# Série d'exercices N°2

## Ensembles – Relations et Applications

**Exercice n°1 :** Soient $A$, $B$ et $C$ trois sous-ensembles de l'ensemble non vide E.

1. En utilisant les propriétés des opérations sur les ensembles montrer que :
   i) $\overline{A\cup(B\cap C)} = (\bar{C} \cup \bar{B}) \cap \bar{A}$ ii) $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = A$.

2. Soit $A = \{x \in \mathbb{R},\ |2x| \leq 6\}$, $B = \{x \in \mathbb{R},\ x^2 > 5x - 6\}$, et

$C = \{x \in \mathbb{R}^+,\ x^2 - 5 \leq 20\}$. Déterminer les ensembles $A$, $B$, et $C$

et vérifier la propriété i) donnée dans la question précédente.

**Solution :** Rappelons que $\bar{A} = C_E A$ désigne le complémentaire de $A$ dans $E$.

1. i) $\overline{A\cup(B\cap C)} = \bar{A} \cap \overline{(B\cap C)}$ Loi de De Morgan
   $= \bar{A} \cap(\bar{B} \cup \bar{C})$ Loi de De Morgan
   $= (\bar{B} \cup \bar{C}) \cap \bar{A}$ $\cap$ est commutative
   $= (\bar{C} \cup \bar{B}) \cap \bar{A}$ $\cup$ est commutative.
   $ii)$ $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = A \cap (B \cup \bar{B}) = A \cap E = A$.
2. Rappel : Soit $b > 0$ alors : $|a| \leq b \Longrightarrow -b \leq a \leq b$.
   $$|a| \geq b \Longrightarrow a \geq b \ ou\ a \leq -b$$
   $$a^2 \leq b \Longrightarrow -\sqrt{b} \leq a \leq \sqrt{b}.$$
   $$A = \{x \in \mathbb{R},\ |2x| \leq 6\} = \{x \in \mathbb{R},\ |x| \leq 3\} = \{x \in \mathbb{R},\ -3 \leq x \leq 3\} = [-3, 3]$$
   $$B = \{x \in \mathbb{R},\ x^2 > 5x - 6\} = \{x \in \mathbb{R},\ x^2 - 5x + 6 > 0\}$$
   $$= \left\{x \in \mathbb{R},\ (x-2)(x-3) > 0\right\} = ]-\propto, 2[\cup]3, +\propto[.$$
   $$C = \{x \in \mathbb{R}^+,\ x^2 - 5 \leq 20\} = \{x \in \mathbb{R}^+,\ x^2 \leq 25\} = \{x \in \mathbb{R}^+,\ |x| \leq 5\}$$
   $$= \{x \in \mathbb{R}^+,\ -5 \leq x \leq 5\} = [0, 5].$$
   Donc on obtient : $B\cap C = [0, 2[\cup]\ 3, 5]$ , $A\cup(B\cap C) = [-3,5]$ et par la suite :
   $\overline{A\cup(B\cap C)} = ]-\infty, -3[\cup]5, +\infty[$ ……(1)
   D' autre part $\bar{C} = ]-\infty, 0[\cup]5, +\infty[$ , $\bar{B} = [2,\ 3]$ et $\bar{A} = ]-\infty, -3[\cup]3,\ +\infty[$.
   Donc
   $\bar{C} \cup \bar{B} = ]-\infty,\ 0[\cup\ [2,\ 3]\cup]5, +\infty[$ et par la suite :
   $(\bar{C} \cup \bar{B}) \cap \bar{A} = ]-\infty, -3[\cup]5, +\infty[$ ……(2)
   On a bien (1) = (2), la propriété i) est vérifiée.

**Exercice n°2 :** Soit $R$ une relation définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ xRy \Leftrightarrow x^3 - y^3 = 3(x - y).$$

1. Démontrer que $R$ est une relation d'équivalence.

2. Déterminer $\overline{a}$ la classe d'équivalence de l'entier $a$.

**Solution :** 1. $R$ est une relation d'équivalence si $R$ est réflexive, symétrique et transitive.

i) $R$ est réflexive : $\forall x \in \mathbb{R},\ xRx$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $x^3 - x^3 = 0$ et $x - x = 0$.
Donc a $x^3 - x^3 = x - x$. Alors $xRx$ c'est-à-dire $R$ est réflexive.

