



Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la  
Recherche Scientifique  
Université Djilali Bounaama de Khemis Meliana  
Faculté des Sciences de la Nature et de Vie  
et des Sciences de la Terre

Support de cours en

## **Résistance Des Matériaux**

Réalisé par

**Dr. Yasmina KELLOUCHE**

Année Universitaire : 2020-2021

# Avant-propos

*La résistance des matériaux, désignée souvent par RDM, est la science du dimensionnement. C'est une discipline particulière de la mécanique des milieux continus qui permet de concevoir une pièce mécanique, un ouvrage d'art ou tout objet utilitaire.*

*La théorie de la RDM est très utilisée par les ingénieurs matériaux afin de répondre à deux problématiques ; caractériser les propriétés d'usage mécaniques d'un nouveau matériau et modéliser pour prédire et dimensionner des structures mécaniques.*

*Il est important de remarquer que pour pouvoir mener à bien ces calculs, une bonne connaissance des caractéristiques mécaniques du matériau est requise.*

*Pour être en mesure de réaliser ces études, il est nécessaire de procéder à la modélisation du problème. Cette étape consiste à appliquer un certain nombre d'hypothèses simplificatrices à un problème réel de façon à pouvoir traduire mathématiquement ce problème. La modélisation est une étape clé dans la résolution d'un problème de structure. Elle met en exergue le sens d'observation, « le sens physique » et les connaissances théoriques de l'ingénieur.*

*La première expérience connue de résistance des matériaux est imputée à Léonard de Vinci (1452-1519). Il s'agissait d'étudier la résistance de fils de cuivre soumis à un effort de traction d'intensité croissante. L'augmentation de l'effort résulte de l'écoulement de sable dans un panier auquel est noué le fil de cuivre. Lors de la rupture du fil, l'écoulement est stoppé et la masse de sable contenu dans le panier est ensuite pesée. Les expériences sont répétées plusieurs fois puis un fil de cuivre de diamètre deux fois inférieur est ensuite testé par le même procédé.*

*Bien que l'interprétation de cette expérience soit controversée, il semble que Léonard de Vinci fit la découverte suivante : les rapports des masses de sable mesurés lors des ruptures sont proportionnels aux rapports des diamètres des fils élevés au carré.*

*Il est remarquable de noter que cette observation, datant de la fin du XVe siècle, est tout à fait en accord et trouve sa justification à l'aide des théories modernes de la RDM détaillées plus loin dans ce document.*

*La Résistance Des Matériaux permet l'étude des contraintes et des déformations. Les contraintes mécaniques peuvent être vues comme des « efforts de cohésion » de la matière et sont homogènes à une pression (généralement exprimée en MPa). Les déformations d'un objet physique s'observent par un changement de forme de celui-ci et/ou de variation dans ses dimensions. Les déformations sont sans unités. Des définitions plus précises de ces deux notions fondamentales en RDM viendront plus tard dans ce manuscrit.*

# Objectifs du cours

*Ce cours intitulé Résistance Des Matériaux « RDM » est destiné aux étudiants de première année Master géotechnique de la Faculté des Sciences de la Nature et de Vie et des Sciences de la Terre et de l'Univers, Département de Science de la Terre et de l'Univers (STU).*

*Il est rédigé de manière simplifiée pour que n'importe quel étudiant débutant puisse comprendre les notions de base de la RDM, ainsi que des exemples et des exercices d'applications résolus sont introduits pour enrichir les connaissances et aboutir aux objectifs du cours.*

*Ce support de cours contient cinq chapitres ; Le premier chapitre « Introduction et généralités » donne les notions de base de la RDM avec une initiation aux calculs des réactions d'appuis des structures isostatiques. Aux chapitres 2, 3 et 4, l'étudiant se familiarise avec les notions de sollicitations simples, de diagrammes d'efforts intérieurs, de sections dangereuses, de contraintes et enfin de déformations (flèche). Il s'agit de la traction (ou la compression), le cisaillement pur et la flexion, respectivement. L'étude de la résistance au cisaillement d'un sol constitue un problème complexe de la mécanique des sols, ce qui rend nécessaire à un étudiant Géotechnicien d'avoir une base dans le calcul de la résistance d'un solide soumis à des contraintes de cisaillement.*

*Dans le chapitre 5, des notions de contraintes et de déformations de volumes sont présentés, afin que l'étudiant géotechnicien puisse comprendre les critères de rupture des sols comme celui de Mohr-Coulomb et puisse modéliser leurs comportements au futur.*

*Au terme du cours les étudiants seront capables de :*

- 1. Connaître les hypothèses de base de la RDM*
- 2. Comprendre le comportement des structures sous l'effet des forces externes*
- 3. Définir les contraintes agissant sur un élément*
- 4. Localiser les zones dangereuses dans une structure*

*En termes de savoir-faire :*

- 1. Appliquer les équations d'équilibre pour le calcul des réactions d'appuis*
- 2. Étudier le comportement d'une structure sous des actions simples*
- 3. Déterminer les déformations en chaque point d'un élément de structure*

*En termes de savoir-être :*

*Respecter la Réalisation des travaux dirigés afin d'améliorer leurs connaissances*

*Pour aboutir aux objectifs du cours, l'étudiant a besoin d'avoir des connaissances sur :*

- Mécaniques des milieux continus.*
- Modélisation des actions mécaniques.*
- Principe fondamental de la statique.*
- Calcul matriciel et différentiel.*

# Tables des matières

## Chapitre 1- Introduction et Généralités

1.1 Introduction .....	8
1.2 Hypothèses de la RDM .....	8
1.3 Classification des solides .....	9
1.3.1 Poutres .....	9
1.3.2 Plaques.....	10
1.3.3 Coques .....	10
1.4 Notion de charges.....	11
1.5 Convention de signes .....	12
1.6. Équilibre statique d'un solide .....	12
1.6.1 Forces.....	12
1.6.2. Équilibre statique.....	13
1.7 Torseur de cohésion .....	15
1.7.1 Détermination du torseur de cohésion .....	15
1.7.2 Equilibre de la poutre.....	16
1.7.3 Composantes du torseur de cohésion.....	16
1.8 Notion d'appuis (Efforts de liaison).....	17
1.8.1 Appui simple.....	17
1.8.2 Appui double (articulation).....	18
1.8.3 Encastrement .....	19
1.8.4 Appui déformable (appui élastique) .....	20
1.9 Efforts internes (sollicitations) .....	21
1.9.1 Effort Normal (N).....	21
1.9.2 Effort Tranchant (T) .....	22
1.9.3 Moments Fléchissant (M).....	22
1.9.4 Moment de Torsion (Mt) .....	22
1.10 Identification de la nature des sollicitations : .....	23
1.10.1 Sollicitations simples.....	23
1.10.2 Sollicitations composées.....	23
1.11 Exercices d'application .....	25
1.12 Exercices à résoudre.....	26

## Chapitre 2-Traction et compression simples

2.1 Introduction .....	29
2.2 Traction et compression simples .....	29
2.3 Contrainte normale.....	29
2.3.1 Coupure d'une facette.....	29

2.3.2 Définition d'une contrainte normale.....	30
2.4 Diagramme de l'effort normal (DEN).....	32
2.4.1 Diagramme Normal dans le cas d'une force concentrée .....	32
2.4.2 Diagramme normal dans le cas d'une charge uniformément répartie .....	33
2.5 Courbe Contrainte – Déformation.....	34
2.6 Condition de résistance .....	35
2.6.1 Limite élastique .....	35
2.6.2 Coefficient de sécurité .....	36
2.7 Condition de rigidité.....	36
2.8 Loi de déformation élastique.....	36
2.9 Exercices d'application .....	38
2.10 Exercices à résoudre.....	40

