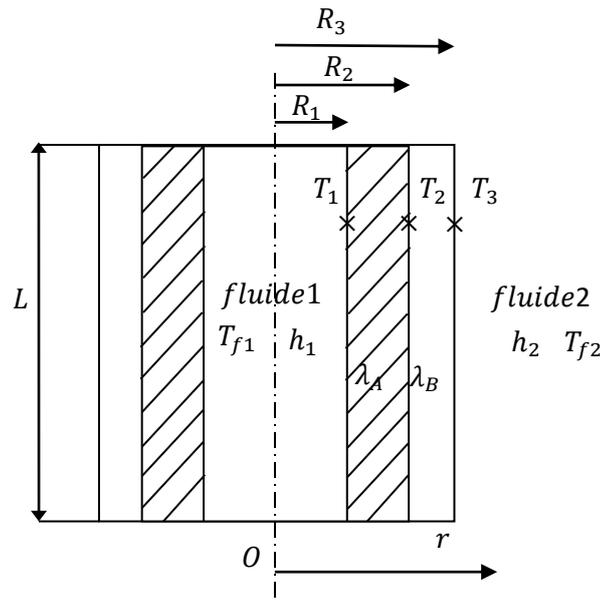


Fig.3.6. Schéma d'un cylindre creux multicouche

D'après ces équations on peut déterminer les différences de températures comme suite :

$$T_{f1} - T_1 = \frac{q}{h_1 2\pi R_1 L}, T_1 - T_2 = q \left(\frac{1}{2\pi \lambda_A L} \ln \frac{R_2}{R_1} \right), T_2 - T_3 = q \left(\frac{1}{2\pi \lambda_B L} \ln \frac{R_3}{R_2} \right), T_3 - T_{f2} = \frac{q}{h_2 2\pi R_3 L}$$

Les températures intermédiaires peuvent être éliminées par l'addition des termes relatifs à la différence de température, on obtient alors;

$$T_{f1} - T_{f2} = q \left(\frac{1}{h_1 2\pi R_1 L} + \frac{1}{2\pi \lambda_A L} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{2\pi \lambda_B L} \ln \frac{R_3}{R_2} + \frac{1}{h_2 2\pi R_3 L} \right) \quad (3.27)$$

L'expression qui permet d'écrire le flux thermique traversant radialement le cylindre s'écrit :

$$q = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{\frac{1}{h_1 2\pi R_1 L} + \frac{1}{2\pi \lambda_A L} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{2\pi \lambda_B L} \ln \frac{R_3}{R_2} + \frac{1}{h_2 2\pi R_3 L}} \quad (3.28)$$

Le schéma électrique équivalent est représenté sur la figure (3.7).

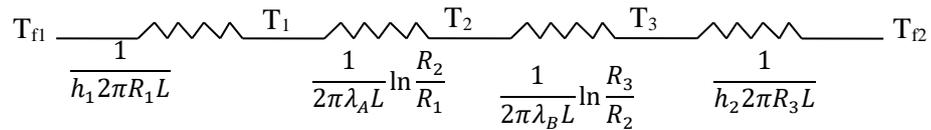


Fig.3.7. Schéma électrique équivalent d'un cylindre creux multicouche

3.7. Effet de la conductivité thermique variable :

En pratique, la variation de la conductivité thermique avec de la température peut être négligée, si le domaine de températures considéré n'est pas grand, ou lorsque la température dont dépend la conductivité n'est pas élevée.

Pour de nombreux matériaux, particulièrement dans un domaine de températures limité, la variation de la conductivité thermique avec la température peut être représentée par une fonction linéaire.

$$\lambda(T) = \lambda_0(1 + \alpha T) \tag{3.29}$$

Avec :

λ_0 : Conductivité thermique à $T = 0$.

α : Coefficient de température de la conductivité thermique.

