Chapitre 2 : Lois de base des transferts de chaleur

2. 1. Conduction thermique:

La relation fondamentale du transfert thermique par conduction a été proposée par le savant français Fourier en 1822. Elle établit que le flux thermique est égal au produit des trois quantités :

$$q = -\lambda s \overrightarrow{grad}\,(T) \qquad (2.1)$$

Avec :

q: le flux de chaleur, [w].

S : l'aire de section de passage du flux thermique, [m^2]

λ : la conductivité thermique, [w/ºC.m].

$\overrightarrow{grad}\,(T)$: le gradient de température [ºC/m].

En conséquence, l'équation élémentaire de la conduction unidimensionnelle en régime stationnaire s'écrit ;

$$q_x = -\lambda\, \mathrm{s} \frac{dT}{dx} \qquad (2.2)$$

Les valeurs de la conductivité thermique λ de certains matériaux sont données dans le tableau (2.1).

Tableau (2.1) : La conductivité thermique λ de certains materiaux.

Matériaux	**Conductivité λ (w/ºC.m)**
Argent	419
Cuivre	386

Aluminium	204
Béton	1.4
Verre	1.0
Bois	0.12-0.23
Polystyrène (mousse)	0.03-0.045
Air	0.026

2.2. Convection thermique:

Le flux thermique transmit par convection entre une surface et un fluide est donné par la relation proposée par Newton en 1701 :

$$q = hS(T_p - T_\infty) \tag{2.3}$$

Avec :

q : Flux thermique [w]

S : Aire de la surface de contact solide /fluide [m^2].

T_∞ : Température du fluide loin de la surface. [°C]

T_p : Température de surface du solide. [°C]

h : Coefficient de transfert thermique par convection (conductance thermique).

Ce coefficient prend différentes valeurs tels que ;

- Air , convection libre : 5 – 25 kcal/h.m^2.°C
- eau, convection forcée : 250 – 10000 kcal/h.m^2.°C
- huile, convection forcée : 50 – 1500 kcal/h.m^2.°C

2.3. Rayonnement thermique:

Le flux thermique quittant une surface sous forme de chaleur rayonnée dépend de la température absolue et de la nature de la surface. Pour une surface d'un corps noir il est donné par :

$$q = \sigma s T^4 \tag{2.4}$$

Avec :

S : Aire de la surface, [m^2]

T : la température absolue, [K]

σ : constante de Stefan-Boltzmann :5.65 * 10^{-8} w/ m^2.k^4

Le flux de chaleur transmit d'un corps gris d'une température T_1 à un corps noir de T_2 entourant le premier est :

$$q = \sigma\varepsilon(T_1^4 - T_2^4) \tag{2.5}$$

Avec :

ε : le facteur d'émission de la surface grise.

2.4. Formulation d'un problème de transfert thermique :

2.4.1. Stockage d'énergie :

Le stockage d'énergie dans un corps correspond à une augmentation de son énergie interne au cours du temps :

$$q_{st} = \rho\ V\ C\ \frac{\partial T}{\partial t} \tag{2.6}$$

Avec :

q_{st} : Flux thermique stocké [w] ,

ρ: Masse volumique [kg/m^3]

V : Volume [m^3]

C : Chaleur massique [J /kg.°C]

t : Temps [s]

2.4.2. Génération d’énergie :

Elle intervient lorsqu’une autre forme d’énergie (chimique, électrique, mécanique) est convertie en énergie thermique. On peut l’écrire sous la forme ;

$$q_g = g.V \qquad (2.7)$$

Avec :

q_g : Flux thermique généré. [w]

g : Densité volumique d’énergie générée. [w/m^3]

V : Volume [m^3]