### **Chapitre 3- Cisaillement pur**

3.1 Introduction .....	44
3.2 Essai de cisaillement .....	44
3.3 Cisaillement pur - Théorie élémentaire.....	45
3.3.1 Etude de la contrainte de cisaillement .....	46
3.3.2 Etude des déformations en cisaillement .....	47
3.4 Condition de résistance au cisaillement .....	49
3.5 Cisaillement technologique .....	49
3.5.1 Expression de la contrainte tangentielle .....	50
3.5.2 Dimensionnement (contraintes admissibles) .....	50
3.6 Exercices d'application .....	51
3.7 Exercices à résoudre.....	52

### **Chapitre 4- Flexion simple**

4.1 Introduction .....	54
4.2 Hypothèses de calcul.....	54
4.3 Essai de flexion .....	55
4.4 Répartition des contraintes .....	55
4.4.1 Contraintes normales .....	55
4.4.2 Relation entre contrainte normale et moment fléchissant.....	56
4.4.3 Contrainte tangentielle.....	57
4.4.4 Relation entre efforts tranchants et moments fléchissant .....	58
4.5 Diagrammes des Efforts tranchants et des moments fléchissant.....	59
4.6 Relation entre moment fléchissant et effort tranchant.....	60
4.7 Relation entre effort tranchant et chargement réparti.....	61
4.8 Condition de résistance à la flexion .....	63
4.8.1 Contrainte normale .....	63
4.8.2 Contrainte tangentielle.....	63

4.10 Exercices d'application .....	66
4.11 Exercices à résoudre .....	68

## **Chapitre 5- Etat de contraintes et de déformations**

5.1 Introduction .....	71
5.2 Notion de contrainte .....	71
5.2.1 Vecteur contrainte.....	71
5.2.2. Contrainte normale et contrainte tangentielle.....	72
5.3 Etat de contrainte.....	72
5.3.1 Equations de transformation de l'état de contrainte linéaire .....	76
5.3.2 Equation de contrainte de l'état de contrainte plan .....	77
5.4 Cercle de Mohr.....	81
5.5 Relation contrainte-déformation.....	84
5.5.1 Loi de Hooke généralisée .....	85
5.5.2 Variation d'un volume unitaire .....	87
5.6 Equations de transformation des déformations .....	87
5.7 Exercices d'application.....	88
5.8 Exercices à résoudre.....	92
Références bibliographiques.....	94

# **Chapitre 1**

## **Introduction et Généralités**

## 1.1 Introduction

La Résistance Des Matériaux (RDM) est une simplification de la MMC : elle fournit des résultats qui ne sont, en toute rigueur, non exacts mais assez proches de la réalité pour permettre de dimensionner des structures, d'étudier leur résistance, les actions mécaniques qui s'y exercent et leur déformation.

La RDM permet de ramener l'étude du comportement global d'une structure (relation entre sollicitations-forces ou moments et déplacements) à celle du comportement local des matériaux la composant (relation entre contraintes et déformations).

Elle permet le calcul de structures :

- Bâtiments, charpentes, structures métalliques,....
- Ouvrages de génie civil,...
- Squelette structural de systèmes divers

Ce chapitre est consacré à une présentation des éléments de base de la RDM, en passant par les hypothèses fondamentales, la convention de signes et les types d'appuis. Tout en citant les différents types de sollicitations avec une initiation au tracé des diagrammes.

## 1.2 Hypothèses de la RDM

Dans son utilisation courante, la RDM fait appel aux hypothèses suivantes ([Bourahla](#)):

- *L'homogénéité, l'isotropie et la continuité du matériau*

On suppose que le matériau possède les mêmes propriétés élastiques en tous les points du corps, dans toutes les directions en un point quelconque du corps, et que le matériau est assimilé à un milieu continu.

- *L'élasticité et la linéarité du matériau*

On suppose qu'en chaque point contraintes et déformations sont proportionnelles et qu'après déformation, l'élément revient à son état initial.

- *La petitesse des déformations*

Les déformations dues aux charges sont négligeables par rapport aux dimensions des éléments et la configuration géométrique reste inchangée.

- *Hypothèse des sections planes (hypothèse de Navier-Bernoulli)*

Les sections droites restent planes et normales à la fibre moyenne au cours de la déformation.

- *Hypothèse de Saint Venant*



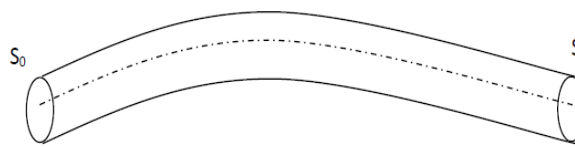
Tous les efforts qui interviennent dans la théorie peuvent être schématisés par leur torseur résultant.

Ces hypothèses simplificatrices conduisent à des solutions approchées qui permettent en général une bonne approximation du comportement des structures soumises à différents types de charges.

## 1.3 Classification des solides

### 1.3.1 Poutres

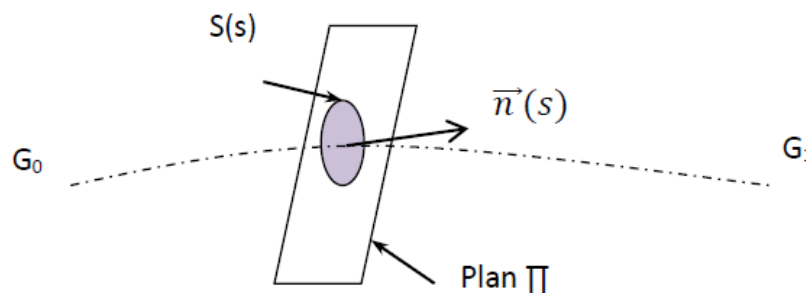
Une poutre est un solide dont une dimension est très grande par rapport aux deux autres : généralement sa longueur est très grande par rapport aux dimensions de la section droite  $S$  (Fig.1.1).



*Figure 1-1- Schématisation d'une poutre*

Les poutres sont associées, entre elles ou à d'autres types d'éléments pour constituer des  **systèmes ou structures**, Une structure simple peut être assimilée à une poutre.

Une poutre est engendrée par une section transversale plane ( $S$ ) dont le centre de gravité décrit une courbe  $G_0G_1$ . Le plan  $\pi$  contenant  $S$  reste normal à la courbe  $G_0G_1$  (Fig. 1.2).



*Figure 1-2- Section transversale d'une poutre*

On note:

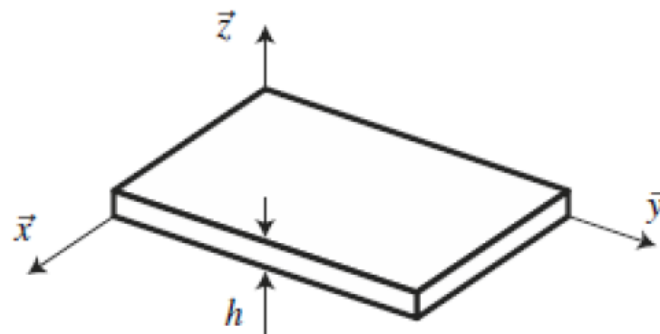
- $s$  : abscisse curviligne ;
- $G_0G_1$  : ligne moyenne (fibre moyenne) ;
- $\Pi$ : plan de la section droite  $S(s)$  ;
- $S(s)$  : section droite (plane, perpendiculaire à la ligne moyenne) ;
- $G(s)$ : centre de gravité de la section  $S(s)$  ;
- $n(s)$  : la normale à la section droite ;
- ✓ Si la fibre moyenne est plane, la poutre est dite plane ( $G_0G_1 \in \text{plan}$ ) ;
- ✓ Si la fibre moyenne est rectiligne, la poutre est dite droite ( $G_0G_1 = \text{droite}$ ) ;

- ✓ Si la fibre moyenne est plane et la section droite admet ce plan comme plan de symétrie, la poutre est dite à plan moyen.
- ✓ Si la section  $S$  est constante sur toute la poutre, dans ce cas la poutre est dite à section constante ou **poutre prismatique**.

