جامعة الجيلالي بونعامة بخميس مليانة

معهد العلوم الاقتصادية السنة الأولى LMD الفرعان: 3 و4 (2021/20)

واجب منزلي في الرياضيات 1

يرد يوم 21 مارس 2021

20

مجموعة..... فوج....... بطاقة رقم.............................. الاسم واللقب...

تمرين 1 $[4.5]$ **ادرس النهاية عند** $\alpha = +\infty$ **للدالة** f **في كل حالة من الحالات الآتية:**

$$a)\ f(x) = \frac{2\ln x - 1}{\ln x + 1} \quad ; \quad b)\ f(x) = \frac{e^x - 1}{1 + e^x} \quad ; \quad c)\ f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - x$$

....

....

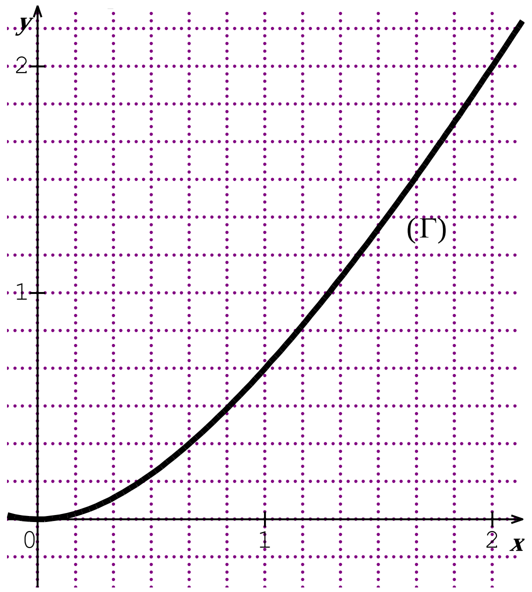
....

....

....

....

تمرين 2 $[6.5]$ يرمز (Γ) لمنحنى $f(x) = \dfrac{2x^2}{x+2}$ في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.



(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$:
$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{6}{5} \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n^2}{u_n + 2} \quad , n \geq 0 \end{cases}$$

1. **المشتقة** $f'(x)$ ، **واستنتج بأن** f **متزايدة على** $[0 ; +\infty[$

....

....

2. **أحسب** u_1 **و** u_2 **و** u_3. **ما هي النهايات الممكنة لـ** (u_n) **؟**

....

....

....

....

أنشئ المستقيم (Δ) **الذي معادلته** $y = x$ **في المعلم** $(O, \vec{i}, \vec{j})$، **ثم استخدمه مع المنحنى** (Γ) **لإنشاء النقط** A_0 **و** A_1 **و** A_2 **و** A_3 **على** (Γ)، **ذات الفواصل** u_0 **و** u_1 **و** u_2 **و** u_3 **على الترتيب.** (على الشكل المرفق)

3. **أثبت بالتراجع من أجل كل** n **من** $\mathbb{N}$ **أن** $0 < u_n \leq 2$.

....

....

....

4. بين أن المتتالية (u_n) متناقصة، واستنتج تقاربها . ما هي نهايتها ؟

....

....

....

تمرين 3 [4] 1. **عين كل الدوال الاصلية للدوال الآتية على مجموعات تعريفها**

$$f(x)=(2x-3)(x^2-3x+4)^2 \ , \quad g(x)=\sqrt{4x-3} \ , \quad h(x)=e^{3x-2}$$

....

....

....

....

....

2. **أدرس الاستمرارية وقابلية الاشتقاق عند** $\alpha=0$ **للدالة** f :

$$f(x)=\begin{cases} 1-xe^{-x} \ , \ x\le 0 \\ x^2\ln x-x+1, \ x>0 \end{cases}$$

....

....

....

....

....

....

....

تمرين 4 [5] **لتكن** f **الدالة المعرفة على** $]1,+\infty[$ **بالشكل:** $f(x)=\int_1^x \frac{\ln(1+t)}{t}dt$

1. **برر وجود التكامل ثم ادرس تغيرات** f .

....

....

....

....

2. **بملاحظة** $t\le 1+t\le 2t$ $\forall t\in[0,+\infty[$. **عين حصرا لـ** $f(x)$ **على** $[1,+\infty[$، **واستنتج** $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

....

....

....

....

....

....

