MATHS 01 / EMD 01

تصحيح نموذجي .....

تمرين 1 [5]

• **كل دالة معرفة ومستمرة، تكون قابلة للاشتقاق** : صحيح ☐ ، خطأ ☒ 1

• f **دالة معرفة على** $]-\frac{1}{3},0[\cup]0,+\infty[$ **بالشكل** : $f(x)=\dfrac{\ln(1+3x)}{x}$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ ☐ ، $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=3$ ☒ 1 ، $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$ ☐

• f **دالة معرفة على** $\mathbb{R}$ **بالشكل** :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x-2}{x-1} & ,\ x\neq 1\\ 2 & ,\ x=1\end{cases}$$

1

الدالة f غير مستمرة عند $x=1$ ☒ ، الدالة f مستمرة عند $x=1$ ☐ ، الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ ☐

• f **دالة معرفة على** $\mathbb{R}$ **بالشكل** : $f(x)=\ln(1+e^{-x})-x$

f متزايدة على $\mathbb{R}$ ☐ ، f متزايدة على $]-\infty,0[$ ☐ ، f متناقصة على $]0,+\infty[$ ☒ 1

• f **دالة معرفة على** $\mathbb{R}$ **بالشكل** :

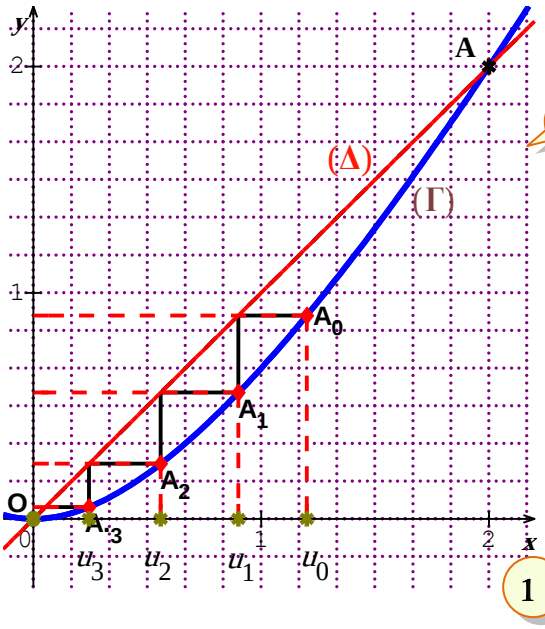
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-x}-1}{x} & ,\ x\neq 0\\ -1 & ,\ x=0\end{cases}$$

1

f **لا** تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ☐ ، f لا تقبل الاشتقاق عند $x=0$ ☐ ، f تقبل الاشتقاق عند $x=0$ ☒

تمرين 2 [6.5]

• يرمز (Γ) لمنحنى الدالة $f(x)=\dfrac{2x^2}{x+2}$ في مستوي منسوب إلى المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.



1. **حساب المشقة** $f'(x)$ **، واستنتاج تزايد** f **على** $[0;+\infty[$

• الدالة f تقبل الاشتقاق على $[0;+\infty[$: 1

$$f'(x)=\frac{4x\cdot(x+2)-2x^2}{(x+2)^2}=\frac{2x\cdot(x+4)}{(x+2)^2}$$

$f'(x)\geq 0$ مهما كان $x\geq 0$. ومنه f متزايدة على $[0;+\infty[$

2. **الحدود** u_1 **و** u_2 **و** u_3 **. والنهايات الممكنة للمتتالية** (u_n)

• بالحساب، نجد: $u_1=\dfrac{6}{5}=1.2$ ، $u_1=\dfrac{9}{10}=0.9$ ،

$u_2=\dfrac{81}{145}\approx 0.56$ ، $u_3=\dfrac{13122}{53795}\approx 0.24$. 0.5

• إذا تقاربت المتتالية (u_n) نحو ℓ، فإن ℓ تحقق: $\ell=\dfrac{2\ell^2}{\ell+2}$. 1

أي $2\ell^2-\ell^2-2\ell=\ell\cdot(\ell-2)=0$. إذا تقاربت (u_n) فإن نهايتها ستكون هي إما $\ell=0$ وإما $\ell=2$

3. **باستخدام المنحنى** (Γ) **والمستقيم** (Δ) **الذي معادلته** $y=x$ **في المعلم** $(O,\vec{i},\vec{j})$، **ننشئ النقط** A_0 **و** A_1 **و** A_2 **و** A_3 **على** (Γ) **ذات الفواصل** u_0 **و** u_1 **و** u_2 **و** u_3 **على الترتيب** (الشكل)

