الفصل II : نظرية التقدير

تمهيد :

لقد تطرقنا في الفصل السابق الى نظرية توزيع المعاينة، واصبح بامكاننا استخلاص بعض الاستنتاجات عن مجتمع الدراسة. وبما أن المجتمعات تعرف بمقاييس رقمية تعرف بالمعالم (Parameters) فان الهدف من هذا الفصل هو استخدام هذه المعالم لتقدير خصائص ومعالم المجتمع محل الدراسة.

ملاحظة: في بعض الأحيان نحتاج الى حساب خطأ المعاينة والذي يمكن حسابه بحساب الفرق بين القيمة الحقيقية للمعلمة والقيمة التقديرية، ويتم قياسه بتباين المقدر σ_m^2

١) مفاهيم أساسية :

٢) تعريف المقدر وخصائصه :

لتقدير معلمة من معالم المجتمع نحتاج الى ~~الاحصائية~~ اختيار الاحصائية المناسبة في العينة، وغالبا ما تكون المعلمة المناظرة في العينة هي أحسن مقدر، كأن نقدر متوسط المجتمع μ من خلال متوسط العينة $E(m)$، وتسمى هذه الاحصائية بالمقدر.

ومن أهم خصائص المقدر الجيد :

- المقدر غير المتحيز: نقول عن احصائية ما أنها مقدر غير متحيز (Sans biais) لمعلمة المجتمع اذا كان متوسطها أو توقعها الرياضي مساويا لمعلمة المجتمع.

مثلا: • نقول عن متوسط العينة m أنه مقدر غير متحيز لمتوسط المجتمع μ لأن $E(m)=\mu$

• نسمي الاحصائية S^2 في معاينة بالارجاع انها مقدر متحيز لـ σ^2 لأن $E(S^2)=\sigma^2\frac{n-1}{n}\neq\sigma^2$

• بينما تعتبر الاحصائية : $\hat{S}^2=S^2\frac{n}{n-1}$ في معاينة

بالارجاع أنها مقدر غير متحيز لأن : $E(\hat{S}^2)=\sigma^2$

- الفعالية : (Efficacite) (الكفاءة)

المقدر الأكثر فعالية هو المقدر الأقل تباينا .

مثلا : لكل من متوسط العينة والوسيط في العينة نفس المتوسط هو متوسط المجتمع μ ، لكن يعتبر m مقدرا أكثر كفاءة لـ μ ~~مقدر~~ من الوسيط لأن :

$$\sigma_m^2 < \sigma_{med}^2$$

$$\sigma^2/n < \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

- التقارب : (Convergence)

نقول عن مقدر أنه متقارب (Convergeant) اذا كان يؤول الى قيمة المعلمة المقدرة عندما يؤول حجم العينة الى ما لا نهاية .

مثلا : يعتبر متوسط العينة مقدرا متقاربا لمتوسط المجتمع لأن :

$$E(m)=\mu \quad , \quad \sigma_m^2=\frac{\sigma^2}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ب) التقدير النقطي والتقدير بمجال

في بعض الأحيان نحتاج الى تقدير معلمة مجتمع بقيمة واحدة ونقول عن هذا التقدير أنه " تقدير نقطي "، وأحيانا نحتاج الى تقدير معلمة المجتمع بنقطتين يحددان مجال لقيمة المعلمة ونقول عن هذا التقدير أنه " تقدير بمجال "

مثلا : اذا قلنا أن دخل الأسرة هو : 25000 دج نكون قد قدرنا الدخل تقديرا نقطيا ، أما اذا قلنا أن الدخل يتراوح بين 25000 و 30.000 دج نكون قد قدرناه بمجال .

أ) درجة التأكد أو مستوى الثقة:

تحديد مجال الثقة للمعلمة يرفق بتحديد احتمال تحققه، أي احتمال أن تنتمي المعلمة الى المجال المذكور.

ويرمز لهذا الاحتمال بـ $(1-\alpha)$ ويسمى "درجة التأكد أو مستوى الثقة". والاحتمال العكسي يسمى "مستوى أو درجة المعنوية".

ويحسب مجال الثقة بناءً على مستوى ثقة محدد مسبقا.

وعادة يستخدم الاحصائيون مستوى ثقة 95% (أي مستوى المعنوية 5%) وأحيانا 90% أو 99%.