ii) $R$ est symétrique : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ xRy \Rightarrow yRx$.
Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $xRy$: $x^3 - y^3 = 3(x - y)$. On multiplie par (-1) on obtient : $y^3 - x^3 = 3(y - x) \Rightarrow yRx \Rightarrow R$ est symétrique.

iii) $R$ est transitive : $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ xRy\ et\ yRz \Rightarrow xRz$.
Soit $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que : $xRy\ et\ yRz$ :
$x^3 - y^3 = 3(x - y)$….(eq.1) et $y^3 - z^3 = 3(y - z)$…..(eq.2)
On additionne (eq.1) et (eq.2) on trouve : $x^3 - z^3 = 3(x - z)$.
De i) , ii) et iii) on déduit que $R$ est une relation d'équivalence .

1. La classe d'équivalence $\overline{a}$. On a :

$$\overline{a} = \{x \in \mathbb{R},\quad xRa\} = \{x \in \mathbb{R},\ x^3 - a^3 = 3(x - a)\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R},\quad x^3 - a^3 - 3(x - a) = 0\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R},\ (x - a)(x^2 + ax + a^2 - 3) = 0\}$$

donc $x - a = 0 \Rightarrow x = a$ ou $x^2 + ax + a^2 - 3 = 0$,
le discriminant est égale à : $\Delta = 3(4 - a^2) = 3(2 - a)(2 + a)$.
Si $a \in ]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[ \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow$pas de solution$\Rightarrow \overline{a} = \{a\}$.
Si $a \in ]-2,\ 2[ \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow$deux solutions $et$ :

$$\overline{a} = \left\{a\,,\ \tfrac{1}{2}\left(-a + \sqrt{3(4 - a^2)}\right),\ \tfrac{1}{2}\left(-a + \sqrt{3(4 - a^2)}\right)\right\}.$$

Si $a \in \{-2, 2\} \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow$une solution $et$ :

$$\overline{a} = \left\{a\,,\ \tfrac{1}{2}(-a)\right\}.$$

**Exercice n°3 :** Soit $R$ une relation définie sur $\mathbb{Z}$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}\,,\ xRy \Leftrightarrow 7 \text{ divise } (x - y).$$

1. Démontrer que $R$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer $\overline{0}$ et $\overline{2}$ les classes d'équivalence de 0 et de 2.

**Solution : Rappel** : $a$ divise $b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : b = ak$. Donc

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}\,,\ xRy \Leftrightarrow 7 \text{ divise } (x - y) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x - y = 7k.$$

1. $R$ est une relation d'équivalence si $R$ est réflexive, symétrique et transitive.

i) $R$ est réflexive : $\forall x \in \mathbb{Z},\ xRx$. Soit $x \in \mathbb{Z}$. On $x - x = 0 = 7 \cdot 0\quad (k = 0)$.
Alors $xRx$ c'est-à-dire $R$ est réflexive.

ii) $R$ est symétrique $\forall x, y \in \mathbb{Z},\ xRy \Rightarrow yRx$.
Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $xRy$: $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$: $x - y = 7k$. On multiplie par (-1) on obtient :

$(y-x)=-7k=7(-k)=7k'$ $(k'=-k\in\mathbb{Z})\Rightarrow yRx\Rightarrow R$ est symétrique.

iii) $R$ est transitive : $\forall x,y,\ z\in\mathbb{Z},\ \ xRy\ \ et\ \ yRz\Rightarrow xRz.$

Soit $x,y,z\in\mathbb{Z}$ tels que $xRy\ et\ yRz$ :

$xRy\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{Z}\quad x-y=7k$ (eq.1) et

$yRz\Leftrightarrow\exists k'\in\mathbb{Z}\quad y-z=7k'$ ( eq.2)

On additionne (eq.1) et (eq.2) on trouve :

$$x-z=7(k+k')=7k'',\quad k''=k+k'\in\mathbb{Z}.$$

De i) , ii) et iii) on déduit que $R$ est une relation d'équivalence .