4. **نثبت بالتراجع أنه من أجل كل** n **من** $\mathbb{N}$ **أن** $0<u_n\leq 2$ (1)

بدء التراجع مُحقق. بفرض أن $0<u_n\leq 2$ بما أن f متزايدة: $f(0)<f(u_n)\leq f(2)$ وبالتالي $0<f(u_n)\leq 2$

ومنه $0<u_{n+1}\leq 2$ وهو المطلوب. إذن، $\forall n\in\mathbb{N}, 0<u_n\leq 2$. والمتتالية (u_n) محدودة (من الأعلى والأسفل)

5. **تناقص المتتالية** (u_n) **وتقاربها. وتعيين نهايتها**

إشارة: $u_{n+1}-u_n=2u_n^2/(u_n+2)-u_n=u_n(u_n-2)/(u_n+2)$، سالبة على المجال $]0;2[$ الذي يشمل (1)

جميع حدود (u_n)، وبالتالي (u_n) متناقصة من أجل كل n من $\mathbb{N}$.

وبما أن (u_n) محدودة من الأسفل، فهي إذن متقاربة. و (u_n) تتقارب نحو $\ell=0$، أي $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

تمرين 3 [4.5]

1. **نستخدم طريقة التكامل بالتجزئة لحساب** $\int\frac{1}{x}\ln(x^2)\,dx$

$$\int\frac{1}{x}\ln(x^2)\,dx=\ln(x)\cdot\ln(x^2)-\int\frac{2}{x}\ln(x)dx=\ln(x)\cdot\ln(x^2)-2\int\ln(x)\frac{1}{x}dx$$

$$=\ln(x)\cdot\ln(x^2)-(\ln(x))^2+c \quad /c\in\mathbb{R}$$ (1.5)

2. **تحقيق نظرية التزايدات المنتهية على الدالة** $f(x)=e^{(-x-1)}$ **في المجال** $[0;1]$

$f(x)$ مستمرة على المجال $[0;1]$ و $f(x)$ تقبل الاشتقاق على $]0;1[$. وحسب نظرية التزايدات المنتهية، يوجد (1.5)

على الأقل α من $]0;1[$: $f'(\alpha)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}$. لنحل في $]0;1[$، المعادلة: $f'(x)=\frac{e^{-2}-e^{-1}}{1-0}$

وهي تكافئ $e^{(-x-1)}=e^{-1}-e^{-2}$. ومنه الحل الوحيد $\alpha=1-\ln(e-1)\approx 0.46$ من المجال $]0;1[$.

3. **تعيين القيمة المتوسطة** β **للدالة** $f(x)=e^{(-x-1)}$ **على** $[0;1]$

الدالة $f(x)=e^{(-x-1)}$ مستمرة على $[0;1]$، فهي تقبل المكاملة على $[0;1]$. وحسب نظرية المتوسط، فإنه (1.5)

توجد نقطة β من المجال $]0;1[$ بحيث: $f(\beta)=\int_0^1 e^{(-x-1)}\,dt=\left[-e^{(-x-1)}\right]_0^1=-e^{-2}+e^{-1}$

وبحل المعادلة: $-e^{(-x-1)}=-e^{-2}+e^{-1}$، نجد القيمة المتوسطة المطلوبة وهي: $\beta=1-\ln(e-1)\approx 0.46$

تمرين 4 [4] **في المعادلة التفاضلية:** $(1)\ \ldots\ y'(x)-2\cdot y(x)=e^{-2x}$

- المعادلة التفاضلية المتجانسة المرفقة بـ(1) هي: $(2)\ \ldots\ y'(x)-2\cdot y(x)=0$ صحيح [×]، خطأ [ ] (0.5)
- الحل العام y_1 لـ(2) هو: $y_1(x)=c\cdot e^{-2x^2}$ (c من $\mathbb{R}$) [ ]، $y_1(x)=c\cdot e^{2x}$ (c من $\mathbb{R}$) [×] (1)
- حل خاص y_0 للمعادلة (1) هو: $y_0(x)=-4e^{-2x}$ [×] (1)، $y_0(x)=2e^{-2x}$ [ ] (1)
- الحل العام y للمعادلة (1) هو: $y(x)=y_1(x)+y_0(x)=c\cdot e^{2x}-4e^{-2x}$ (c من $\mathbb{R}$) (0.5)
- الحل الخاص y_2 للمعادلة (1) الذي يحقق لشرط الابتدائي $y(0)=0$، هو $y_2(x)=4(e^{2x}-e^{-2x})$ (1)