Dans ce cours on se limitera au cas des structures planes composées des tronçons des poutres droites et prismatiques.

### 1.3.2 Plaques

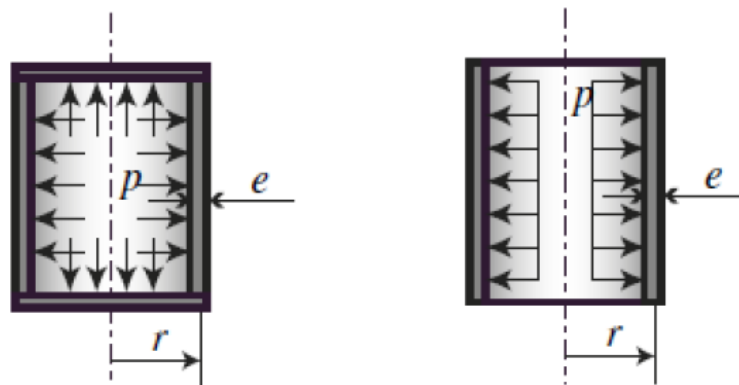
Une plaque est un élément prismatique d'épaisseur  $h$  petite devant les deux autres directions de l'espace (Fig. 1.3). Le plan moyen sera le plan  $(O, x, y)$ , le déplacement transverse étant la direction  $z$ . On suppose que l'hypothèse des petits déplacements vérifiée.



*Figure 1.3-* Schématisation d'une plaque

### 1.3.3 Coques

Une coque est un solide délimité par deux surfaces proches et approximativement parallèles. Elle est soit fermée sur elle-même, soit délimitée en outre par une surface périphérique (le bord) qui joint les deux surfaces principales (Fig.1.4).



*Figure 1.4-* Coque

## 1.4 Notion de charges

On appelle charge, toute action sollicitant une structure, généralement représentée sous forme d'une force. On cite les types de charges suivantes (Delaplace et al., 2008):

- ***Charges permanentes***

Ces charges sont dites également fixes ou invariables, elles sont dues au poids propre des divers éléments de la construction, qu'ils soient porteurs ou non, tels que : dalles, murs, revêtements etc...

- ***Charges variables ou d'exploitation***

Ces charges sont dites aussi charges utiles ou vives, Elles regroupent l'ensemble des actions qui peuvent envahir la construction en fonction de sa destination, telles que meubles personnes, machines etc...

- ***Charges sous forme d'actions indirectes***

Ce sont les charges qui ne peuvent se concrétiser sous forme de forces mais font néanmoins naître des efforts internes dans une structure. Parmi ces charges on cite les tassements différentiels, les dilatations et contractions forcées causées par des gradients thermiques, retrait ou fluage des matériaux, frottement des appareils d'appui etc...

- ***Charges dynamiques***

Ce sont des charges qui entrent en interactions avec les oscillations possibles de la construction (vent, séisme, machines, explosion, salle de danse) etc...

- ***Charges exceptionnelles***

Ce sont des actions spéciales, improbables mais possibles telles que chocs dû aux véhicules, navires grues, chute de rochers, déraillement de véhicules ferroviaires, développement incontrôlé d'incendie, tornade etc...

- ***Charges dues au vent***

L'action du vent sur les constructions résulte de l'écoulement plus ou moins entravé de la masse d'air autour et aux bords des constructions.

Le vent produit :

- des actions statiques qui se traduisent en forces globales agissant sur l'ensemble de la construction
- pressions et dépressions locales s'exerçant sur les parois de la construction ;
- Pour les constructions souples, des actions dynamiques qui se manifestent par des oscillations partielles ou totales de la construction.

## 1.5 Convention de signes

Généralement on utilise le système Cartésien ou rectangulaire pour toutes les structures. Cependant, pour les structures en arc, le système polaire s'avère plus pratique. Le premier ayant les axes OX, OY et OZ mutuellement perpendiculaire. Les sens positifs de ces axes obéissent à la règle de la main droite. Comme indiqué ci-dessous (Fig. 1.5), on choisit les sens positifs de deux axes X et Y par exemple, le sens positif de l'axe Z est suivant la direction d'une vis tournant de l'axe X vers l'axe Y.

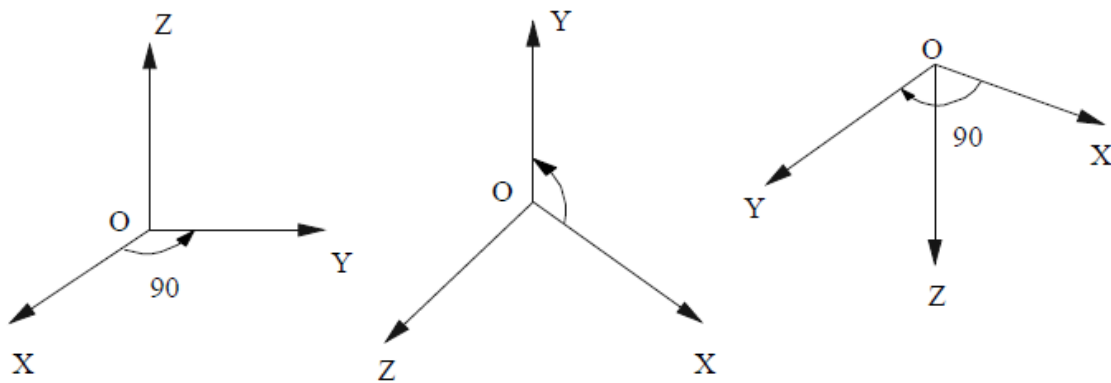


Figure 1.5- Convention de signes

## 1.6. Équilibre statique d'un solide

L'équilibre statique du solide exige que la somme de toutes les forces agissant sur le solide soit égale à zéro. Les équations fondamentales de la statique sont à la base de calcul de la RDM (Bastien ; 2014)

### 1.6.1 Forces

Une force est une grandeur vectorielle. Elle est caractérisée par (Fig .1.6) :

- son point d'application ;
- sa ligne d'action (direction) ;
- son sens ;
- son intensité (module).

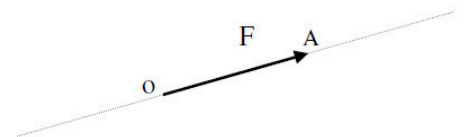


Figure 1.6- Schématisation d'une force

## 1.6.2. Équilibre statique

Soit un solide matériel indéformable (S) en équilibre soumis à des forces  $F_i$  et à des moments  $M_i$  (Fig.1.7).