Avec une approximation linéaire de la variation de la conductivité thermique avec la température, le flux thermique par conduction à travers un mur simple s'écrit :

$$q = S\lambda(T) \frac{dT}{dx} \Rightarrow \frac{q}{S} \int_0^e dx = - \int_{T_1}^{T_2} \lambda(T) dT = - \int_{T_1}^{T_2} \lambda_0(1 + \alpha T) dT \tag{3.30}$$

L'intégration de cette équation donne :

$$q = \frac{\lambda_0 S}{e} \left[T_1 - T_2 + \frac{\alpha}{2} (T_1^2 - T_2^2) \right] \quad (3.31)$$

Cette équation peut s'écrire sous la forme :

$$q = \frac{\lambda_0 S}{e} (T_1 - T_2) \left[1 + \frac{\alpha}{2} (T_1 + T_2) \right] = \frac{\Delta T}{\frac{e}{S \lambda_m}} \quad (3.32)$$

Avec :

$$\lambda_m = \lambda_0 (1 + \alpha T_m) \quad \text{et} \quad T_m = \frac{T_1 + T_2}{2}$$

λ_m : Valeur moyenne de la conductivité thermique.

T_m : Moyenne arithmétique des températures.

3.8. Rayon critique d'isolant :

L'addition d'une couche isolante à la surface extérieure d'une conduite de faible diamètre ou d'un fil métallique ne réduit pas toujours le transfert de chaleur. En augmentant l'épaisseur de l'isolant, on augmente la résistance thermique aux flux s'écoule vers le milieu extérieur. D'un autre côté la surface extérieure devenant importante, qui favorise les échanges thermiques avec le milieu extérieur. Cela veut dire, qu'un compromis doit être trouvé entre ces deux observations, apparemment contradictoires.

Il existe un diamètre critique de l'isolant pour lequel les échanges avec le milieu extérieur se font d'une manière optimale.

Une conduite cylindrique de longueur L a un rayon intérieur R_1 et de rayon extérieur R_2 . Autour de cette conduite, on place un isolant de rayon R et de conductivité thermique λ .

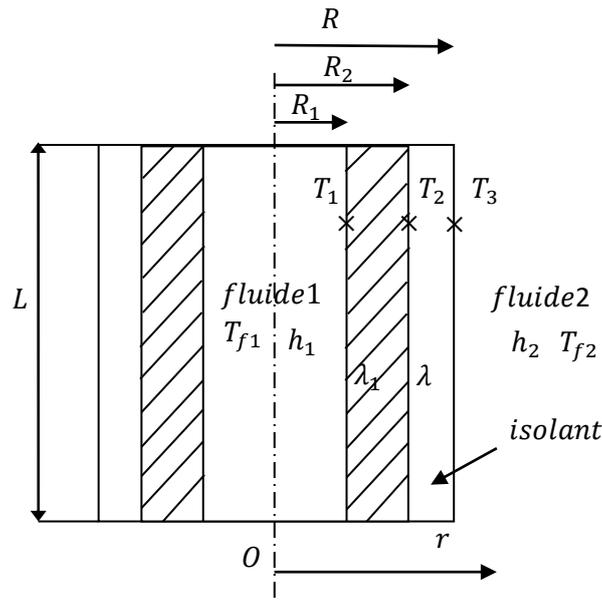


Fig. 3.8. Schéma d'un cylindre creux recouvert d'un isolant

Le flux thermique traversant le cylindre est donné par la relation:

$$q = \frac{T_{f1} - T_{f2}}{\frac{1}{h_1 \pi R_1 L} + \frac{1}{2\pi \lambda_1 L} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{2\pi \lambda L} \ln \frac{R}{R_2} + \frac{1}{h_2 2\pi R L}} \quad (3.33)$$

D'après cette équation le flux devient maximal lorsque le dénominateur est minimal c.à.d. sa dérivée par rapport devient nulle.

$$\frac{1}{2\pi \lambda L} \frac{1}{R_{cr}} - \frac{1}{2\pi L h_2 R_{cr}^2} = 0 \quad (3.34)$$

$$\frac{1}{\lambda} \frac{1}{R_{cr}} - \frac{1}{h_2 R_{cr}^2} = 0$$

$$D'où : R_{cr} = \frac{\lambda}{h_2} \quad (3.35)$$

Au delà du rayon critique, les déperditions thermiques avec le milieu extérieur augmentent avec l'augmentation de l'épaisseur de l'isolant.

3.9. Transfert de chaleur dans les ailettes

Une ailette est une plaque destinée à augmenter la surface d'échange de chaleur d'un corps. Les applications pratiques utilisant les ailettes sont nombreuses. Elles concernent les échangeurs thermiques, les moteurs thermiques et les montages électroniques.

Les ailettes peuvent avoir des géométries variées (figure.3.9).

