# CHAPITRE II

# RT DES MACHINES SYNCHRONES

## INTRODUCTION

En régime établi, la f.m.m. du rotor et celle résultante au stator sont stationnaires l'une par rapport à l'autre, et ainsi les flux embrassés par les circuits rotoriques ne changent pas avec le temps et aucune tension n'est induite dans ces circuits. Le circuit équivalent monophasé devient une simple fem en série avec une impédance synchrone.

En régime transitoire, comme un court-circuit aux bornes du générateur, les flux embrassés par les circuits rotoriques varient avec le temps. Ceci va induire des courants dans tous les circuits rotoriques, qui vont réagir à l'armature. La machine idéalisée est représentée par un ensemble de circuits couplés magnétiquement avec des inductances qui dépendent de la position angulaire du rotor. Les équations différentielles résultantes sont à coefficients variables et ne peuvent pas être résolus directement. On peut simplifier le problème en passant des grandeurs statoriques a, b, c à de nouvelles variables appartenant à un référentiel lié au rotor. Cette transformation est basée sur la théorie de la machine à deux axes et connue sous le nom de transformation de Park. Les équations transformées sont linéaires pourvu que la vitesse de rotation de la machine reste constante ou proche de constante comme dans la majorité des régimes transitoires importants (courts-circuits, stabilité transitoire, …).

## EQUATIONS DE LA MACHINE

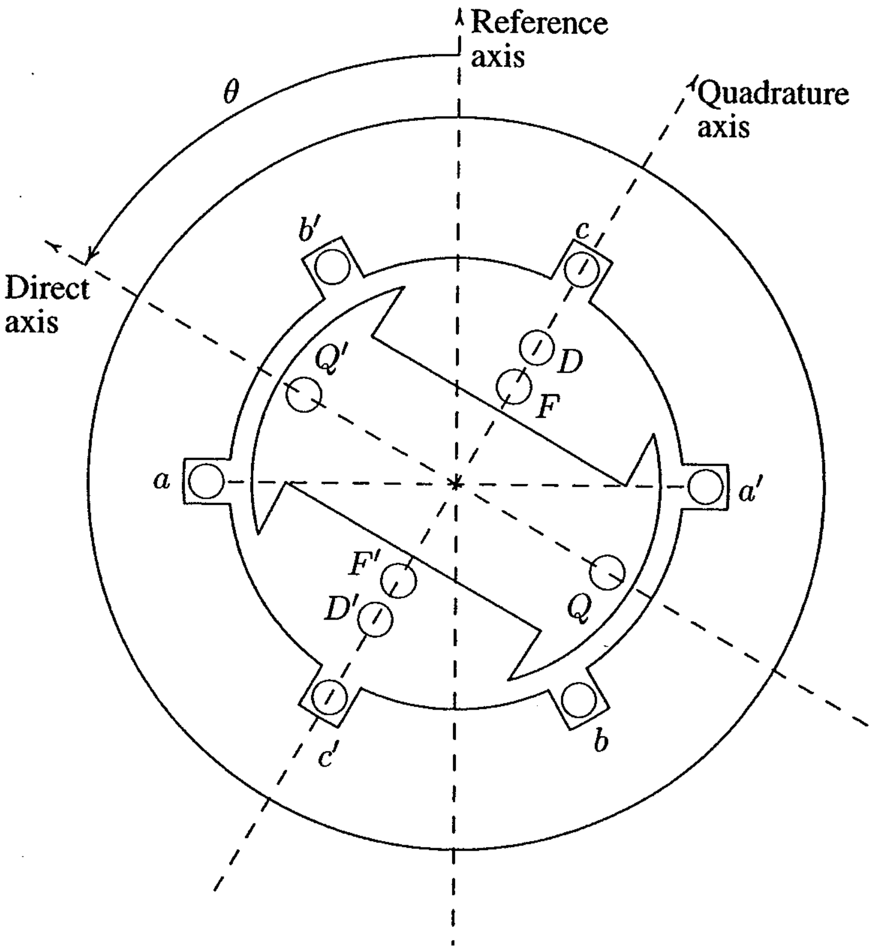
La machine synchrone est composée de trois enroulements au stator et d'un enroulement inducteur placé sur l'axe direct rotorique. Certaines machines comportent des amortisseurs placés sur le rotor qui peuvent etre représentés par un enroulement sur l'axe direct et un autre sur l'axe en quadrature. Ces enroulements sont représentés dans le schéma ci-dessous.

On va prendre comme axe de référence un axe tournant à la vitesse synchrone ω dirigé suivant l'axe de la phase a initialement (t = 0).