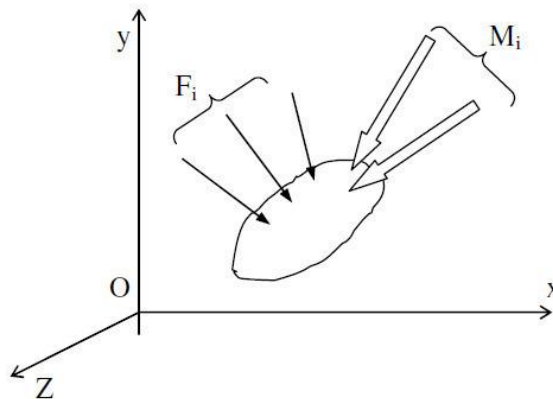


Figure 1.7- Equilibre statique d'un solide

Soient :

- Un repère orthonormé  $R (o, x, y)$  ;
- $x_i, y_i, z_i$  les coordonnées de  $A_i$ , point d'application de la force  $F_i$  ;
- $F_x, F_y, F_z$  les composantes de la force  $F_i$  ;
- $M_x, M_y, M_z$  les composantes du couple  $M_i$ .

Traduisons le principe fondamental de la statique en écrivant que le torseur des actions extérieures est équivalent à zéro :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_i = 0 \\ \sum M_i + \sum O A_i \wedge F_i = 0 \end{array} \right. \quad (1.1)$$

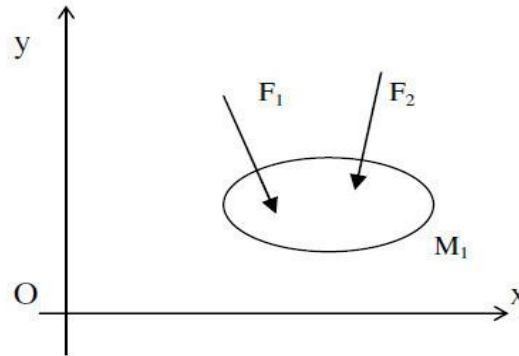
Ces deux relations vectorielles projetées sur les axes du repère  $R$  conduisent aux six équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum F_z = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum M_x + \sum (yF_z - zF_y) = 0 \\ \sum M_y + \sum (zF_x - xF_z) = 0 \\ \sum M_z + \sum (xF_y - yF_x) = 0 \end{array} \right. \quad (1.2)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}$ 
 $\underbrace{\hspace{10em}}$

*Forces*
*moments*

Si toutes les forces sont dans un même plan, il est judicieux de choisir un repère  $R$  tel que le plan  $(OX, OY)$  coïncident avec le plan des forces (Figure 1.8)



**Figure 1.8-** Plan des forces

Dans ces conditions, la projection sur les axes des équations du principe fondamental de la statique fournit trois équations scalaires :

$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \\ \Sigma M_z + \Sigma (xF_y - yF_x) = 0 \end{cases}$$

**Remarque**

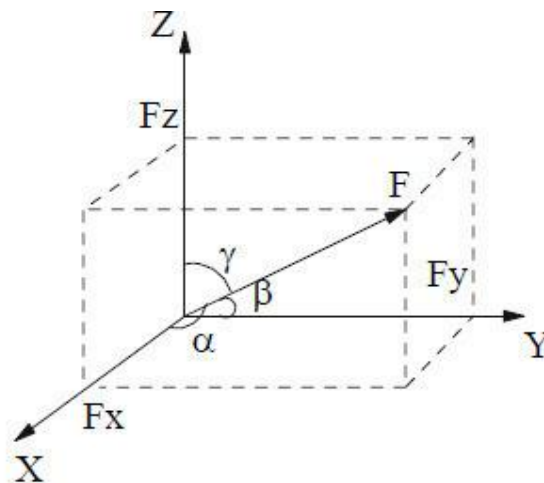
1° Dans le cas où les forces sont toutes horizontales il n'y a plus que deux équations.

2° Il n'y a qu'une seule équation des moments ; toutefois il peut être intéressant, pour le calcul, de déterminer l'équilibre des moments successivement par rapport à deux points différents. Il ne s'agit pas alors d'une équation supplémentaire, mais d'une combinaison des équations relatives à l'équilibre des moments et à l'équilibre des forces.

**Rappel**

Dans un espace cartésien une force  $F$  est définie par une intensité  $F$  et des angles  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  (Fig1.9).

Avec,  $F_x = F \cos \alpha$  ;  $F_y = F \cos \beta$  et  $F_z = F \cos \gamma$ .



**Figure 1.9-** Illustration d'une force dans un espace cartésien

## 1.7 Torseur de cohésion

### 1.7.1 Détermination du torseur de cohésion

Pour mettre en évidence les efforts transmis par la matière au niveau d'une section droite d'une poutre, nous effectuons une coupure imaginaire par un plan perpendiculaire à la fibre moyenne. Ce plan définit une section  $S$  de barycentre  $G$  qui divise la poutre en deux tronçons fictifs (AG et GB). Chaque tronçon est en équilibre et l'application du Principe Fondamental de la statique, à l'un ou à l'autre, permet d'identifier et de calculer les efforts intérieurs exercés entre les deux tronçons au niveau de la coupure (Fig.1.10) (Bourahla).

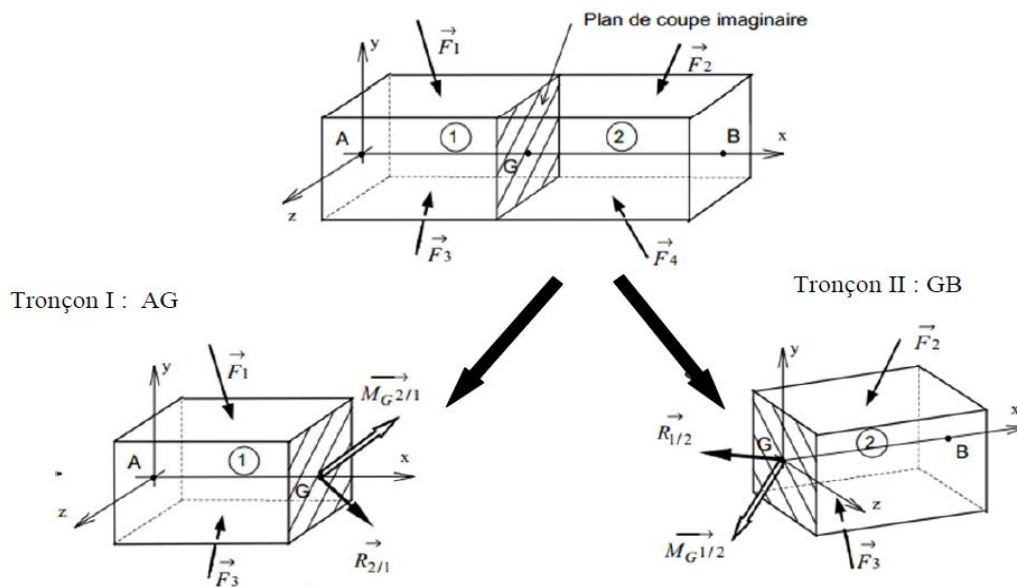


Figure 1.10- Illustration d'une coupe fictive sur une poutre

Les actions mécaniques entre les deux tronçons sont les efforts intérieurs à la poutre que l'on peut modéliser par un torseur appelé torseur de cohésion et dont les éléments de réduction au point  $G$  centre de surface sont :

- ✓ Une résultante  $\vec{R}$
- ✓ Un moment résultant  $\vec{M}_G$

Liées par la relation suivante :

$$\left\{ \tau_{CohII/I} \right\}_G = \left\{ \tau_{Efforts\_intérieurs} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \vec{M}_G \end{array} \right\}$$

Deux conventions d'écriture sont possibles :

- Convention 1 : Le torseur de cohésion modélise les actions mécaniques de la partie (2) sur la partie (1).
- Convention 2 : Le torseur de cohésion modélise les actions mécaniques de la partie (1) sur la partie (2).