2. La classe d'équivalence $\overline{0}$ et $\overline{2}$ . On a :

$$\overline{a}=\{x\in\mathbb{Z},\quad xRa\}$$

$$\overline{0}=\{x\in\mathbb{Z},\ xR0\}=\{x\in\mathbb{Z},\ \exists k\in\mathbb{Z}\ \ x-0=7k\}=\{7k,\ k\in\mathbb{Z}\}$$
$$=\{\dots,-14,-7,\ 0,\ 7,\ 14,\ 21,\dots\}$$

$$\overline{2}=\{x\in\mathbb{Z},\ xR2\}=\{x\in\mathbb{Z},\ \exists k\in\mathbb{Z}\ \ x-2=7k\}=\{7k+2,\ k\in\mathbb{Z}\}$$
$$=\{\dots,-12,-5,\ 2,\ 9,\ 16,\ 23,\dots\}$$

**<u>Exercice n° 4:</u>** Considérons la fonction $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=\sqrt{3x^2+1}.$

1. Déterminer l'image directe $f(A_1)$ et $f(A_2)$ avec $A_1=\{-1,\ 0,\ 1,\ \sqrt{8}\}$ et $A_2=[0,\ 1]$ .
2. Déterminer l'image réciproque $f^{-1}(B_1)$ , $f^{-1}(B_2)$ $et$ $f^{-1}(B_3)$ avec $B_1=\{-5\}$, $B_2=\{0,1/2\}$ et $B_3=[1,2]$.
3. La fonction $f$ est-elle injective ? surjective ? justifier.
4. Montrer que $f\ :\mathbb{R}^+\longrightarrow[1,+\infty[$ est bijective et déterminer sa fonction réciproque $f^{-1}$.

**<u>Solution :</u>**

1. L'image directe de $A$ est définie par: $f(A)=\{f(x),x\in A\}$ .
Donc $f(A_1)=\{f(-1),\ f(0),\ f(1),\ f(\sqrt{8})\}=\{2,\ 1,\ 2,\ 5\}=\{1,\ 2,5\}$.
La fonction $f$ est strictement croissante (monotone) et continue sur $\mathbb{R}^+$ donc $f([a,b])=[f(a),\ f(b)]$ alors $f([0,1])=[f(0),\ f(1)]=[1,\ 2]$.
2. L'image réciproque $f^{-1}(B)=\{x\in E,\ f(x)\in B\}$ où $E$ est l'ensemble de départ de $f$. Donc $f^{-1}(B_1)=\{x\in\mathbb{R},\ f(x)\in B_1\}=\{x\in\mathbb{R},\ f(x)\in\{-5\}\}$
$$=\{x\in\mathbb{R},\quad f(x)=-5\}=\left\{x\in\mathbb{R},\quad\sqrt{3x^2+1}=-5\right\}=\emptyset$$
car $\sqrt{3x^2+1}\geq 1$, pour tout $x\in\mathbb{R}$.

$f^{-1}(B_2)=\{x\in\mathbb{R},\ f(x)\in B_2\}=\{x\in\mathbb{R},\ f(x)\in\{0,1/2\}\}$
$=\{x\in R,f(x)=0$ ou $f(x)=1/2\}$

$$= \left\{x \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{3x^2+1} = 0 \ ou \ \sqrt{3x^2+1} = 1/2\right\} = \emptyset$$

Car $\sqrt{3x^2+1} = 0 \Longrightarrow 3x^2 = -1$ impossible

$et \ \sqrt{3x^2+1} = \frac{1}{2} \Longrightarrow 3x^2 = -\frac{3}{4}$ impossible.

$f^{-1}(B_3) = \{x \in \mathbb{R},\ f(x) \in B_3\} = \{x \in \mathbb{R},\ f(x) \in [1, 2]\ \}$

$= \left\{x \in \mathbb{R},\ \sqrt{3x^2+1} \in [1,2]\ \right\} = [-1, 1]$ car

$$1 \leq \sqrt{3x^2+1} \leq 2 \Longrightarrow 1 \leq 3x^2+1 \leq 4 \Longrightarrow 0 \leq 3x^2 \leq 3 \Longrightarrow x^2 \leq 1$$

$$\Longrightarrow -1 \leq x \leq 1.$$

3. La fonction $f$ n'est pas injective car $\exists x = 1, x' = -1$ tels
   $f(x) = f(x') = 2 \quad et \ x \neq x'$.

La fonction $f$ n'est pas surjective car $y = -5$ n'admet pas de pré-image (par la suite $f$ n'est pas bijective).

4. La fonction $f\ : \mathbb{R}^+ \longrightarrow [1, +\infty[$ est bijective si et seulement si $f$ est injective et surjective.

