Université de KHEMIS MILIANA
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département des Sciences de la Matière - L1 ST-SM
Séries de TD de Physique 1, 2021-2022
Série 1. Partie I. Calcul Vectoriel

Dans tout ce qui suit l'espace est rapporté au système orthonormé de coordonnées cartésiennes $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.

Exercice 1:

Expliquer comment distinguer une quantité scalaire d'une quantité vectorielle. Donner des exemples pour chacune d'elles.

*Exercice 2:

Soit le vecteur $\overrightarrow{A}$ défini par $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}$.

1. (a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{A}$.
   (b) Déterminer ses mesures algébriques.
   (c) Calculer son module.
   (d) Calculer ses cosinus directeurs.
   (e) Représenter le vecteur $\overrightarrow{A}$ dans le système de coordonnées cartésiennes.
2. Même questions pour le vecteur $\overrightarrow{B}$ défini par $\overrightarrow{B} = 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + \dfrac{\overrightarrow{i} - 5\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}}{3}$.

Exercice 3:

On donne le vecteur $\overrightarrow{R}$ défini par $\overrightarrow{R} = 3\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} - 3\overrightarrow{k}$.

1. Trouver le vecteur unité $\overrightarrow{U}_R$ du vecteur $\overrightarrow{R}$.
2. Vérifier que le module de $\overrightarrow{U}_R$ est égale à l'unité.
3. Représenter les vecteurs $\overrightarrow{R}$ et $\overrightarrow{U}_R$ dans le système de coordonnées cartésiennes.

Exercice 4:

Les deux point A et B sont définis dans le système cartésien par $A(4, 2, 1)$ et $B(-2, 3, 2)$.

1. Quelles sont les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
2. Calculer son module.
3. En déduire les angles qu'il fait avec les axes du système cartésien.

*Exercice 5:

On donne les vecteurs $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$:

1. Calculer le produit scalaire des deux vecteurs. En déduire l'angle θ compris entre les deux vecteurs.
2. Calculer le produit vectoriel des deux vecteurs. En déduire l'angle ϕ compris entre les deux vecteurs.
3. Déterminer l'aire formée par les deux vecteurs.

*Exercice 6:

On définit deux vecteurs par leurs composantes $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{B} = 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}$.

1. Calculer $\overrightarrow{S}$ la somme des deux vecteurs.
2. Calculer le vecteur $\overrightarrow{D} = \overrightarrow{A} - \overrightarrow{B}$.
3. Calculer les modules des deux vecteurs.
4. Calculer le produit scalaire des deux vecteurs.
5. Calculer le produit vectoriel des deux vecteurs tout en précisant son module, son sens et sa direction.
6. En déduire l'angle compris entre les deux vecteurs.
7. représenter, dans le système $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$, les vecteurs $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{S}$, $\overrightarrow{D}$ et $\overrightarrow{A} \times \overrightarrow{B}$,

Exercice 7:

Montrer que si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur dont la longueur est égale à l'unité (vecteur unitaire) dépendant du paramètre scalaire t, on a $\frac{d\overrightarrow{u}}{dt} \bullet \overrightarrow{u} = 0$, c'est-à-dire que $\frac{d\overrightarrow{u}}{dt}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{u}$[**?**].

*Exercice 8:

On définit deux vecteurs par leurs composantes $\overrightarrow{A} = m\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{B} = 4\overrightarrow{i} + m\overrightarrow{j} - 7\overrightarrow{k}$.
Pour quelle valeur de m ces vecteurs sont réciproquement perpendiculaires[**?**].

Exercice 9:

Calculer l'aire du triangle de sommets $A(1,1,2)$, $B(1,3,1)$ et $C(2,1,3)$.

Exercice 10:

Calculer l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\overrightarrow{A} = 6\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{B} = 3\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + 6\overrightarrow{k}$[**?**].

Exercice 11:

Soit $ABCD$ un parallélogramme. Notons E le point milieu du segment $[AB]$ et soit F le point tel que $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DE}$. Démontrer par calcul vectoriel que $\overrightarrow{FB} = \overrightarrow{BC}$

*Exercice 12:

Montrer que les angles α, β et γ et les arrêtes a, b et c d'un triangle quelconque sont reliés par la relation $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$ tels que a est l'arrête opposés à l'angle α, b est l'arrête opposée à l'angle β et c est l'arrête opposée à l'angle γ.

*Exercice 13:

Soit le champ de vecteurs défini par $\overrightarrow{v} = \left(3t^2 - 2t\right)\overrightarrow{i} + 4t^2\overrightarrow{j} - 5t\overrightarrow{k}$.

1. Calculer $\frac{d\overrightarrow{v}}{dt}$
2. Calculer $\int \overrightarrow{v}(t)\,dt$

Exercice 14:

Soient le champ de vecteurs défini par $\overrightarrow{A} = 3x^2y\overrightarrow{i} + yz^2\overrightarrow{j} - xz\overrightarrow{k}$ et la fonction scalaire définie par $\phi(x,y,z) = x^2yz$.

1. Calculer le gradient $\overrightarrow{\nabla}\phi(x,y,z)$
2. Calculer la divergence $\overrightarrow{\nabla} \bullet \overrightarrow{A}$
3. Calculer le rotationnel $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A}$
4. Calculer le rotationnel du gradient $\overrightarrow{\nabla} \times \left(\overrightarrow{\nabla}\phi(x,y,z)\right)$
5. Calculer la divergence du rotationnel $\overrightarrow{\nabla} \bullet \left(\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A}\right)$

Exercice Résolu [1]:

Soient le champ de vecteurs défini par $\overrightarrow{A} = 3x^2y\overrightarrow{i} + yz^2\overrightarrow{j} - xz\overrightarrow{k}$ et la fonction scalaire définie par $\phi(x,y,z) = x^2yz$. Trouver $\frac{\partial^2\left(\phi\overrightarrow{A}\right)}{\partial y\partial z}$ au point $M(1,-2,-1)$

Solution:

$\phi\overrightarrow{A} = \left(x^2yz\right)\left(3x^2y\overrightarrow{i} + yz^2\overrightarrow{j} - xz\overrightarrow{k}\right) = 3x^4y^2z\overrightarrow{i} + x^2y^2z^3\overrightarrow{j} - x^3yz^2\overrightarrow{k}$

$\frac{\partial}{\partial z}\left(\phi\overrightarrow{A}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(3x^4y^2z\overrightarrow{i} + x^2y^2z^3\overrightarrow{j} - x^3yz^2\overrightarrow{k}\right) = 3x^4y^2\overrightarrow{i} + 3x^2y^2z^2\overrightarrow{j} - 2x^3yz\overrightarrow{k}$

$\frac{\partial^2\left(\phi\overrightarrow{A}\right)}{\partial y\partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(3x^4y^2\overrightarrow{i} + 3x^2y^2z^2\overrightarrow{j} - 2x^3yz\overrightarrow{k}\right) = 6x^4y\overrightarrow{i} + 6x^2yz^2\overrightarrow{j} - 2x^3z\overrightarrow{k}$

Si pour le point M $x = 1$, $y = -2$ et $z = -1$, ce résultat devient $-12\overrightarrow{i} - 12\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$

References

[1] Spiegel, Murray R. Théorie et application de la mécanique générale. McGraw-Hill, 1972