ب) تعيين حدود مجال الثقة:

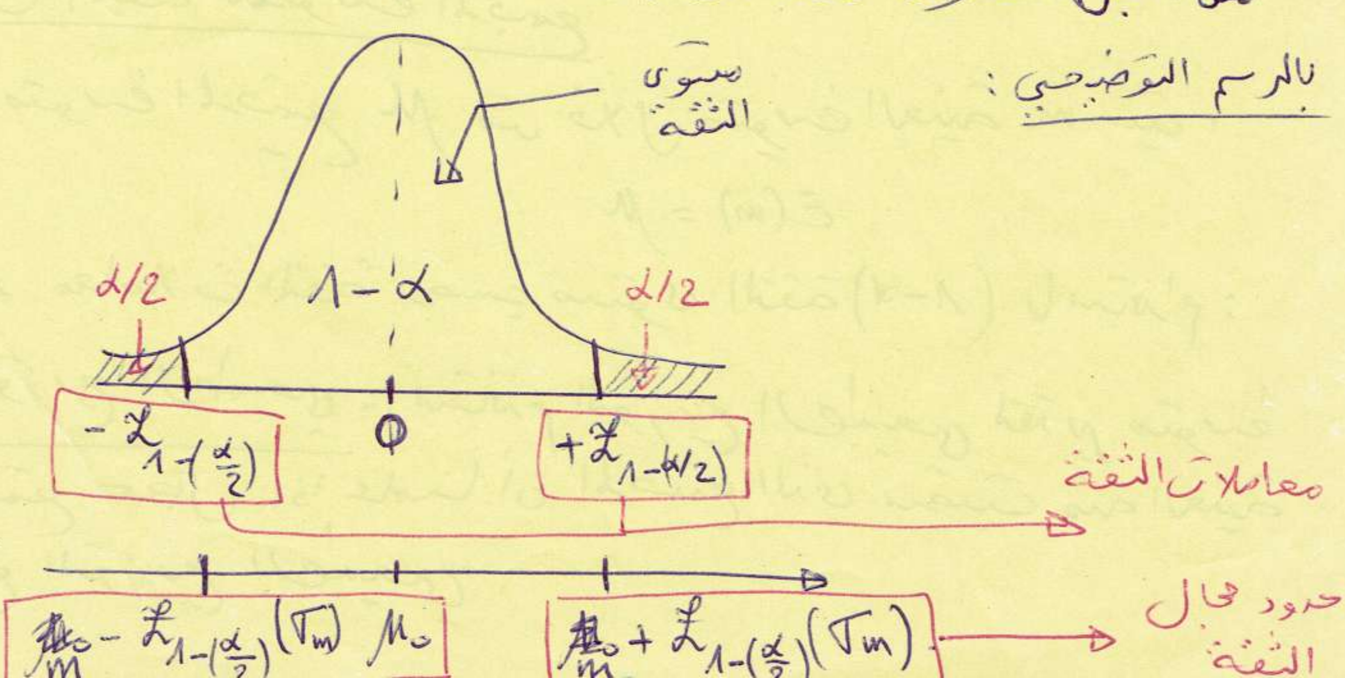
نقوم بتحديد حدود الثقة من خلال معاملات الثقة وهي القيم الجدولية (القيم الحرجة) للمتغيرة Z أو t أو χ^2 حسب الحالة.

مثلا: بالنسبة للمتغيرة Z نعلم أن:

$$P(-1,64<Z<1,64) = P(Z<1,64) - P(Z<-1,64)$$
$$= 0,9495 - 0,0505 = 0,899 \simeq 0,9.$$

وبالتالي فإن معاملات الثقة هما القيمتين: $-1,64$ و $+1,64$.
من أجل مستوى ثقة 90%.

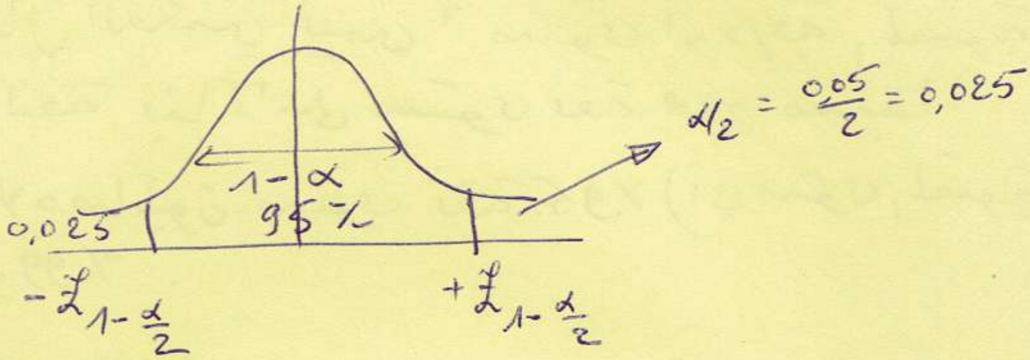
بالرسم التوضيحي:



مثلاً : α (مستوى المعنوية) 5% .