$i)f$ est injective si et seulement si :

$$\forall x, x' \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'.$$

Soit $x, x' \in \mathbb{R}^+$ tel que : $f(x) = f(x')$

$\sqrt{3x^2+1} = \sqrt{3x'^2+1} \Longrightarrow 3x^2+1 = 3x'^2+1 \Longrightarrow 3x^2 = 3x'^2 \Longrightarrow x = x' \ ou \ x = -x'$ mais car $x, x' \in \mathbb{R}^+$ donc $x = x' \Longrightarrow f$ est injective.

ii)$f$ est surjective si et seulement si : $\forall y \in [1, +\infty[\,, \exists x \in \mathbb{R}^+$ tel que $f(x) = y$.

Soit $y \in [1, +\infty[$ tel que $f(x) = y \quad (x = \ ?)$.

$$\sqrt{3x^2+1} = y \Longrightarrow 3x^2+1 = y^2 \Longrightarrow x^2 = \frac{1}{3}(y^2-1) \Longrightarrow x = \mp\sqrt{\frac{1}{3}(y^2-1)}$$

La racine est bien définie car $y > 1$, mais comme on cherche $x$ dans $\mathbb{R}^+$ donc on prend :

$x = \sqrt{\frac{1}{3}(y^2-1)}$.

Alors $f$ est surjective. Comme $f$ est injective et surjective alors $f$ est bijective.

Comme $f$ est bijective alors elle admet une fonction inverse $f^{-1} : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+$.

Soit $y \in [1, +\infty[$ tel que $f(x) = y \quad (x = \ ?)$

$\sqrt{3x^2+1} = y \Longrightarrow x = \sqrt{\frac{1}{3}(y^2-1)}$ (Par la même méthode qu'en haut).

Donc $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{1}{3}(x^2-1)}$.Tapez une équation ici.

**<u>Exercice n°5:</u>** Considérons la fonction $f : \mathbb{R} - \{2\} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{12x+5}{3x-6}$.

1. Montrer que $f$ est injective et déterminer si $f$ est surjective.
2. Trouver l'ensemble $F$ tel que $f$ est bijective de $\mathbb{R} - \{2\}$ vers $F$, puis calculer la fonction réciproque $f^{-1}$.

**<u>Solution :</u>**

1. a) $f$ est injective si et seulement si :
   $\forall x, x' \in \mathbb{R} - \{2\}$ tel que $f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'$.

Soit $x, x' \in \mathbb{R} - \{2\}$ tel que : $f(x) = f(x')$.

Donc $\frac{12x+5}{3x-6} = \frac{12x'+5}{3x'-6} \Longrightarrow (12x+5)(3x'-6) = (12x'+5)(3x-6)$

$$\Longrightarrow 36xx' + 15x' - 72x - 15 = 36xx' + 15x - 72x' - 15$$

$$\Longrightarrow 87x' = 87x \quad \Longrightarrow x = x'.$$ Donc $f$ et injective.

b) $f$ est surjective si et seulement si : $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} - \{2\}$ tel que $f(x) = y$.

Soit $y \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$ $\quad (x = ?)$.

Donc $\frac{12x+5}{3x-6} = y \Longrightarrow 12x + 5 = (3x-6)y \Longrightarrow 12x - 3xy = -6y - 5$

$\Longrightarrow x(12-3y) = -6y - 5 \Longrightarrow x = \frac{-6y-5}{12-3y}$.

Pour que $x$ soit défini il faut que $12 - 3y \neq 0 \Longrightarrow y \neq 4$. Donc $f$ n'est pas surjective sur $\mathbb{R}$.

2. Pour que $f$ soit bijective. Il faut qu'il soit surjective donc il faut que $y \neq 4$. Donc l'ensemble d'arriver $F$ doit être $F = \mathbb{R} - \{2\}$ c'est-à-dire $f : \mathbb{R} - \{2\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{4\}$.
   La fonction $f : \mathbb{R} - \{2\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{4\}$ est bijective donc elle admet une fonction réciproque $f^{-1} : \mathbb{R} - \{4\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{2\}$. Pour calculer la fonction $f^{-1}$ on pose $f(x) = y$ et on cherche $x$ en fonction de $y$. Par les mêmes étapes précédentes on trouve :
   $x = \frac{-6y-5}{12-3y}$ c'est-à-dire $f^{-1}(y) = \frac{-6y-5}{12-3y}$.
   On remplace $y$ par $x$ on obtient :
   $f^{-1} : \mathbb{R} - \{4\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{2\}, \quad f^{-1}(x) = \frac{-6x-5}{12-3x}$.