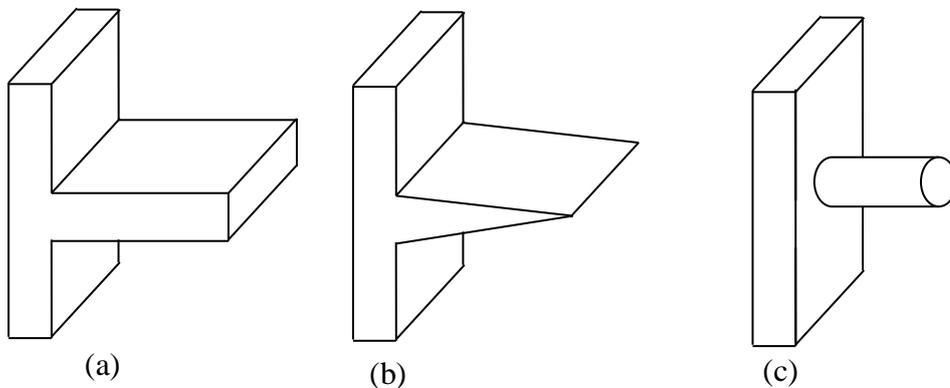


Fig.3.9. Différentes géométries des ailettes . (a) Droite avec section rectangulaire. (b) Droite avec section variable. (c) Droite avec section circulaire.

3.9.1 . Etude d'une ailette droite avec section uniforme :

On considère une ailette droite (figure.3.10) transférant la chaleur entre une surface plane et le milieu extérieur. L'ailette est refroidie le long de sa surface par un fluide a température T_{∞} . L'ailette de section transversale S et le périmètre P . est construit d'un matériau ayant une conductivité thermique λ et le coefficient d'échange de chaleur par convection entre l'ailette et le fluide est h . La température à la base de l'ailette est T_o . En supposant que $T_{\infty} < T_o$, le flux de chaleur pénètre par conduction à la base de l'ailette et dissipe dans le milieu extérieur (fluide).

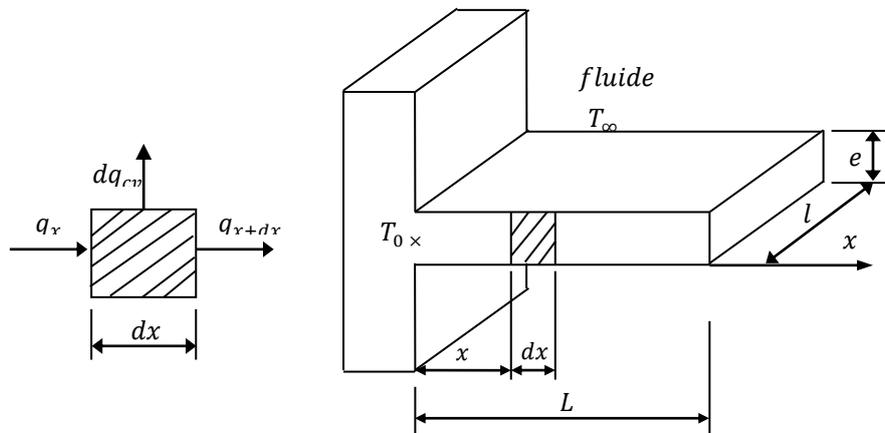


Fig.3.10. Ailette droite avec section uniforme

Le bilan thermique appliqué à un petit élément de l'ailette permet de obtenir le champ de température le long de l'ailette.

Soit un élément de surface de longueur dx à la distance x de la base de l'ailette. En régime permanent, le flux de chaleur transmis par conduction à l'abscisse $x + dx$ et le flux de chaleur transmis par convection à la périphérie de l'ailette :

$$q_x = q_{x+dx} + dq_{cv} \tag{3.36}$$

Par développement en série de Taylor de q_{x+dx} on obtient:

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{dq_x}{dx} dx + \dots \tag{3.37}$$