$\alpha = 5\% = 0,05$

$1-\alpha = 1 - 0,05 = 0,95 \; (95\%)$.



$1 - \frac{0,05}{2} = 1 - 0,025 = 0,975$

$\boxed{0,06}$

$\boxed{1,9}$ - - - - - - $\boxed{0,975}$

$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1,64$. , $-Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = -1,64$.

---

2) التقدير بمجال

أ) مجال الثقة لمتوسط المجتمع

يقدر متوسط المجتمع μ من خلال متوسط العينة m حيث :

$$E(m) = \mu$$

وتحدد معاملات الثقة حسب مستوى الثقة $(1-\alpha)$ باستخدام :

- التوزيع الطبيعي : نستخدم التوزيع الطبيعي لتقدير متوسط المجتمع بمجال اذا علمنا أن المجتمع الذي سحبت منه العينة يتبع التوزيع الطبيعي .

وحسب النظرية (4) من الفصل السابق لدينا

$$1-\alpha = P\left(-Z \leq \frac{m-\mu}{\sigma_m} \leq Z\right).$$ نضرب في σ_m

$$= P(-Z\sigma_m \leq m-\mu \leq Z\sigma_m).$$ نطرح m

$$= P(-m-Z\sigma_m \leq -\mu \leq -m+Z\sigma_m).$$ $\times(-)$

$$= P(m+Z\sigma_m \geq \mu \geq m-Z\sigma_m)$$

$$= P(m-Z\sigma_m \leq \mu \leq m+Z\sigma_m).$$

لدينا: $\sigma_m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

ومنه:

$$1-\alpha = P\left(\underbrace{m-Z\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq m+Z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}_{\text{حدود مجال الثقة}}\right)$$

ونكتب: $\mu \in \left[m-Z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, m+Z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ بمستوى ثقة $(1-\alpha)$

ملاحظة:

يمكن أيضا استنادا الى قانون النهاية المركزية، استخدام التوزيع الطبيعي لتقدير m حتى اذا كان المجتمع مجهول التوزيع بشرط أن تكون العينة $(n \geq 30)$ (أنظر نظرية النهاية المركزية).

اذا كان الانحراف المعياري للمجتمع معلوم لكن المجتمع محدود (حجمه N) والمعاينة نفاذية نكتب حدود مجال الثقة لمتوسط المجتمع μ كما يلي:

$$m \pm Z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

والجدول الآتي يبين قيم معاملات الثقة Z (حدود مجال الثقة) حسب مستوى الثقة.

معاملات الثقة في حالة استخدام التوزيع الطبيعي في التقدير

0,5	0,8	0,90	0,95	0,98	0,99	مستوى الثقة $(1-\alpha)$
0,5	0,2	0,10	0,05	0,02	0,01	مستوى المعنوية α
0,75	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995	$1-\alpha/2$
0,674	1,282	1,645	1,96	2,326	2,58	$Z_{1-\alpha/2}$

مثلا: نقدر أن μ يوجد داخل المجال $(m \pm 1{,}96\,\sigma_m)$ بمستوى ثقة 95% أي بمستوى معنوية 5%.

- توزيع Student (t):

إذا كانت العينة صغيرة $(n<30)$ و σ مجهول نستخدم توزيع ستيودنت (Student) لتحديد مجالات الثقة لـ μ

وتكتب:

$$-t_{(1-\frac{\alpha}{2},\, n-1)} < \frac{m-\mu}{\hat{S}/\sqrt{n}} < +t_{(1-\frac{\alpha}{2},\, n-1)}$$

$$\mu \in \left[m - t_{1-\frac{\alpha}{2},\, n-1} \frac{\hat{S}}{\sqrt{n}} \; ; \; m + t_{1-\frac{\alpha}{2},\, n-1} \frac{\hat{S}}{\sqrt{n}} \right]$$

حيث $(\gamma = n-1)$ و γ تمثل درجات الحرية.