جامعة الجيلالي بونعامة بخميس مليانة

معهد العلوم الاقتصادية　　　السنة الأولى LMD　　　الفرعان: 3 و4　　　(2021/20)

تصحيح EMD 1 في الرياضيات 1

تمرين 1　[4.5]

- في الحالة $\alpha=+\infty$ ، $f(x)=\dfrac{2\ln x-1}{\ln x+1}$، لدينا حالة عدم التعيين $\dfrac{+\infty}{+\infty}$.

نحلل $f(x)$ من أجل $x\neq 0$ يكون: $f(x)=\dfrac{(\ln x)(2-1/\ln x)}{(\ln x)(1+1/\ln x)}=\dfrac{2-1/\ln x}{1+1/\ln x}$ ، ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$

- بالنسبة للحالة $\alpha=\mp\infty$ ، $f(x)=\dfrac{e^x-1}{1+e^x}$ ، لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ فيكون $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x(1+e^{-x})}=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$

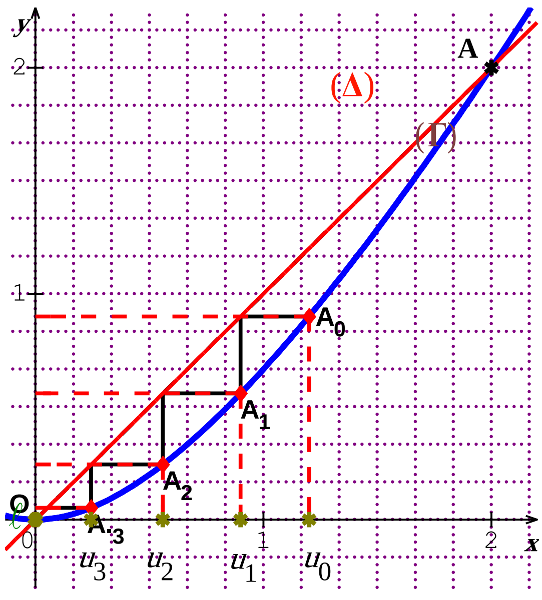
وبما أن $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$

- بالنسبة للحالة $\alpha=+\infty$ $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}-x$ ، إذا كان $0<x$:

$$f(x)=\frac{(\sqrt{x^2+x+1}-x)(\sqrt{x^2+x+1}+x)}{\sqrt{x^2+x+1}+x}=\frac{x^2+x+1-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x}=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}$$

ومنه $f(x)=\dfrac{x(1+1/x)}{|x|\sqrt{1+1/x+1/x^2}+x}=\dfrac{1+1/x}{\sqrt{1+1/x+1/x^2}+1}$ ومنه أيضا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{1}{2}$

تمرين 2　[6.5]



1. الدالة f تقبل الاشتقاق على $[0;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{4x\cdot(x+2)-2x^2}{(x+2)^2}=\frac{2x\cdot(x+4)}{(x+2)^2}$$

$0\leq f'(x)$ مهما كان $0\leq x$. ومنه f متزايدة على $[0;+\infty[$

2. • **بالحساب**، نجد: $u_1=\dfrac{6}{5}=1.2$ ، $u_1=\dfrac{9}{10}=0.9$ ،

$u_2=\dfrac{81}{145}\approx 0.56$ ، $u_3=\dfrac{13122}{53795}\approx 0.24$.

• إذا تقاربت المتتالية (u_n) نحو ℓ ، فإن ℓ تحقق: $\ell=\dfrac{2\ell^2}{\ell+2}$.

أي $2\ell^2-\ell^2-2\ell=\ell\cdot(\ell-2)=0$. إذا تقاربت (u_n)

فإن نهايتها ستكون هي إما $\ell=0$ وإما $\ell=2$

3. نستخدم المنحنى (Γ) والمستقيم (Δ) : $y=x$ في إنشاء النقط A_0 و A_1 و A_2 و A_3 على (Γ) (**الرسم**)

4. بدء التدريج مُحقق. بفرض أن $0<u_n\leq 2$ بما أن f متزايدة: $f(0)<f(u_n)\leq f(2)$ وبالتالي

$0<f(u_n)\leq 2$　　ومنه $0<u_{n+1}\leq 2$ وهو المطلوب. إذن، $\forall n\in\mathbb{N}, 0<u_n\leq 2$. والمتتالية (u_n) محدودة (من الأعلى والأسفل)

5. إشارة: $(u_n+2)/(u_n-2)\, u_n = u_n - (u_n+2)/ {}^2_n u\, 2 = u_n - u_{n+1}$ ، سالبة على المجال $]2;0[$ الذي يشمل جميع حدود (u_n)، وبالتالي (u_n) متناقصة من أجل كل n من $\mathbb{N}$.

