جامعة الجيلالي بونعامة بخميس مليانة

معهد العلوم الاقتصادية | السنة الأولى LMD | الفروع 1، 2، 3 | (2015/14)

الرياضيات 1 | 1_{30}سا : | 2015-01-10

EMD 01

تصحيح مُختصر .

ضع إشارة (×) في الخانة التي تُعبر عن الإجابة الصحيحة، أو أكمل الفراغات بإجابات صحيحة

تمرين 1 [2.5]

- f **دالة معرفة على** $\mathbb{R}$ **بالشكل** : $f(x)=\dfrac{e^{4x^2-1}}{e^{2x-1}}$ 0.5

من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x)=e^{2x+1}$ ☒ ، $f'(x)=f(x)$ ☐ ، f متناقصة على $]-\infty,0]$ ☐

- f **دالة معرفة على** $]0,+\infty[$ **بالشكل** : $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ 0.5

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\infty$ ☐ ، $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$ ☒ ، $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ ☐

- f **دالة معرفة على** $[0,+\infty[$ **بالشكل** : $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x)}{x} & , x\neq 0\\ 1 & , x=0\end{cases}$ 0.5

الدالة f مستمرة عند 1 ☒ ، الدالة f تقبل الاشتقاق عند 1 ☐ ، f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ☐

- f **دالة معرفة على** $\mathbb{R}$ **بالشكل** : $f(x)=\ln(5+e^{-x})+\dfrac{3}{4}x$ 0.5

من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x)=\ln(5e^{x}-1)-\dfrac{1}{4}x$ ☒ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ ☐ ، f متزايدة على $\mathbb{R}$ ☐

- **حقق نظرية التزايدات المنتهية على الدالة** $f(x)=1-e^{-x}$ **في المجال** $[-1;+1]$ 0.5

$f(x)$ مستمرة على المجال $[-1;+1]$، و $f(x)$ تقبل الاشتقاق على $]-1;+1[$.

حسب نظرية التزايدات المنتهية، يوجد على الأقل $\alpha\in]-1;+1[$: $f'(\alpha)=\dfrac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}$

إذن نحل في $]-1;+1[$، المعادلة $f'(x)=\dfrac{(1-e^{-1})-(1-e)}{2}$ التي تكافئ $e^{-x}=\dfrac{e-e^{-1}}{2}$

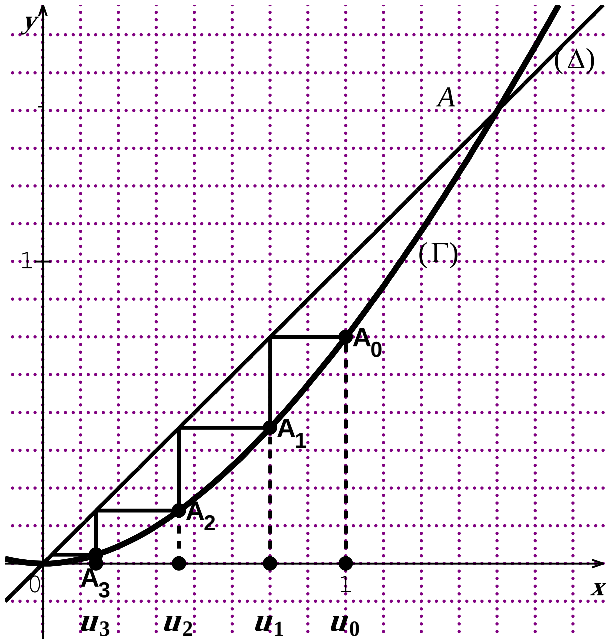
ومنه الحل الوحيد $x=\alpha=\ln\dfrac{2}{e-e^{-1}}\approx-0.16$

تمرين 2 [7]

أ) • نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{3x^2}{x+3}$

يرمز (Γ) لتمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$. كما هو مبين في الشكل أدناه:

1



1

- أحسب المشتقة $f'(x)$ ، واستنتج بأن f متزايدة على $[0;+\infty[$.

• الدالة f تقبل الاشتقاق على $[0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{6x\cdot(x+3)-3x^2}{(x+3)^2}=\dfrac{3x\cdot(x+6)}{(x+3)^2}$

ومنه $0\leq f'(x)$ مهما كان $0\leq x$. والدالة f متزايدة على $[0;+\infty[$

• (Δ) المستقيم الذي معادلته $y=x$. عين نقطة تقاطع (Γ) مع (Δ). أرسم (Δ).