مثال: نريد تقدير متوسط مجتمع طبيعي، بمستوى ثقة 95% انطلاقا من عينة حجمها 10 متوسطها 15 وانحرافها المعياري 27.

الحل:

$$E(m) = 15 = \mu$$

$$n = 10$$

$$S = 27.$$

نعلم أن:

$$\hat{S}^2 = \frac{S^2 n}{n-1} \Rightarrow \hat{S} = \sqrt{\frac{S^2 . n}{n-1}} = \frac{S \sqrt{n}}{\sqrt{n-1}}$$

$$= \frac{27\sqrt{10}}{\sqrt{10-1}} = \frac{27 \times 3,16}{\sqrt{9}} = 28,44$$

من جدول توزيع Student فإن

$$t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} \Rightarrow t_{0,975\ 9} = 2,262 .$$

$$\boxed{\begin{array}{l} 1-\frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{0,05}{2} = 0,975 . \\ n-1 = 10-1 = 9 \end{array}}$$

$\alpha = 0,05 = 5\%$

ومنه

$$\mu \in \left[m - t_{0,975,9} \cdot \frac{\hat{S}}{\sqrt{n}} ; m + t_{0,975,9} \cdot \frac{\hat{S}}{\sqrt{n}} \right]$$

$$\mu \in \left[15 - 2,262 \cdot \frac{28,44}{\sqrt{10}} ; 15 + 2,262 \cdot \frac{28,44}{\sqrt{10}} \right]$$

$$\mu \in [5,358 ; 35,358]$$

ب) مجال الثقة للنسبة:

- حالة المجتمع غير محدود أو المعاينة غير نفادية والعينة $n \geq 30$

لتكن p' تمثل نسبة نجاحات في عينة حجمها $n \geq 30$ مستخرجة من مجتمع طبيعي، حيث p نسبة النجاحات في المجتمع

نعلم من الفصل الأول أن: $\sigma_p = \sqrt{\frac{pq}{n}}$ ومنه يحدد مجال الثقة للنسبة p كما يلي:

$$P \in \left[P' - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{P'q'}{n}} \;;\; P' + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{P'q'}{n}} \right]$$

<u>مثال:</u> لدراسة معدل البطالة اختيرت عينة عشوائية من القوة العاملة ~~مجتمع~~ حجمها ~~N~~ = 500 $(n = 500)$
فاذا وجد منهم 60 شخص عاطلين عن العمل، قدر معدل البطالة بفترة ثقة 95%

<u>الحل:</u>

$$P' = \frac{n_a}{n} = \frac{60}{500} = 0,12.$$

من جدول التوزيع الطبيعي فان قيمة $Z_{1-\frac{0,05}{2}}$ $(Z_{0,975})$ هي:

$$Z_{0,975} = 1,96.$$

اذن:

$$P' \in \left[0,12 - 1,96 \cdot \sqrt{\frac{(0,12)(0,88)}{500}} \;;\; 0,12 + 1,96 \sqrt{\frac{(0,12)(0,88)}{500}} \right]$$

$$P' \in [0,091 \;;\; 1,49]$$

- <u>حالة المجتمع محدود (حجمه N) والمعاينة نفاذية</u>

في هذه الحالة نستخدم معامل الارجاع عند حساب $\sigma_{p'}$ حيث:

$$\sigma_{p'} = \sqrt{\frac{p'q}{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}.$$

15

مثال: سحبنا عينة حجمها 40 من علامات الطلبة في امتحان الاحصاء لدفعة 2015 وعددها 500 طالب، حيث وجدنا أن هناك 15 طالب تحصلوا على علامة أكبر من 10.
قدر نقطيا بمستوى ثقة 0,9 نسبة الطلبة الحاصلين على علامة أكبر من 10؟

الحل:

$$\hat{p} = \frac{n_a}{n} = \frac{15}{40} = 0,375$$

بما أن المجتمع محدود والعينة نفاذية نستخدم معامل الإرجاع.
[لا يمكن اهماله لأن $\frac{n}{N} = \frac{40}{500} = 0,08 > 0,05$].

$$P \in \left[\hat{p} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma_{\hat{p}} ; \hat{p} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma_{\hat{p}}\right].$$