### 1.7.2 Equilibre de la poutre

L'équilibre du tronçon I *ou de la partie gauche* se traduit par :

$$\{\tau_{Coh}\}_G + \{\tau_{ext \rightarrow 1}\}_G = \{\bar{0}\}$$

Avec :

$$\{\tau_{ext \rightarrow 1}\}_G = \{\tau_{\bar{F}_{1 \rightarrow 1}}\}_G + \{\tau_{\bar{F}_{3 \rightarrow 1}}\}_G$$

Ce qui permet de déduire que :

$$\{\tau_{coh}\}_G = -\{\tau_{actionsm\u00e9caniques\u00e0gauche}\}_G$$

Comme l'équilibre de la poutre se traduit par :

$$\{\tau_{actionsm\u00e9caniques\u00e0droite}\}_G + \{\tau_{actionsm\u00e9caniques\u00e0gauche}\}_G = \{\bar{0}\}$$

On peut d\u00e9duire que :

$$\{\tau_{coh}\}_G = \{\tau_{actionsm\u00e9caniques\u00e0droite}\}_G$$

Finalement, le torseur de coh\u00e9sion au centre de surface G d'une surface droite de poutre se d\u00e9fini en effectuant la somme des torseurs, au m\u00eame point G , des actions m\u00e9caniques agissant soit \u00e0 gauche de la section droite, somme pr\u00e9c\u00e9d\u00e9e du signe : « - », soit \u00e0 droite de la section droite, somme pr\u00e9c\u00e9d\u00e9e du signe « + ».

Cette relation permet de simplifier le calcul du torseur de coh\u00e9sion dans le cas o\u00f9 le torseur des actions m\u00e9caniques \u00e0 droite est plus simple \u00e0 d\u00e9terminer.

Chaque tron\u00e7on est en \u00e9quilibre et l'application du PFS, \u00e0 l'un ou \u00e0 l'autre, permet de faire appara\u00eetre et de calculer le torseur de coh\u00e9sion au niveau de la coupure.

### 1.7.3 Composantes du torseur de coh\u00e9sion

Les composantes du torseur de coh\u00e9sion se notent conventionnellement comme ci-dessous :

$$\{\tau_{Coh}\}_G = \left\{ \begin{array}{c} \bar{R} \\ \bar{M}_G \end{array} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{cc} N & M_t \\ T_y & M_{fy} \\ T_z & M_{fz} \end{array} \right\}_G$$

Avec :

N : Effort normal

T<sub>y</sub> : Effort tranchant suivant l'axe (G,y)



$T_z$  : Effort tranchant suivant l'axe (G,z)

$M_t$  : Moment de torsion

$M_{fy}$  : Moment fléchissant suivant l'axe (G,y).

$M_{fz}$  : Moment fléchissant suivant l'axe (G,z)

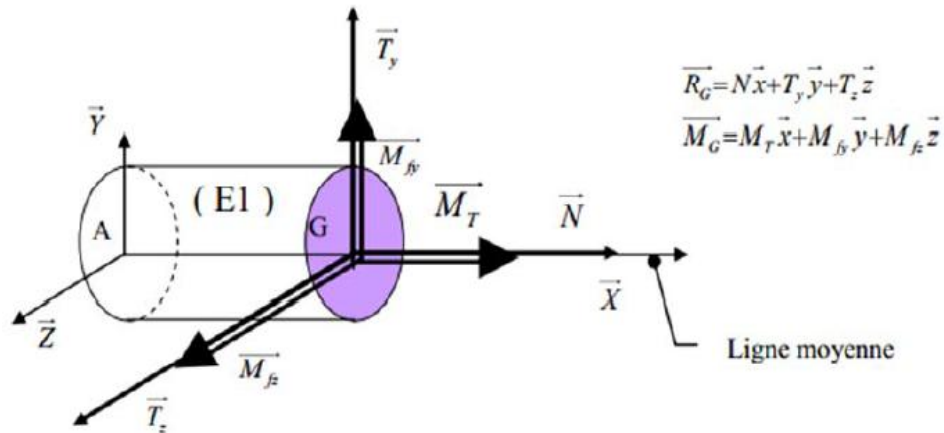


Figure 1.11- Les composantes du tenseur de cohésion

## 1.8 Notion d'appuis (Efforts de liaison)

Les actions sont les forces appliquées à une structure ou un solide (forces connues). Ces forces (actions) créent des réactions aux appuis de la structure (forces inconnues). L'ensemble des forces et des réactions d'appuis doit constituer un système de forces extérieures en équilibre.

Les constructions reposent sur leurs fondations par l'intermédiaire des dispositifs spéciaux appelés appuis. Leur but principal est de prévenir le mouvement d'ensemble de la structure pour garantir leur équilibre.

Au niveau des appuis apparaissent des réactions qui réagissent à l'action des forces appliquées.

La classification des appuis se fait d'après le nombre de degrés de liberté (*ddl*) c'est-à-dire les possibilités de mouvement qu'ils laissent au système et d'après la nature des réactions qu'ils peuvent exercer.

Pour les structures planes on cite ces quatre types d'appuis :

### 1.8.1 Appui simple

Ce type d'appui laisse à la structure toute liberté de pivoter autour de O (extrémité de la poutre) et de se déplacer perpendiculairement à la droite joignant les points de contact (suivant l'axe OX).

$R_y$  est la seule inconnue dans ce type de liaison (Fig.1.12).

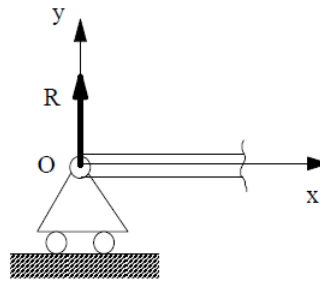


Figure 1.12- Schématisation d'un appui simple

### Exemple

Poutre reposant sur un corbeau solidaire d'un poteau par l'intermédiaire d'un appui néoprène (le néoprène assurant la possibilité de déplacement horizontal et de rotation autour du centre O de la liaison) comme le montre la figure 1.13.

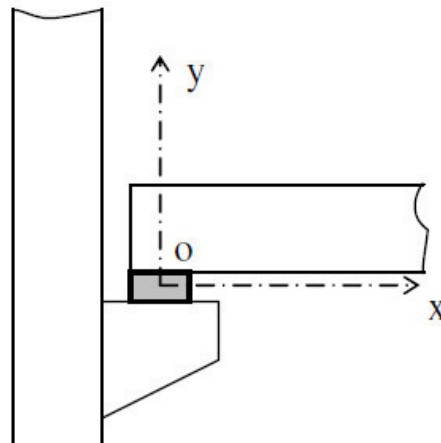


Figure 1.13- Exemple d'un appui simple

Le seul effort transmissible dans cette liaison est une force portée par y. Donc, lorsqu'on isolera la poutre par exemple, afin d'étudier son équilibre, il faudra remplacer cette liaison par une "réaction de liaison" inconnue qui sera une force R appliquée en O et dont la direction sera celle de l'axe OY (perpendiculaire à la direction suivant laquelle l'appui peut se déplacer).

Dans le cas de la figure 1.13, le torseur des efforts transmissibles dans la liaison s'écrit :

$$\left\{ \zeta_{\text{ext}} \right\}_O = \left\{ R \begin{matrix} 0 \\ R_y \\ 0 \end{matrix} \quad M \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}$$

### 1.8.2 Appui double (articulation)

Cet appui autorise les rotations d'une extrémité de la poutre ou d'un des éléments constituant la structure. L'articulation introduit 2 inconnues ;  $R_x$  et  $R_y$  (Fig.1.14).

