

EMD 01

تصحيح نموذجي

تمرين 1 [5] • كل دالة تقبل الاشتقاق، تكون قابلة للمكاملة. صحيح ☒ ، خطأ ☐

2

• f دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ بالشكل : $f(x) = \frac{e^{-x} - 1}{x}$

☐ f تقبل الاشتقاق عند $x = 0$ ، ☒ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$

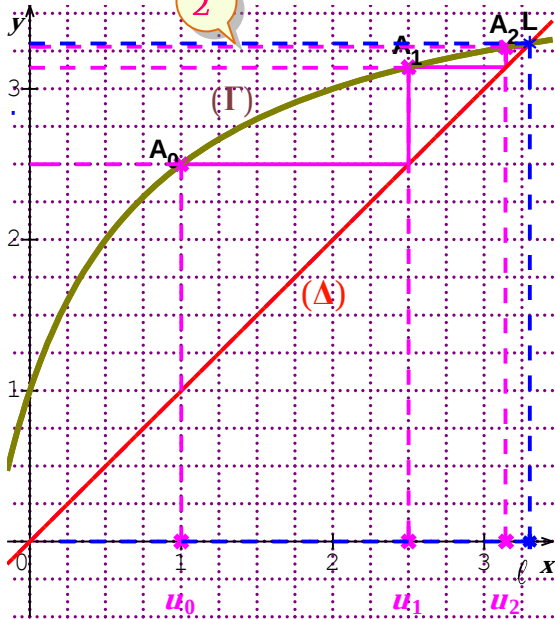
1.5

• f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالشكل : $f(x) = \ln(1 + e^{-x}) - x$

1.5

☒ f متناقصة على $\mathbb{R}$ ، ☐ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^+$

تمرين 2 [5] يرمز (Γ) لمنحنى الدالة $f(x) = \frac{4x+1}{x+1}$ في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$



$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{4u_n + 1}{u_n + 1}, n \geq 0 \end{cases} \quad (u_n) \text{ المتتالية المعرفة على } \mathbb{N}$$

1. الحدود u_1 و u_2 و u_3 . والنهايات الممكنة لـ (u_n)

• لدينا: $u_0 = 1, u_1 = 2.5, u_2 \approx 3.14, u_3 \approx 3.28$

• إذا تقاربت (u_n) نحو l ، فإنها تحقق: $l = \frac{4l+1}{l+1}$

أي $l^2 - 3l + 1 = 0$ ومنه $l = \frac{\sqrt{13} \pm 3}{2}$

2. استخدام المنحنى (Γ) والمستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$

في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ، لإنشاء النقط A_0 و A_1 و A_2 و A_3

على (Γ) ذات الفواصل u_0 و u_1 و u_2 و u_3 (الشكل المرفق).

3. نثبت بالتراجع أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ يكون $1 \leq u_n < (\sqrt{13}+3)/2$

بدء التراجع مُحقق. بفرض أن $1 \leq u_n < (\sqrt{13}+3)/2$ بما أن f متزايدة: $f(1) \leq f(u_n) < f((\sqrt{13}+3)/2)$

وبالتالي $5/4 \leq f(u_n) < (\sqrt{13}+3)/2$ ومنه أيضا $1 \leq u_{n+1} < (\sqrt{13}+3)/2$ وهو المطلوب.

إذن $1 \leq u_n < (\sqrt{13}+3)/2$ والمتتالية (u_n) محدودة (من الأعلى والأسفل).

1

4. تزايد المتتالية (u_n) وتقاربها. وتعيين نهايتها.