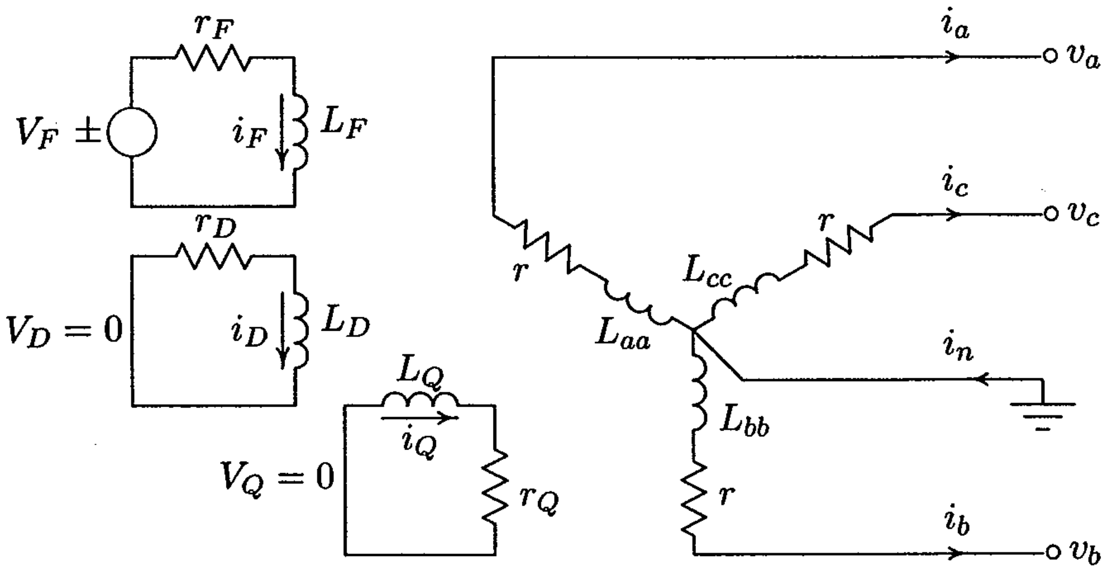
Si on prend θ comme l'angle avec lequel l'axe direct rotorique devance l'axe de la phase statorique a, alors

$$\theta = \omega t + \delta + \frac{\pi}{2} \qquad (1)$$

Où δ est l'angle de déplacement de l'axe en quadrature sur l'axe de référence et δ + π/2 est celui de l'axe direct sur l'axe de référence.




Les circuits statoriques et rotoriques peuvent être représentés par le schéma suivant, et ceci en négligeant la saturation et en supposant que les fmm sont sinusoïdales.



La convention prise ici est telle que les courants statoriques sont comptés positifs quand ils sortent de la machine. Les équations des tensions s'écrivent (Eq2)

$$\begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \\ -v_F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \\ i_F \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix} - \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \lambda_a \\ \lambda_b \\ \lambda_c \\ \lambda_F \\ \lambda_D \\ \lambda_Q \end{bmatrix}$$

ou sous forme condensée (Eq3)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{abc} \\ \mathbf{v}_{FDQ} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{abc} & 0 \\ 0 & \mathbf{R}_{FDQ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{abc} \\ \mathbf{i}_{FDQ} \end{bmatrix} - \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \lambda_{abc} \\ \lambda_{FDQ} \end{bmatrix}$$

Les flux embrassés sont donnés par (Eq4)

$$\begin{bmatrix} \lambda_a \\ \lambda_b \\ \lambda_c \\ \lambda_F \\ \lambda_D \\ \lambda_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{aa} & L_{ab} & L_{ac} & L_{aF} & L_{aD} & L_{aQ} \\ L_{ba} & L_{bb} & L_{bc} & L_{bF} & L_{bD} & L_{bQ} \\ L_{ca} & L_{cb} & L_{cc} & L_{cF} & L_{cD} & L_{cQ} \\ L_{Fa} & L_{Fb} & L_{Fc} & L_{FF} & L_{FD} & L_{FQ} \\ L_{Da} & L_{Db} & L_{Dc} & L_{DF} & L_{DD} & L_{DQ} \\ L_{Qa} & L_{Qb} & L_{Qc} & L_{QF} & L_{QD} & L_{QQ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \\ i_F \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix}$$

ou sous forme condensée (Eq5)

$$\begin{bmatrix} \lambda_{abc} \\ \lambda_{FDQ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{SS} & \mathbf{L}_{SR} \\ \mathbf{L}_{RS} & \mathbf{L}_{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_{abc} \\ \mathbf{i}_{FDQ} \end{bmatrix}$$

## INDUCTANCES

Les inductances statoriques propres varient en fonction de la position du rotor. Une bobine statorique a une inductance maximale quand son axe est aligné avec l'axe direct. En général ces inductances sont données par les formules (6)

$$
\begin{aligned}
L_{aa} &= L_s + L_m \cos 2\theta \\
L_{bb} &= L_s + L_m \cos 2(\theta - 2\pi/3) \\
L_{cc} &= L_s + L_m \cos 2(\theta + 2\pi/3)
\end{aligned}
$$

avec Ls et Lm des constantes positives.

De la même façon, on trouve les inductances mutuelles statoriques (formules 7)

$$
\begin{aligned}
L_{ab} = L_{ba} &= -M_s - L_m \cos 2(\theta + \pi/6) \\
L_{bc} = L_{cb} &= -M_s - L_m \cos 2(\theta - \pi/2) \\
L_{ca} = L_{ac} &= -M_s - L_m \cos 2(\theta + 5\pi/6)
\end{aligned}
$$

avec Ms constante positive.