~~$P \in [0,375 - 1,64 \cdot (0,375)(0,625)$~~

$$1-\alpha = 0,9 \Rightarrow \alpha = 1-0,9 = 0,1$$

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0,1}{2}} = Z_{1-0,05} = Z_{0,95} \simeq 1,64.$$

$$P \in \left[0,375 - 1,64 \cdot \sqrt{\frac{(0,375)(0,625)}{40}} \sqrt{\frac{500-40}{500-1}} ; 0,375 + 1,64 \cdot \sqrt{\frac{0,375(0,625)}{40}} \sqrt{\frac{500-40}{500-1}}\right]$$

$$P \in [0,254 ; 0,615]$$

د) مجال الثقة للتباين: لتقدير التباين والانحراف المعياري لمجتمع بمجال ثقة نستخدم الخاصية التالية:

$$\frac{n S^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)\hat{S}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

وبالتالي مجال الثقة للتباين يحدد كما يلي:

$$\chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}} < \frac{n \cdot S^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)\hat{S}^2}{\sigma^2} \leq \chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}$$

ومنه:

$$\frac{n \cdot S^2}{\chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}} < \sigma^2 \leq \frac{n \cdot S^2}{\chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}}}$$

ومنه فإن مجال الثقة لـ الانحراف المعياري σ هو:

$$\frac{\sqrt{n}\, S}{\chi_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}} \leq \sigma \leq \frac{\sqrt{n}\, S}{\chi_{n-1,\frac{\alpha}{2}}}$$

أو

$$\frac{\sqrt{n-1} \cdot \hat{S}}{\chi_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}} \leq \sigma \leq \frac{\sqrt{n-1} \cdot \hat{S}}{\chi_{n-1,\frac{\alpha}{2}}}$$

حيث $n-1 = \gamma$ وتعبر عن درجات الحرية لتوزيع χ (كاي)

~~مثال: إذا كان عمر المصباح الكهربائي X من انتاج مصنع له توزيع طبيعي بمتوسط $\mu = 1460$ وتباين $\sigma^2 = 95450$~~
~~قدر تباين المجتمع بفترة ثقة 95% إذا علمت ان العينة حجمها $n = 5$.~~

~~الحل:~~

~~$\sigma^2 \in [$~~

مثال: اذا كان عمر المصباح الكهربائي له توزيع طبيعي بمتوسط μ و تباين σ^2 ، قدر تباين المجتمع بفترة ثقة 95% اذا علمت أن حجم العينة $n=5$ و تباين عمر المصباح هو $S^2=76360$ ؟

الحل:

$$n=5$$
$$S^2=76360$$

$$\frac{n \cdot S^2}{\chi^2_{(n-1,\frac{\alpha}{2})}} \leq \sigma^2 \leq \frac{n \cdot S^2}{\chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}}$$

$$\frac{5 \cdot 76360}{11,14} \leq \sigma^2 \leq \frac{5 \cdot 76360}{0,484}$$

$$34272,9 \leq \sigma^2 \leq 7888429,75$$

$$\chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}} = \chi^2_{4,0,025} = 0,484.$$

$1-\alpha = 0,95$

$\Rightarrow \alpha = 0,05 = 5\%.$

$$\chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} = \chi^2_{4,1-0,025} = \chi^2_{4,0,975} = 11,14.$$

مثال ②: اذا كان :

$n = 10$

$S = 17,2$

قدر التباين لفترة ثقة 95%
والانحراف المعياري.

الحل :

$$\frac{n \cdot S^2}{X_{n-1,\,1-\frac{\alpha}{2}}} \leq \sigma^2 \leq \frac{n^2 S^2}{X_{n-1,\,\frac{\alpha}{2}}}$$

$$1-\alpha = 95\% = 0,95 \iff \alpha = 0,05 = 5\%.$$

من جدول توزيع مربع كاي نجد القيم :

$$X_{n-1,\,1-\frac{\alpha}{2}} = X_{10-1,\,1-\frac{0,05}{2}} = X_{9,\,0,975} = 2,70$$

$$X_{n-1,\,\frac{\alpha}{2}} = X_{10-1,\,\frac{0,05}{2}} = X_{9,\,0,025} = 19,02.$$

$$\frac{10 \cdot (17,2)^2}{2,7} \leq \sigma^2 \leq \frac{10\,(17,2)^2}{19,02}$$

$$1095,7 \leq \sigma^2 \leq 154,08$$

$$\frac{\sqrt{10} \cdot 17,2}{2,7} \leq \sigma \leq \frac{\sqrt{10} \cdot 17,2}{19,02}$$