2.4.3. Bilan d’énergie :

Il faut tout d’abord définir un système (s) par ses limites dans l’espace et il faut ensuite établir l’inventaire des différents flux de chaleur qui influent sur l’état du système et qui peuvent être :

q_{st}: Flux de chaleur stocké

q_g : Flux de chaleur généré

q_e : Flux de chaleur entrant

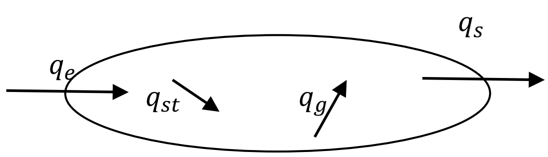

Fig.2.1.Système et bilan énergétique

q_s : Flux de chaleur sortant

On applique le 1[er] principe de la thermodynamique pour établir le bilan d'énergie du système :

$$q_{st} = q_g + (q_e - q_s) = q_g + q_{net} \tag{2.8}$$

La loi de la conservation de l'énergie à ce volume dit que la somme de la chaleur qui passe par ce volume par conduction q_{net} et de celle produite par les sources internes de chaleur q_g dans l'intervalle de temps dt est égale à la variation de l'énergie interne de la substance contenue dans le volume considéré.

2.5. Equation fondamentale de la conduction :

Pour établir l'équation différentielle de la conduction, on va appliquer la loi de la conservation d'énergie (bilan thermique) au corps considéré. Soit un volume élémentaire (dv) de forme parallélépipédique ayant les cotes dx, dy et dz dans un système $(oxyz)$, avec un intervalle élémentaire de temps (dt).

Le bilan thermique est donné ;

$$q_{st} = q_g + q_{net} \tag{2.9}$$

Avec

$$q_{st} = \rho\, dV\, C\, \frac{\partial T}{\partial t} \tag{2.10}$$

$$q_{st} = g\, dV \tag{2.11}$$

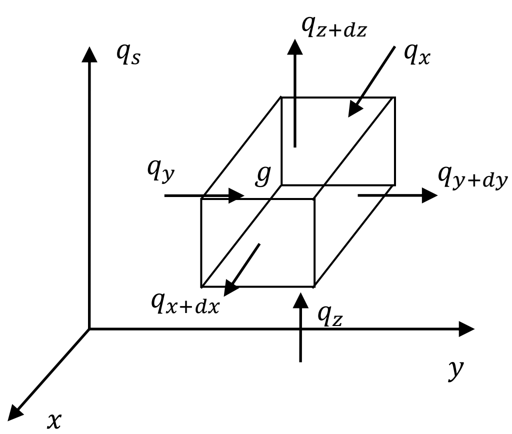

Fig.2.2.volume élémentaire d'un corps

$$q_{net} = (q_x - q_{x+dx}) + \left(q_y - q_{y+dy}\right) + (q_z - q_{z+dz}) \tag{2.12}$$

La fonction q_{x+dx} est continue sur l'intervalle considéré (dx) et donc peut être développée sous forme d'une série de Taylor dont on ne retient que les deux premiers termes ;

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x}dx + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 q_x}{\partial^2 x}d^2x + \cdots = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x}dx \tag{2.13}$$

Donc ; $q_x - q_{x+dx} = -\frac{\partial q_x}{\partial x}dx$ (2.14)

On applique la loi de Fourier pour la conduction suivant (Ox) on obtient ;

$$q_x = -\lambda dxdydz\ \frac{\partial T}{\partial x} \tag{2.15}$$

On remplace (2.15) dans (2.14) on obtient ;

$$q_x - q_{x+dx} = \frac{\partial}{\partial x}(\lambda\frac{\partial T}{\partial x})dxdydz \tag{2.16}$$

Et pour les directions Oy et Oz on a ;

$$q_y - q_{y+dy} = \frac{\partial}{\partial y}(\lambda\frac{\partial T}{\partial y})dxdydz \tag{2.17}$$

$$q_z - q_{z+dz} = \frac{\partial}{\partial z}(\lambda\frac{\partial T}{\partial z})dxdydz \tag{2.18}$$

On remplace (2.16), (2.17), (2.18) , (2.10) et (2.11) dans (2.9) ,on obtient ;

$$\rho\ dV\ C\ \frac{\partial T}{\partial t} = g\ dV + \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}(\lambda\frac{\partial T}{\partial z})\right]dV$$

$$\rho\, C\, \frac{\partial T}{\partial t} = g\, + \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}(\lambda \frac{\partial T}{\partial z}) \qquad (2.19)$$

Cette équation exprime l'équation fondamentale de la conduction thermique dans les coordonnées cartésiennes.

