

EXAMEN DE RATRAPAGE

تصحيح نموذجي

ضع إشارة (X) في الخانة التي تُعبر عن الإجابة الصحيحة، أو أكمل الفراغات بإجابات صحيحة :

تمرين 1 [4.5] • كل دالة تقبل الاشتقاق، تكون مستمرة. صحيح ☒ ، خطأ ☐

• f دالة معرفة على $]0, +\infty[$ بالشكل : $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$ **1.5**

1.5 ☒ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ ، ☐ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

• f دالة معرفة على $]0, +\infty[$ بالشكل : $f(x) = \ln(1-e^{-x}) + x$

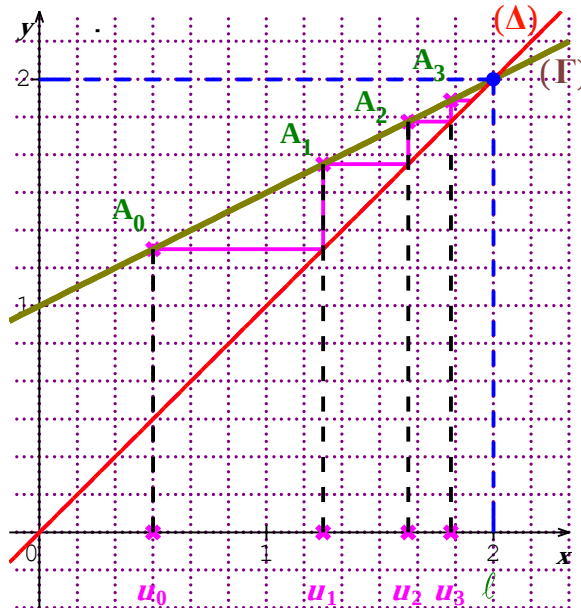
1.5 ☒ f متزايدة على $]0, +\infty[$ ، ☐ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

تمرين 2 [6.5] (أ) يرمز (Γ) للمستقيم الذي معادلته $y = 0.5x + 1$ في مستوى منسوب إلى المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. نعين نقطة تقاطع (Γ) مع المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$. **1**

فاصلة نقطة تقاطع (Γ) و (Δ) تحقق : $x = 0.5x + 1$ ، أي $x = 2$. وإحداثيات النقطة المطلوبة هما $(2; 2)$

(ب) • المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ ، بالشكل : $\begin{cases} u_0 = 0.5 \\ u_{n+1} = 0.5u_n + 1, n \geq 0 \end{cases}$



1.5

1. الحدود u_1 و u_2 و u_3 . والنهايات الممكنة للمتتالية (u_n) **1**

• بالحساب، نحصل على : $u_0 = 0.5$ ، $u_1 = 1.25$ ، $u_2 = 1.625$ ، $u_3 = 1.8125$.

• إذا تقاربت (u_n) نحو ℓ ، فإنها تحقق: $\ell = 0.5\ell + 1$ ، أي $0.5\ell = +1$ ومنه $\ell = 2$. 1

2. استخدام المنحنى (Γ) والمستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ، لإنشاء النقط A_0 و A_1 و A_2 و A_3 على (Γ) ذات الفواصل u_0 و u_1 و u_2 و u_3 على الترتيب (الشكل في الصفحة الأولى)

3. نثبت بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ يكون $0 < u_n < 2$ 1

بدء التراجع مُحقق. نفرض أن $0 < u_n < 2$. ومنه يكون $0 < 0.5u_n < 0.5 \times 2$ وبالتالي $0 < 0.5u_n + 1 < 1 + 1$ أي $0 < u_{n+1} < 2$ وهو المطلوب. إذن $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < 2$ و (u_n) محدودة (من الأعلى والأسفل).

4. استنتاج بأن (u_n) متقاربة وتعيين نهايتها. 1

إشارة المقدار $u_{n+1} - u_n = (0.5u_n + 1) - u_n = -0.5u_n + 1$ موجبة تماماً على المجال $]0; 2[$ الذي يشمل جميع حدود المتتالية (u_n) ، وكذلك (u_n) محدودة من الأعلى، فهي متقاربة. (u_n) تتقارب نحو $\ell = 2$

تمرين 3 [3] نعتبر الدالة $F(x) = \int_0^x (1 - e^{-t}) dt$

1. نبين أن الدالة $F(x)$ مستمرة وتقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، وحساب مشتقتها $f(x)$. 1

$F(x)$ معرفة تماماً، لأن $f(x) = 1 - e^{-x}$ معرفة ومستمرة على $\mathbb{R}$ ، و $F(x)$ تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$:

$$F'(x) = \left(\int_0^x (1 - e^{-t}) dt \right)' = 1 - e^{-x} = f(x)$$

2. تحقيق نظرية التزايدات المنتهية على الدالة $f(x) = 1 - e^{-x}$ في المجال $[-1; +1]$

$f(x)$ مستمرة على المجال $[-1; +1]$ ، و $f(x)$ تقبل الاشتقاق على $]-1; +1[$.

2 حسب نظرية التزايدات المنتهية، يوجد على الأقل $\alpha \in]-1; +1[$: $f'(\alpha) = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)}$

$$\text{إذن نحل في }]-1; +1[\text{، المعادلة } f'(x) = \frac{(1 - e^{-1}) - (1 - e)}{2} \text{ التي تكافئ } e^{-x} = \frac{e - e^{-1}}{2}$$

$$\text{ومنه الحل الوحيد } x = \alpha = \ln \frac{2}{e - e^{-1}} \approx -0.16$$

تمرين 4 [6] نعتبر المعادلة التفاضلية: $y'(x) - 2 \cdot y(x) = 2x$ (1) 1

• المعادلة التفاضلية المتجانسة المرفقة بـ (1) هي: $y'(x) - 2 \cdot y(x) = 0$ (2) صحيح × خطأ □

• الحل العام y_1 لـ (2) هو: $y_1(x) = c \cdot e^{-x^2}$ (من $\mathbb{R}$) □، $y_1(x) = c \cdot e^{2x}$ (من $\mathbb{R}$) ×

• حل خاص y_2 للمعادلة (1) هو: $y_2(x) = -x - \frac{1}{2}$ 2 ×، $y_2(x) = -x - \frac{1}{2}$ □ 1

• الحل العام y للمعادلة (1) هو: $y(x) = y_1(x) + y_2(x) = c \cdot e^{2x} - x - \frac{1}{2}$ (من $\mathbb{R}$) 1

• حل خاص y_3 للمعادلة (1)، يحقق لشرط الابتدائي $y(0) = \frac{1}{2}$ هو: $y_3(x) = e^{2x} - x - \frac{1}{2}$ 1