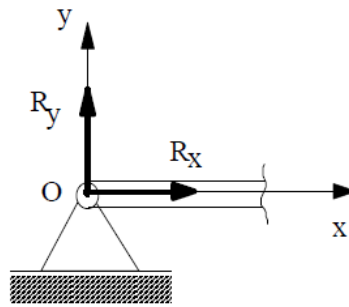


Figure 1.14- Schématisation d'un appui double

### Exemple

Poteau métallique articulé en pied sur un massif en béton (Fig.1.15)

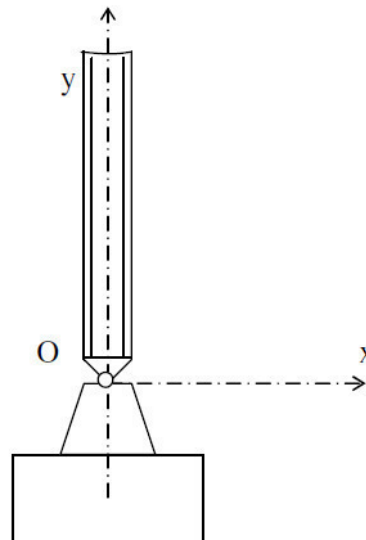


Figure 1.15- Exemple d'un appui double

Les efforts transmissibles dans cette liaison sont des forces portées par x et y.

Par conséquent, le torseur des efforts transmissibles dans la liaison s'écrit :

$$\left\{ \zeta_{\text{ext}} \right\}_O = \left\{ R \begin{array}{l} R_x \\ R_y \\ 0 \end{array} \quad M \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}$$

### 1.8.3 Encastrement

L'encastrement interdit tout déplacement de la section droite de l'appui. Ce type d'appui introduit donc 3 inconnues, les deux projections de R sur deux axes du plan moyen et l'intensité du moment M qui est perpendiculaire sur le plan moyen (Fig.1.16).

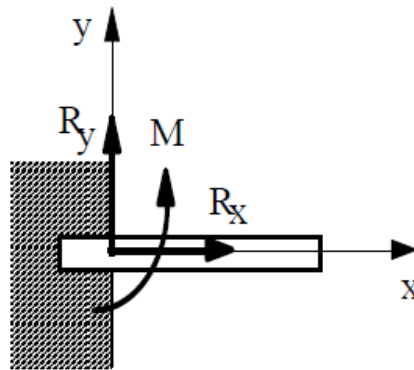


Figure 1.16- Schématisation d'un encastrement

### Exemple

Poteau encastré à un massif de fondation (Fig.1.17).

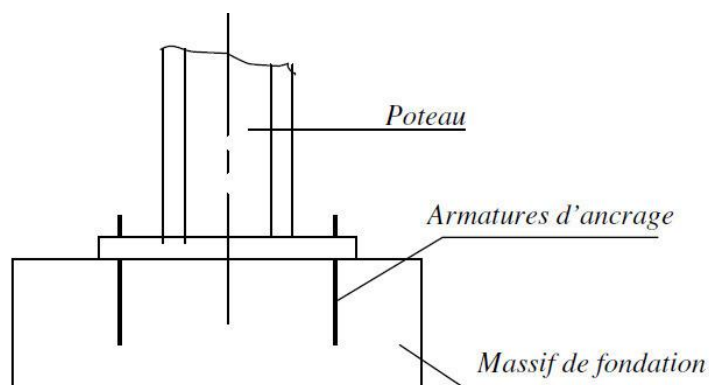


Figure 1.17 - Exemple d'un encastrement

Le torseur des efforts transmissibles dans cette liaison s'écrit :

$$\left\{ \zeta_{\text{ext}} \right\}_O = \left\{ R \begin{array}{l} R_x \\ R_y \\ 0 \end{array} \quad M \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ M_z \end{array} \right\}$$

### 1.8.4 Appui déformable (appui élastique)

C'est un appui qui peut subir des déformations dans la direction d'une composante de réaction (exemple sol compressible).

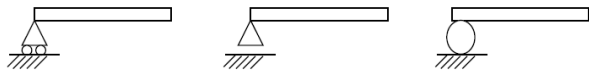
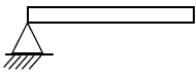
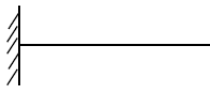
Si le déplacement est proportionnel à la réaction, l'appui déformable est dit élastique (Fig.1.18).



Figure 1.18- Schématisation d'un appui élastique

Le tableau ci-après récapitule les trois types de liaisons avec leurs modélisations et inconnues d'appuis.

Tableau 1-1- Modélisation des liaisons

Type de liaison	Modélisation	Inconnus d'appuis
Appui simple		1 inconnue $R_Y \uparrow$
Appui double		2 inconnues $R_Y \uparrow$ $R_X \rightarrow$
Encastrement		3 inconnues $R_Y \uparrow$ $R_X \rightarrow$ $M \curvearrowright$

### 1.9 Efforts internes (sollicitations)

Sous l'effet des charges extérieures, les forces entre les particules d'un corps (élément) en équilibre varient. En Résistance des Matériaux, on appelle souvent cette variation des forces *efforts internes* (Fig.1.19).

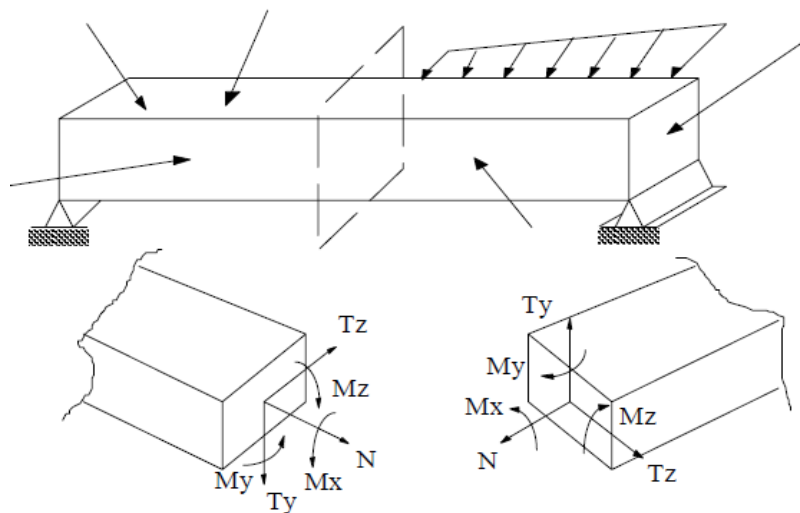
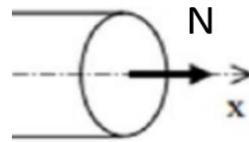


Figure 1.19- Efforts internes

#### 1.9.1 Effort Normal (N)

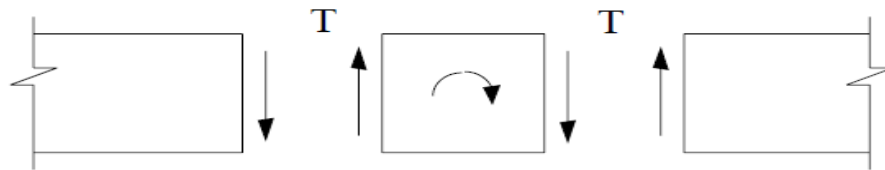
La composante N de la résultante F représente la somme des projections de toutes les forces intérieures agissant suivant la normale de la section (ou suivant l'axe longitudinal de l'élément) (Fig.1.20). L'effort normal provoque une déformation longitudinale de l'élément. N est considéré positif s'il s'agit d'une traction et négatif dans le cas contraire.