فواصل نقط تقاطع تقاطع (Γ) مع (Δ) تحقق : $x=\dfrac{3x^2}{x+3}$ وهي تكافئ $x\cdot(2x-3)=0$

والنقطتان المطلوبتان هما : $O(0;0)$ و $A(\frac{3}{2};\frac{3}{2})$

1

ب) • نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$، بالشكل: $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=\dfrac{3u_n^2}{u_n+3} \quad ,n\geq 0 \end{cases}$

1

- أحسب الحدود u_0، u_1، u_2، u_3. ما هي النهايات الممكنة للمتتالية (u_n) ؟

• بالحساب، نحصل على: $u_0=1$ ، $u_1=\dfrac{3}{4}=0.75$ ، $u_2=\dfrac{9}{20}=0.45$ ، $u_3=\dfrac{81}{460}\approx 0.18$.

• إذا تقاربت المتتالية (u_n) نحو ℓ، فإن ℓ تحقق: $\ell=\dfrac{3\ell^2}{\ell+3}$ ، ومنه $3\ell^2-\ell^2-3\ell=\ell\cdot(2\ell-3)=0$.

1

وبالتالي إذا تقاربت (u_n) فإن نهايتها ستكون هي إما $\ell=0$ وإما $\ell=\dfrac{3}{2}$.

- استخدم البيان (Γ) والمستقيم (Δ) لتحديد النقط من (Γ): A_0، A_1، A_2، A_3 ذات الفواصل u_0، u_1، u_2، u_3 على الترتيب.

– برهن بأنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون لدينا $0 < u_n \leq 1$.

• لدينا: $\inf_{[0;+1]} f = \frac{3}{4}$ و $\sup_{[0;+1]} f = 1$ ومنه $f\left([0,+1]\right) = \left[\frac{3}{4},+1\right] \subset \left]0,+1\right]$

وأخيرا $\boxed{\forall n \in \mathbb{N};\quad 0 < u_n \leq 1}$. أي ان المتتالية (u_n) محدودة. **1**

– بين أن المتتالية (u_n) متناقصة، استنتج بأنها متقاربة . ما هي نهايتها ؟

• نضع: $u_n = x$ ، $u_{n+1} = f(x)$ ، فيكون $u_{n+1} - u_n = f(x) - x = \frac{3x^2}{x+3} - x = \frac{x\cdot(2x-3)}{x+3}$.

إذن $f(x) - x < 0$ مهما كان $x \in \left]0;1\right]$. وبالتالي (u_n) تحقق : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N};\quad u_{n+1} - u_n < 0}$

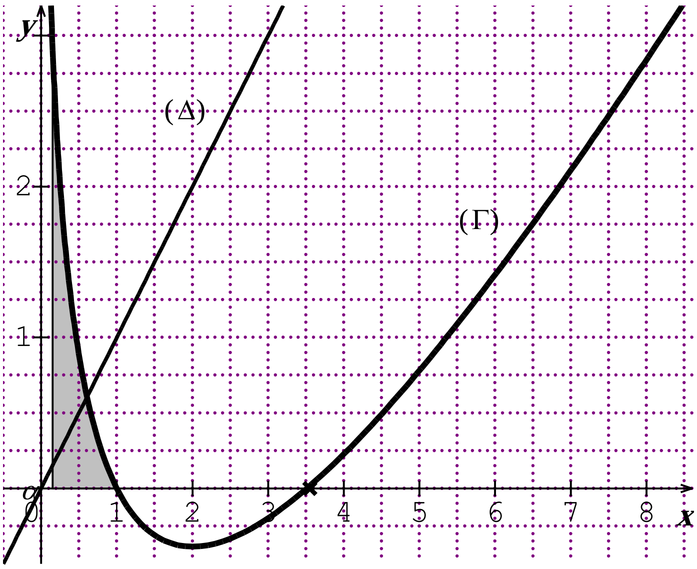
والمتتالية (u_n) متناقصة تماما مهما كان $n \in \mathbb{N}$. **1**

نتيجة: بما أن (u_n) متناقصة ومحدود من الأدنى، فهي متقاربة، (u_n) تتقارب نحو النهاية $\ell = 0$. **0.5**

تمرين 3 [6]

أ) • نعتبر الدالة f المعرفة على $\left]0;+\infty\right[$ كما يلي : $f(x) = x - 1 - 2\ln x$

يرمز (Γ) لتمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$. كما هو مبين في الشكل أدناه:



1

– بين أن (Γ) يقبل فرعا لانهائيا عند $+\infty$ باتجاه مستقيم مائل (Δ)، يُطلب تعيين معادلة له. أرسم (Δ) .

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x - 1 - 2\ln x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\cdot\left(1 - \frac{1}{x} - 2\frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$ **1.5**

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{x} - 2\frac{\ln x}{x}\right) = 1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x) - x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}(-1 - 2\ln x) = +\infty$

وبالتالي المنحنى (Γ) يقبل فرعا لانهائيا عند $+\infty$ باتجاه المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$.