Les inductances propres et mutuelles rotoriques sont toutes des constantes car elles voient un circuit magnétique uniforme. Elles sont données par les formules 8.

$$
L_{FF} = L_F \quad L_{DD} = L_D \quad L_{QQ} = L_Q
$$

$$
L_{FD} = L_{DF} = M_R \quad L_{FQ} = L_{QF} = 0 \quad L_{DQ} = L_{QD} = 0
$$

Enfin les inductances mutuelles stator-rotor sont données par les formules 9 ci-dessous.

Puisque ces inductances dépendent de l'angle qui dépend du temps, les équations différentielles de la machine ne sont pas à coefficients constants et la méthode de résolution de Laplace ne peut pas être utilisée.

$$
\begin{aligned}
L_{aF} = L_{Fa} &= M_F \cos\theta \\
L_{bF} = L_{Fb} &= M_F \cos(\theta - 2\pi/3) \\
L_{cF} = L_{Fc} &= M_F \cos(\theta + 2\pi/3) \\
L_{aD} = L_{Da} &= M_D \cos\theta \\
L_{bD} = L_{Db} &= M_D \cos(\theta - 2\pi/3) \\
L_{cD} = L_{Dc} &= M_D \cos(\theta + 2\pi/3) \\
L_{aQ} = L_{Qa} &= M_Q \sin\theta \\
L_{bQ} = L_{Qb} &= M_Q \sin(\theta - 2\pi/3) \\
L_{cQ} = L_{Qc} &= M_Q \sin(\theta + 2\pi/3)
\end{aligned}
$$

## TRANSFORMATION DE PARK

On simplifie la machine en transformant les variables statoriques des phases a, b, c en de nouvelles variables tournant avec le rotor. Cette transformation est appelée transformation de Park. On projette les variables actuelles sur trois axes ; l'un suivant l'axe direct, un deuxième suivant l'axe en quadrature, et le troisième suivant un axe stationnaire.

La transformation de Park des courants s'écrit (Eq. 10)

$$\begin{bmatrix} i_0 \\ i_d \\ i_q \end{bmatrix} = \sqrt{2/3} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ \cos\theta & \cos(\theta - 2\pi/3) & \cos(\theta + 2\pi/3) \\ \sin\theta & \sin(\theta - 2\pi/3) & \sin(\theta + 2\pi/3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix}$$

Sous forme matricielle on aura $i_{odq} = P\, i_{abc}$

Les mêmes transformations s'appliquent aux tensions v et les flux $\lambda$. ¨Puisque la matrice P est orthogonale ( $P^{-1} = P^T$), la puissance est invariante.

On veut maintenant transformer les inductances variables dans le temps en inductances ramenées au rotor. En augmentant la matrice P avec la matrice identité 3x3, U, on obtient (11)

$$\begin{bmatrix} \lambda_{0dq} \\ \lambda_{FDQ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{abc} \\ \lambda_{FDQ} \end{bmatrix}$$

En remplaçant les valeurs des inductances, on obtient le système (12)

$$\begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_d \\ \lambda_q \\ \lambda_F \\ \lambda_D \\ \lambda_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_d & 0 & kM_F & KM_D & 0 \\ 0 & 0 & L_q & 0 & 0 & kM_Q \\ 0 & kM_F & 0 & L_F & M_R & 0 \\ 0 & kM_D & 0 & M_R & L_D & 0 \\ 0 & 0 & kM_Q & 0 & 0 & L_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_0 \\ i_d \\ i_q \\ i_F \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix}$$

avec

$$k = \sqrt{3/2}.$$

$$L_0 = L_s - 2M_s$$

$$L_d = L_s + M_s + \frac{3}{2}L_m$$

$$L_q = L_s + M_s - \frac{3}{2}L_m$$

En transformant les tensions, flux et courants ; on obtient le système d'équations final (13)

$$\begin{bmatrix} v_0 \\ v_d \\ v_q \\ -v_F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & \omega L_q & 0 & 0 & \omega k M_Q \\ 0 & -\omega L_d & r & -\omega k M_F & -\omega k M_D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_0 \\ i_d \\ i_q \\ i_F \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} L_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_d & 0 & kM_F & kM_D & 0 \\ 0 & 0 & L_q & 0 & 0 & kM_Q \\ 0 & kM_F & 0 & L_F & M_R & 0 \\ 0 & kM_D & 0 & M_R & L_D & 0 \\ 0 & 0 & kM_Q & 0 & 0 & L_Q \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_0 \\ i_d \\ i_q \\ i_F \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix}$$

On voit que les coefficients sont constants si la vitesse de rotation est supposée constante ou presque constante. Ceci est vrai dans les études de court-circuits et de stabilité transitoire.

Aussi l'équation de la composante homopolaire est découplée des autres.