إشارة: $u_{n+1} - u_n = (4u_n + 1)/(u_n + 1) - u_n = u_{n+1} - u_n = (u_n^2 - 3u_n - 1)/(u_n + 1)$ موجبة على

المجال $I = \left[1; \frac{\sqrt{13}+3}{2} \right]$ الذي يشمل جميع حدود (u_n) ، وبالتالي (u_n) متزايدة من أجل كل n من $\mathbb{N}$.
وبما أن (u_n) محدودة من الأعلى، فهي إذن متقاربة. وتتقارب نحو $\ell = \frac{\sqrt{13}+3}{2} \approx 3.30$. 1

تمرين 3 [10]

1. نبين أن الدالة $F(x) = \int_0^x (1 - \ln(1+t)) dt$ مستمرة وتقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}^*$

$F(x)$ معرفة تماماً، لأن $f(x) = 1 - \ln(1+x)$ معرفة ومستمرة على $\mathbb{R}^*$ ، و $F(x)$ تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}^*$:

$$F'(x) = \left(\int_0^x (1 - \ln(1+t)) dt \right)' = 1 - \ln(1+x) = f(x) \quad \text{2.5}$$

2. تحقيق نظرية التزايدات المنتهية على الدالة $f(x) = 1 - \ln(1+x)$ في المجال $[0; 1]$

$f(x)$ مستمرة على المجال $[0; 1]$ و $f(x)$ تقبل الاشتقاق على $]0; 1[$. حسب نظرية التزايدات المنتهية،

يوجد على الأقل α من $]0; 1[$: $f'(\alpha) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0}$. إذن نحل في $]0; 1[$ ، المعادلة:

$$\alpha = \frac{1}{\ln 2} - 1 \approx 0.44 \quad \text{ومنه الحل} \quad \frac{-1}{1+x} = -\ln 2 \quad \text{التي تكافئ} \quad f'(x) = \frac{(1 - \ln 2) - 1}{1 - 0} \quad \text{2.5}$$

3. نستخدم طريقة التكامل بالتجزئة لحساب $\int \ln(1+x) dx$

$$\int \ln(1+x) dx = x \cdot \ln(1+x) - \int \frac{x}{1+x} dx = x \cdot \ln(1+x) - \int \frac{x+1-1}{1+x} dx$$

$$= x \cdot \ln(1+x) - \int \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) dx = x \cdot \ln(1+x) - x + \ln(1+x) + c \quad / c \in \mathbb{R} \quad \text{2.5}$$

4. تعيين القيمة المتوسطة β للدالة $f(x) = 1 - \ln(1+x)$ على $[0; 1]$

الدالة $f(x) = 1 - \ln(1+x)$ مستمرة على المجال $[0; 1]$ ، فهي تقبل المكاملة على $[0; 1]$.

حسب نظرية المتوسط، فإنه توجد نقطة β من المجال $]0; 1[$ بحيث: $f(\beta) = \frac{1}{1-0} \int_0^1 f(t) dt$

$$f(\beta) = \int_0^1 (1 - \ln(1+t)) dt = [2x - (1+x)\ln(1+x)]_0^1 = 2 - 2\ln 2$$

بحل المعادلة $f(x) = 2 - 2\ln 2$ في المجال $]0; 1[$ ، أي بحل المعادلة: $1 - \ln(1+x) = 2 - 2\ln 2$

نجد القيمة المتوسطة β لـ $f(x)$ على المجال $[0; 1]$ حيث: $\beta = e^{2\ln 2 - 1} - 1 = \frac{4}{e} - 1 \approx 0.471$

5. في المعادلة التفاضلية: $y'(x) - 3 \cdot y(x) = 2x e^{3x}$ (1) 0.5

• المعادلة التفاضلية المتجانسة المرفقة بـ (1) هي: $y'(x) - 3 \cdot y(x) = 0$ (2) صحيح خطأ

• الحل العام y_1 لـ (2) هو: $y_1(x) = c \cdot e^{-3x}$ (c من $\mathbb{R}$) خطأ، $y_1(x) = c \cdot e^{3x}$ (c من $\mathbb{R}$) صحيح

• حل خاص y_0 للمعادلة (1) هو: $y_0(x) = 2x e^{3x}$ خطأ، $y_0(x) = x^2 e^{3x}$ صحيح 0.75

• الحل العام y للمعادلة (1) هو: $y(x) = y_1(x) + y_0(x) = c \cdot e^{3x} + x^2 e^{3x}$ (c من $\mathbb{R}$) صحيح 0.5