ب) • نضع
$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + x - 2x\ln x\ , & x > 0 \\ 0\ , & x = 0 \end{cases}$$

– أدرس استمرارية الدالة F عن يمين $x_0 = 0$. ثم أحسب $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{F(x) - F(0)}{x}$. ماذا تستنتج ؟

• الدالة F مستمرة عن يمين الصفر، لأن $F(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} F(x) = 0$ **1**

• لدينا $\lim_{x\to 0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{2}x+1-2\ln x\right)=+\infty$.

1

ومنه F لا تقبل الاشتقاق عن يمين الصفر.

- ليكن α من المجال $]0;1[$. أحسب $S(\alpha)=\int_{\alpha}^{1} f(x)\,dx$. ما هي النهاية $\lim_{\alpha\to 0^+} S(\alpha)$ ؟

ولدينا $S(\alpha)=\int_{\alpha}^{1} f(x)\,dx=\left[F(x)\right]_{\alpha}^{1}=\left[\frac{1}{2}x^2+x-2x\ln x\right]_{\alpha}^{1}=\boxed{\frac{3}{2}-\left(\frac{1}{2}\alpha^2+x-2\alpha\ln\alpha\right)}$

1

ولدينا أيضا $\lim_{\alpha\to 0^+} S(\alpha)=\lim_{\alpha\to 0^+}\left(\frac{3}{2}-\left(\frac{1}{2}\alpha^2+x-2\alpha\ln\alpha\right)\right)=\frac{3}{2}$

1

تمرين 4 [5]

• لتكن المعادلة التفاضلية: $y'(x)+y(x)=(x+1)e^{-x}$ ... (1)

0.5

المعادلة التفاضلية المتجانسة المرفقة بـ(1) هي : $y'(x)+y(x)=0$ ... (2) صحيح ☒ ، خطأ ☐ .

الحل العام y_1 للمعادلة التفاضلية المتجانسة المرفقة بـ(1) هو $y_1=c\cdot e^{-x}$ (c من $\mathbb{R}$) صحيح ☒ ، خطأ ☐

0.5

• أوجد بطريقة تغيير الثابت حلا خاصا y_2 للمعادلة (1)

نوجد حلا خاصا y_2 للمعادلة التفاضلية (1) يكون بالشكل: $\boxed{y_2=c(x)\cdot e^{-x}}$.

0.5

باشتقاق العلاقة الأخيرة: $y'_2=c'(x)\cdot e^{-x}-c(x)\cdot e^{-x}=c'(x)\cdot e^{-x}-y_2$. وبالتعويض في المعادلة (1) :

$y'_2+y_2=(c'(x)\cdot e^{-x}-\cancel{y_2})+\cancel{y_2}=(x+1)e^{-x}$ ومنه $c'(x)\cdot e^{-x}=(x+1)e^{-x}$

أي $c'(x)=x+1$. وبالمكاملة، نحصل على إحدى الدوال الأصلية لـ$c'(x)$ بالشكل:

$$c(x)=\int(x+1)dx=\frac{1}{2}x^2+x$$

0.5

فيأخذ الحل الخاص للمعادلة (1) الشكل الآتي : $\boxed{y_2=c(x)\cdot e^{-x}=\left(\frac{1}{2}x^2+x\right)\cdot e^{-x}}$

1

• الحل العام y للمعادلة (1) : $\boxed{y=y_1+y_2=c\cdot e^{-x}+\left(\frac{1}{2}x^2+x\right)\cdot e^{-x}}$ $(c\in\mathbb{R})$

0.5 0.5

• الحل الخاص y_3 للمعادلة (1) الذي يحقق لشرط الابتدائي $y(0)=1$:

لدينا : $y(0)=1 \Leftrightarrow c\cdot e^0+\left(\frac{1}{2}0^2+0\right)\cdot e^0=1 \Leftrightarrow c=1$. ومنه: $\boxed{y_3=e^{-x}+\left(\frac{1}{2}x^2+x\right)\cdot e^{-x}}$

• تشكيل المعادلة التفاضلية التي تقبل الدالة $z(x)=\left(\frac{1}{2}x^2+x+c\right)\cdot e^{-x}$ حلا لها. (c ثابت اختياري حقيقي)

باشتقاق الدالة: $z(x)=\left(\frac{1}{2}x^2+x+c\right)\cdot e^{-x}$ نجد : $z'(x)=-\left(\frac{1}{2}x^2-1+c\right)\cdot e^{-x}$

0.5

وبحذف الثابت الاختياري c نجد المعادلة التفاضلية المطلوبة بالشكل:

$$z'(x)+z(x)=-\left(\frac{1}{2}x^2-1+c\right)\cdot e^{-x}+\left(\frac{1}{2}x^2+x+c\right)\cdot e^{-x}=(x+1)\cdot e^{-x}$$

وهي نفس المعادلة (1): $\boxed{z'(x)+z(x)=(x+1)\,e^{-x}}$