وبما أن (u_n) محدودة من الأسفل، فهي إذن متقاربة. و (u_n) تتقارب نحو 0، $\ell = 0$ ، أي $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

تمرين 3 [4]

1. • في $f(x)$ معرفة على $\mathbb{R}$. إذا وضعنا $u(x) = x^2 - 3x + 4$، يكون $u'(x) = 2x - 3$ ، إذن $f = u'u^2$

ومنه الدالة الأصلية $F(x) = \frac{1}{3}(x^2 - 3x + 4)^3 + k \quad \forall x \in \mathbb{R}$

• تكون الدالة $g(x)$ معرفة على $D_g = \left[\frac{3}{4}, +\infty\right[$ و $f = \frac{1}{4}u'\sqrt{u}$ حيث $u(x) = 4x - 3$

ومنه الدالة الأصلية $G(x) = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}(4x-3)\sqrt{4x-3} + k \quad \forall x \in \left[\frac{3}{4}, +\infty\right[$

• مجموعة تعريف الدالة $h(x) = e^{3x-2}$ هي $\mathbb{R}$ و $h = \frac{1}{3}u'e^u$ حيث $u(x) = 3x - 2$

ومنه الدالة الأصلية $H(x) = \frac{1}{3}e^{3x-2} + k \quad \forall x \in \infty$.

2. لدينا $f(0) = 1$ ، ومن أجل $x \le 0$ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(1 - x\,e^{-x}) = 1 = f(0)$

ولدينا $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(x^2\ln x - x + 1) = 1 = f(0)$ لأن $\lim\limits_{x\to 0} x^2\ln x = 0$ ومنه f مستمرة عند 0. لدينا:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{(1 - x\,e^{-x}) - 1}{x} = -1 \text{ و } \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{(x^2\ln x - x + 1) - 1}{x} = -1$$

النهايتان متساويتين ومنه f تقبل الاشتقاق عند 0 . و $f'(0) = -1$.

تمرين 4 [5]

1. الدالة $x \mapsto \ln(1+x)$ مستمرة على $]1, +\infty[$ ، وكذاك الدالة $\varphi : x \mapsto \frac{\ln(1+t)}{t}$ مستمرة على $]1, +\infty[$. ومنه يكون التكامل معرفا من أجل كل x من $]1, +\infty[$. والدالة f هي عبارة التكامل الوحيد لـ φ التي تنعدم عند 1. و f تقبل الاشتقاق : $\forall x \in [1, +\infty[\quad f'(x) = \varphi(x) = \frac{\ln(1+t)}{t}$

على $]1, +\infty[$، $0 < x$ ومنه $1 < x + 1$. ومنه $0 < \ln(1+t)$ والدالة f تقبل الاشتقاق على $]1, +\infty[$

وبما أن $0 < f'(x)$ فإن f متزايدة على $]1, +\infty[$.

2. من أجل كل t من $]1, +\infty[$، لدينا $t \le 1 + t \le 2t$ إذن $\frac{\ln t}{t} \le \frac{\ln(1+t)}{t} \le \frac{\ln(2t)}{t}$

إذا كان $0 \le x$ ، يكون ومن كل t من $]1, x[$ يكون $\int_1^x \frac{\ln t}{t}dx \le \int_1^x \frac{\ln(1+t)}{t}dx \le \int_1^x \frac{\ln 2 + \ln t}{t}dx$

إذن إذا كان $0 \le x$ ، $\left[\frac{1}{2}(\ln t)^2\right]_1^x \le f(x) \le \left[(\ln 2)(\ln t) + \frac{1}{2}(\ln t)^2\right]_1^x$

ومنه $\forall x \in [1, +\infty[\quad \frac{1}{2}(\ln x)^2 \le f(x) \le (\ln 2)(\ln x) + \frac{1}{2}(\ln x)^2$.

وأخيرا نجد $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$. لأن $\lim\limits_{x\to +\infty}(\ln x)^2 = +\infty$