En remplaçant l'équation (3.37) dans l'équation (3.36) on obtient :

$$\frac{dq_x}{dx} dx + dq_{cv} = 0 \tag{3.38}$$

On peut écrire :

$$\frac{dq_x}{dx} dx = \frac{d}{dx} \left(-\lambda S \frac{dT}{dx} \right) dx = -\lambda S \frac{d^2 T}{dx^2} dx \quad (3.39)$$

$$\text{Et : } dq_{cv} = hdS(T - T_\infty) = hPdx(T - T_\infty) \quad (3.40)$$

On remplace l'équation (3.39) et l'équation (3.40) dans l'équation (3.38), on obtient :

$$-\lambda S \frac{d^2 T}{dx^2} dx + hPdx(T - T_\infty) = 0$$

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{hP}{\lambda S} (T - T_\infty) = 0 \quad (3.41)$$

$$\text{En posant : } \omega^2 = \frac{hP}{\lambda S} \text{ et } \bar{T} = T - T_\infty$$

L'équation (3.6) devient :

$$\frac{d^2 \bar{T}}{dx^2} + \omega^2 \bar{T} = 0 \quad (3.42)$$

Cette équation est une forme classique d'une équation différentielle ordinaire du second ordre dont la solution générale est :

$$\bar{T}(x) = C_1 e^{\omega x} + C_2 e^{-\omega x} \quad (3.43)$$

Ou les coefficients C_1 et C_2 sont déterminés pour des différentes situations, en imposant des conditions aux limites correspondantes.

3.9.2 Ailette longue et mince :

Si l'ailette est infiniment longue par rapport aux dimensions de la section, la température à son extrémité s'approche de celle du fluide. Donc, les conditions aux limites sont :

$$x = 0, T = T_o$$

$$x \rightarrow \infty, T = T_\infty$$

Avec changement de variable on obtient :

$$C.L.1 \quad x = 0, \bar{T} = T_0 - T_\infty = \bar{T}_0 \quad (3.44a)$$

$$C.L.2 \quad x \rightarrow \infty, \bar{T} = T_\infty - T_\infty = 0 \quad (3.44b)$$

En substituant ces conditions dans l'équation (3.43) on obtient les coefficients C_1 et C_2 :

$$C_1 = 0 \quad (3.45a)$$

$$C_2 = \bar{T}_0 \quad (3.45b)$$

Et l'équation de température devient :

$$\begin{aligned} \bar{T}(x) &= \bar{T}_0 e^{-\omega x} \\ \frac{T(x) - T_\infty}{T_0 - T_\infty} &= e^{-\omega x} \end{aligned} \quad (3.46)$$

3.9.2.1 .Flux thermique

Le flux de chaleur échangé à travers la section S située à la distance x de la base de l'ailette est déterminé en utilisant la loi de Fourier.

$$\begin{aligned} q_x &= -\lambda S \frac{d\bar{T}}{dx} = \lambda S \omega (T_0 - T_\infty) e^{-\omega x} \\ q_x &= \sqrt{\lambda S h P} (T_0 - T_\infty) e^{-\omega x} \end{aligned} \quad (3.47)$$

La valeur maximale du flux à la base de l'ailette est ($x = 0$) :

$$q_{max} = \sqrt{\lambda S h P} (T_0 - T_\infty) \quad (3.48)$$

3.9. 3.Ailette courte et mince :

C'est le cas d'une ailette à longueur finie, mais la chaleur évacuée par l'extrémité est négligeable ou bien cette extrémité est isolée. Les conditions aux limites sont :

$$x = 0 \quad , T = T_0$$

$$x = L \quad , \quad -\lambda \frac{dT}{dx} = 0$$

Avec le changement de variable on a les conditions aux limites :

$$x = 0 \quad , \quad \bar{T} = T_0 - T_\infty = \bar{T}_0 \quad (3.49a)$$

$$x = L \quad , \quad \frac{d\bar{T}}{dx} = 0 \quad (3.49b)$$

En introduisant ces conditions dans l'équation (3.43) avec sa dérivée, on obtient les coefficients C_1 et C_2 :

$$C_1 = \bar{T}_0 \frac{e^{-\omega L}}{e^{\omega L} + e^{-\omega L}} \quad (3.50a)$$

$$C_2 = \bar{T}_0 \frac{e^{\omega L}}{e^{\omega L} + e^{-\omega L}} \quad (3.50b)$$

En substituant les coefficients C_1 et C_2 dans l'équation (3.43) et l'équation du champ de température devient :

$$\bar{T}(x) = \bar{T}_0 \frac{e^{-\omega L}}{e^{\omega L} + e^{-\omega L}} e^{\omega x} + \bar{T}_0 \frac{e^{\omega L}}{e^{\omega L} + e^{-\omega L}} e^{-\omega x} \quad (3.51)$$

$$\bar{T}(x) = \bar{T}_0 \frac{ch\omega(L-x)}{ch\omega L} \quad (3.52)$$

$$\text{Et } \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \frac{ch\omega(L-x)}{ch\omega L} \quad (3.53)$$