*Figure 1.20- Effort normal*

### 1.9.2 Effort Tranchant (T)

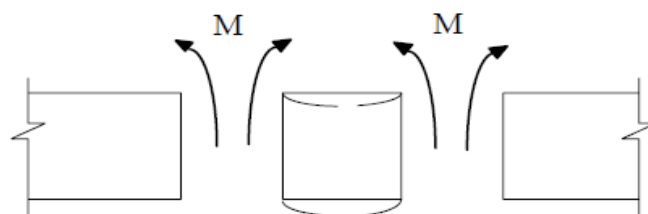
Les forces transversales  $T_z$ , et  $T_y$  sont les sommes des projections de toutes les forces intérieures dans la section sur les axes centraux principaux de cette dernière (Fig.1.21). Ces efforts tranchants provoquent le cisaillement des bords de la section respectivement dans la direction des axes Z et Y. Le sens de T sur le plan est positif par convention quand il tend à faire tourner un élément entre deux sections dans le sens des aiguilles d'une montre.



*Figure 1.21- Effort tranchant*

### 1.9.3 Moments Fléchissant (M)

Les composantes  $M_y$ , et  $M_z$  du vecteur moment résultant représentent les sommes des moments de toutes les forces intérieures dans la section, par rapport aux axes d'inertie principaux de cette dernière Y et Z respectivement (Fig.1.22). Le sens positif des moments dans le plan par convention tend les fibres inférieures et comprime les fibres supérieures de la section.



*Figure 1.22- Moment fléchissant*

### 1.9.4 Moment de Torsion (Mt)

Le moment de torsion  $M_x$  (ou  $M_t$ ) est la somme des moments de toutes les forces intérieures dans la section par rapport à l'axe de la barre X (Fig.1.23). Le moment de torsion est positif lorsqu'il tend à tourner la section dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (sens trigonométrique) en regardant la section du côté de la normale extérieure.

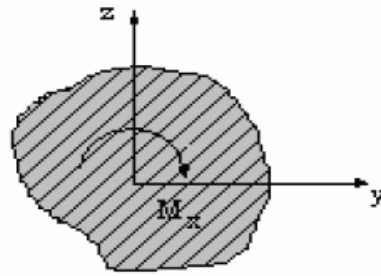


Figure 1.23- Moment de torsion

## 1.10 Identification de la nature des sollicitations :

### 1.10.1 Sollicitations simples

Si une seule composante  $N$ ,  $T$ ,  $MT$  ou  $Mf$  existe, alors que toutes les autres sont nulles, on dit que l'on a une sollicitation simple.

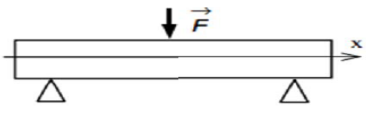
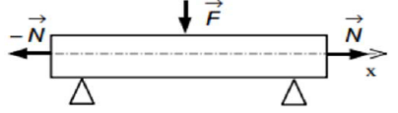
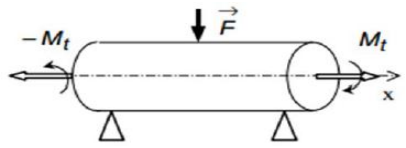
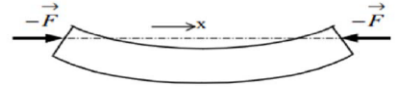
Tableau 1.2- Sollicitations simples

Torseur de cohésion	Sollicitation	Exemple
$\{\tau_{coh}\}_G = \begin{Bmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_G$	<b>TRACTION</b> (Pour la compression, les vecteurs forces sont en sens inverse)	<p>A horizontal cylinder is shown with a dashed line through its center representing the x-axis. At the left end, a force vector <math>-F</math> points to the left. At the right end, a force vector <math>F</math> points to the right.</p>
$\{\tau_{coh}\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_G \text{ ou } \{\tau_{coh}\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ T_z & 0 \end{Bmatrix}_G$	<b>CISAILLEMENT</b>	<p>A horizontal cylinder is shown with a dashed line through its center representing the x-axis. A vertical dashed line through the center represents the y or z axis. At the top, a force vector <math>-F</math> points downwards. At the bottom, a force vector <math>F</math> points upwards.</p>
$\{\tau_{coh}\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & M_t \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_G$	<b>TORSION</b>	<p>A horizontal cylinder is shown with a dashed line through its center representing the x-axis. At the left end, a curved arrow labeled <math>-M_t</math> indicates a counter-clockwise moment. At the right end, a curved arrow labeled <math>M_t</math> indicates a clockwise moment.</p>
$\{\tau_{coh}\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_{fy} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_G \text{ ou } \{\tau_{coh}\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{Bmatrix}_G$	<b>FLEXION PURE</b>	<p>A horizontal cylinder is shown with a dashed line through its center representing the x-axis. The cylinder is curved downwards. At the left end, a curved arrow labeled <math>-M_{tz}</math> indicates a counter-clockwise moment. At the right end, a curved arrow labeled <math>M_{tz}</math> indicates a clockwise moment.</p>

### 1.10.2 Sollicitations composées

Si deux composantes au moins sont non nulles, on dit que l'on a une sollicitation composée.

Tableau 1.3 - Sollicitations composées

Torseur de cohésion	Sollicitation	Exemple
$\{\tau_{coh}\}_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_{fy} \\ T_z & 0 \end{pmatrix}_G$ ou $\{\tau_{coh}\}_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{pmatrix}_G$	<b>FLEXION PLANE SIMPLE</b>	
$\{\tau_{coh}\}_G = \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & M_{fy} \\ T_z & 0 \end{pmatrix}_G$ ou $\{\tau_{coh}\}_G = \begin{pmatrix} N & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{pmatrix}_G$	<b>FLEXION + TRACTION</b>	
$\{\tau_{coh}\}_G = \begin{pmatrix} 0 & M_t \\ 0 & M_{fy} \\ T_z & 0 \end{pmatrix}_G$ ou $\{\tau_{coh}\}_G = \begin{pmatrix} 0 & M_t \\ T_y & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{pmatrix}_G$	<b>FLEXION + TORSION</b>	
$\{\tau_{coh}\}_G = \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & M_{fy} \end{pmatrix}_G$	<b>FLAMBAGE</b>	

Le tableau 1.4 ci-dessous donne quelques exemples de sollicitations.

Tableau 1.4- Exemples de sollicitations

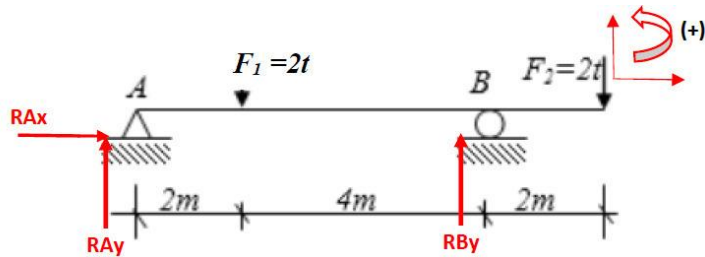
Type	Commentaire	Exemple
<b>Traction</b>	Allongement longitudinal. On tire de chaque côté.	Barre de remorquage
<b>Compression</b>	Raccourcissement. On appuie de chaque côté.	Poteau supportant un plancher
<b>Cisaillement</b>	Glissement relatif des sections	Goujon de fixation
<b>Torsion</b>	Rotation par glissement relatif des sections droites	Arbre de transmission d'un moteur
<b>Flexion simple</b>	Fléchissement sans allongement des fibres contenues dans le plan moyen	Planche de plongeur
<b>Flexion pure ou circulaire</b>	Fléchissement sans effort tranchant dans certaines zones	Partie de poutre entre deux charges concentrées ou soumise à un couple.