2.5.1. Formes particulières de l'équation fondamentale de la conduction:

Les formes simplifiées de l'équation fondamentale de la conduction peuvent être obtenue en acceptant certaines hypothèses simplificatrices concernant la variation des caractéristiques thermodynamiques avec la température, le type de régime, l'existence ou l'absence des sources internes. Pour les caractéristiques thermodynamiques on peut déterminer leur valeur moyenne sur l'intervalle de variation de la température $(T_{max} - T_{min})$ par ;

$$Z_m = \frac{1}{T_{max} - T_{min}} \int_{T_{min}}^{T_{max}} Z(T)dT \qquad (2.20)$$

Z désignant les grandeurs ; ρ et C.

L'équation fondamentale peut se simplifier dans un certain nombre de cas :

- Si λ est constant, le régime est variable et pas de source interne, on obtient l'équation de Fourier qui s'écrit ;

  $$a\nabla^2 T = \frac{\partial T}{\partial t} \qquad (2.21)$$

  Avec : $a = \frac{\rho}{\lambda C}$ est appelé la diffusivité thermique [m^2/s] qui caractérise la vitesse de propagation d'un flux de chaleur dans un matériau.

- Si λ est constante, le régime est permanent et il y a une source interne, on obtient l'équation de Poisson qui s'écrit ;

$$\nabla^2 T + \frac{g}{\lambda} = 0 \qquad (2.22)$$

- Si λ est constante, le régime est permanent et pas de source interne, on obtient l'équation de Laplace qui s'écrit ;

$$\nabla^2 T = 0 \qquad (2.23)$$

Ou , $\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$ est appelé l'operateur Laplacien.

2.5.2 Equation fondamentale de la conduction en coordonnées cylindrique et sphérique:

Pour un corps cylindrique, il suffit de transformer l'operateur Laplacien en coordonnées cylindriques (r, θ, z).

$$\nabla^2 T = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \qquad (2.24)$$

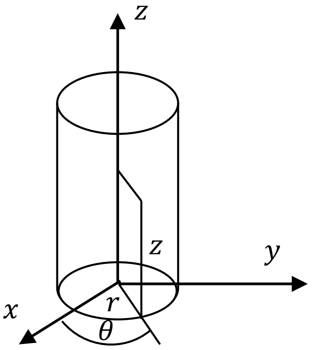

Fig.2.3. Coordonnées cylindriques

Dans les coordonnées sphériques, l'operateur Laplacien s'écrit sous la forme :

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\sin\varphi\frac{\partial T}{\partial \varphi}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{1}{\sin^2\varphi}\frac{\partial T}{\partial \theta} \qquad (2.25)$$

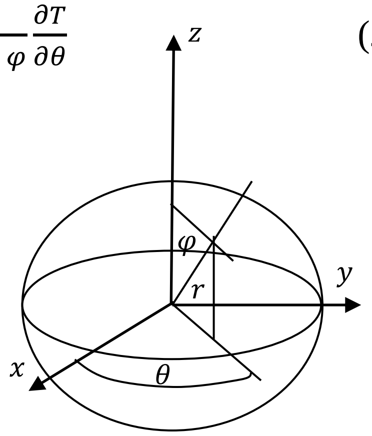

Fig.2.4. Coordonnées sphériques

2.6. Conditions d'unicité :

Pour déterminer le champ de température dans un corps étudie, il est nécessaire de compléter l'équation différentielle de la conduction par un supplément d'information constituant les conditions d'unicité. Il y a plusieurs types de conditions ;

- Conditions géométriques qui caractérisent la forme du corps (plane, cylindrique, sphérique).
- Conditions initiales qui décrivent le champ de température dans le matériau a l'instant initial au début de processus.
- Conditions aux limites qui caractérisent l'intersection du corps étudie avec son milieu extérieur.