3.9.3.1. Flux thermique

Le flux de chaleur dans une section située a une distance x de la base de l'ailette est :

$$q_x = -\lambda S \frac{d\bar{T}}{dx} = \lambda S \omega (T_0 - T_\infty) \frac{sh\omega(L-x)}{ch\omega L}$$

$$q_x = \sqrt{\lambda S h P} (T_0 - T_\infty) \frac{sh\omega(L-x)}{ch\omega L} \quad (3.54)$$

Le flux maximal a $x = 0$ est :

$$q_{max} = \sqrt{\lambda S h P} (T_0 - T_\infty) th\omega L \quad (3.55)$$

3.9 .4 .Ailette courte et épaisse :

C'est le cas d'une ailette à longueur finie, en tenant compte des échanges thermiques par convection à l'extrémité de l'ailette. Le flux de chaleur s'écoulant par conduction à la face $x = L$ doit être égal au flux de chaleur transmis par convection de la section à l'extrémité de l'ailette au fluide. Donc, les conditions aux limites sont :

$$x = 0 \quad , T = T_o$$

$$x = L \quad , -\lambda S \frac{dT}{dx} = hS(T - T_\infty)$$

Avec changement de variable on obtient :

$$x = 0 \quad , \quad \bar{T} = T_o - T_\infty = \bar{T}_o \quad (3.56a)$$

$$x = L \quad , \quad -\lambda S \frac{d\bar{T}}{dx} = hS\bar{T} \quad (3.56b)$$

En substituant ces conditions dans l'équation (3.43) avec sa dérivée, on obtient le système :

$$\bar{T}_o = C_1 + C_2 \quad (3.57a)$$

$$\lambda(C_1\omega e^{\omega L} - C_2\omega e^{-\omega L}) = h(C_1\omega e^{\omega L} + C_2\omega e^{-\omega L}) \quad (3.57b)$$

On posant : $\alpha = \frac{h}{\lambda\omega}$

$$C_1 = \bar{T}_o \frac{e^{-\omega L(1-\alpha)}}{e^{\omega L(1+\alpha)} + e^{-\omega L(1-\alpha)}} \quad (3.58a)$$

$$C_2 = \bar{T}_o \frac{e^{\omega L(1+\alpha)}}{e^{\omega L(1+\alpha)} + e^{-\omega L(1-\alpha)}} \quad (3.58b)$$

D'où l'expression du champ de température le long de l'ailette est :

$$\bar{T}(x) = \bar{T}_0 \frac{e^{-\omega L(1-\alpha)}}{e^{\omega L(1+\alpha)} + e^{-\omega L(1-\alpha)}} e^{\omega x} + \bar{T}_0 \frac{e^{\omega L(1+\alpha)}}{e^{\omega L(1+\alpha)} + e^{-\omega L(1-\alpha)}} e^{-\omega x}$$

$$\bar{T}(x) = \bar{T}_0 \frac{ch(L-x) + \alpha sh(L-x)}{ch\omega L + \alpha sh\omega L} \quad (3.59)$$

$$\text{Et } \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \frac{ch\omega(L-x) + \alpha sh\omega(L-x)}{ch\omega L + \alpha sh\omega L} \quad (3.60)$$

3.9.4.1. Flux thermique

En utilisant la loi de Fourier, on obtient l'expression de flux de chaleur pour une section située à une distance x de la base de l'ailette :

$$q_x = -\lambda S \frac{d\bar{T}}{dx} = \lambda S \omega (T_0 - T_\infty) \frac{ch\omega(L-x) + \alpha sh\omega(L-x)}{ch\omega L + \alpha sh\omega L}$$

$$\text{Et } q_x = \sqrt{\lambda ShP} (T_0 - T_\infty) \frac{ch\omega(L-x) + \alpha sh\omega(L-x)}{ch\omega L + \alpha sh\omega L} \quad (3.61)$$

Le flux maximal a $x = 0$ est :

$$q_{max} = \sqrt{\lambda ShP} (T_0 - T_\infty) \frac{th\omega L + \alpha}{1 + \alpha th\omega L} \quad (3.62)$$