## 1.11 Exercices d'application

### Exercice 1.1

Calculer les réactions d'appuis de la poutre chargée suivante :



### Solution

D'après les équations d'équilibre :

$$\sum F_x = 0 \rightarrow R_{Ax} = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow R_{Ay} + R_{By} - F_1 - F_2 = 0 \quad (2)$$

$$\rightarrow R_{Ay} + R_{By} - 2 - 2 = 0 \rightarrow R_{Ay} + R_{By} = 4t \quad (2')$$

$$(3)$$

$$\rightarrow R_{By}(6) - 2(2) - 2(8) = 0$$

$$\rightarrow R_{By} = \frac{20}{6}$$

$$\rightarrow R_{By} = 3.34 t$$

En la remplaçant dans l'équation (2'), on aura :

$$R_{Ay} = 4 - 3.34$$

$$\rightarrow R_{Ay} = 0.66 t$$

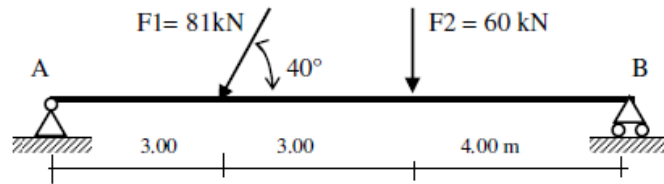
### Vérification

Pour vérifier nos résultats, on calcule le moment des forces par rapport au deuxième appui (B). Si la somme des moments par rapport à ce point est nulle, alors les résultats trouvés sont justes. Sinon, ils sont faux et il faut refaire le calcul pour corriger la faute.

C'est vérifié, donc les résultats trouvés sont justes.

**Exercice 1.2**

Calculer les réactions d'appui de la poutre ci-après :



**Solution**

On montre sur la figure suivante les composantes suivant x et y des réactions d'appuis en A et B, les intensités de la force F<sub>2</sub> et les composantes de la force F<sub>1</sub>.

On a :

$$\begin{cases} \Sigma F_x = R_A^x - F_1 \cdot \cos \alpha = 0 & (1) \\ \Sigma F_y = R_A^y + R_B^y - F_1 \cdot \sin \alpha - F_2 = 0 & (2) \\ \Sigma \mathcal{M}_A = -10 \cdot R_B^y + 3 \cdot F_1 \cdot \sin \alpha + 6 \cdot F_2 = 0 & (3) \end{cases}$$

A partir de ces trois équations, on déduit que :

$$R_A^y = 60.4 \text{ kN} \quad R_B^y = 51.6 \text{ kN} \quad R_A^x = 62 \text{ kN}$$

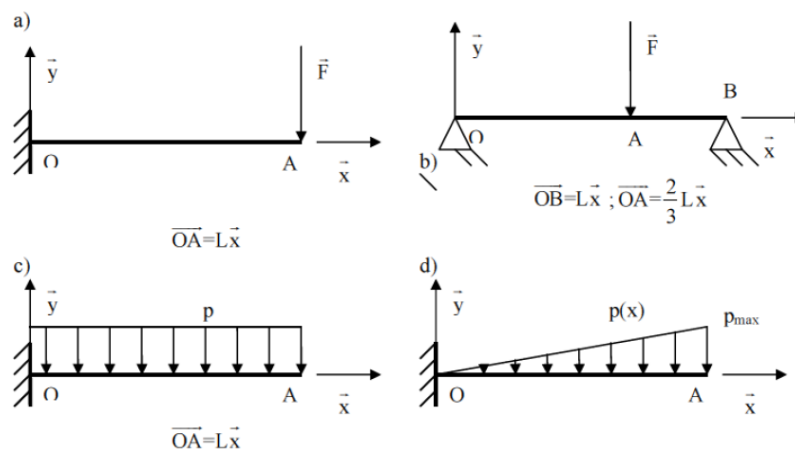
*Note* ; puisque les résultats sont positifs, donc les sens choisis pour les réactions est bon.

**1.12 Exercices à résoudre**

**Exercice 1.1**

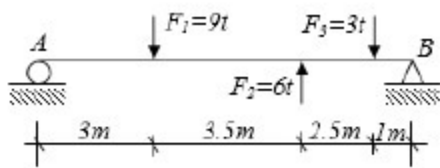
Pour chacun des exemples suivants, on demande de :

- déterminer les actions de liaisons
- calculer le torseur de cohésion

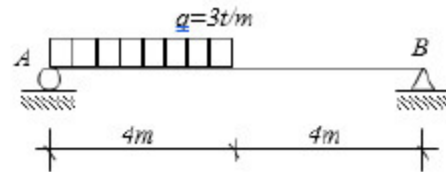


**Exercice 1.2**

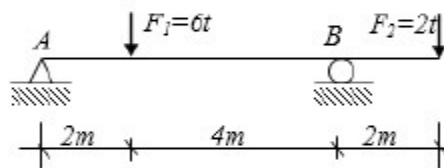
Calculer les réactions d'appuis des systèmes ci-dessous (les solutions sont en-dessous de chaque système):



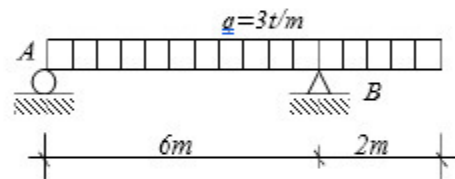
Rép. :  $R_A = 4.5 t$ ,  $R_B = 1.5 t$



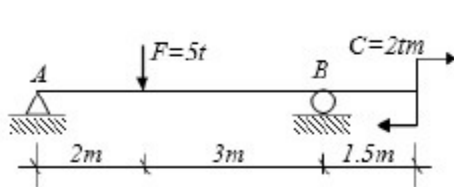
Rép. :  $R_A = 9 t$ ,  $R_B = 3 t$



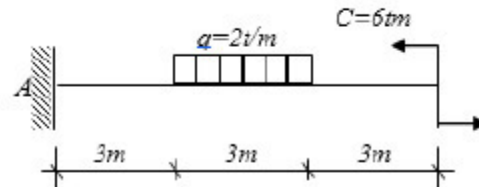
Rép. :  $R_A = 3.34 t$ ,  $R_B = 4.66 t$



Rép. :  $R_A = 8 t$ ,  $R_B = 16 t$



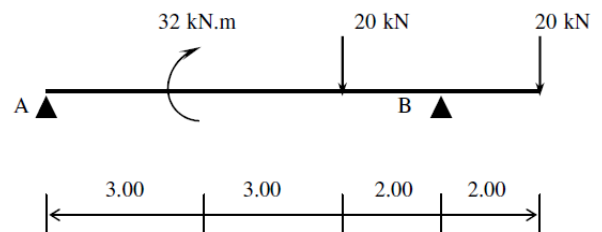
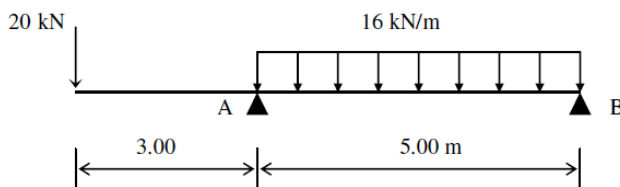
Rép. :  $R_A = 2.6 t$ ,  $R_B = 2.4 t$



Rép. :  $M_A = -21 tm$ ,  $R_A = 6 t$

**Exercice 1.3**

Déterminer les valeurs des composantes horizontales et verticales des réactions d'appuis des structures ci-dessous :

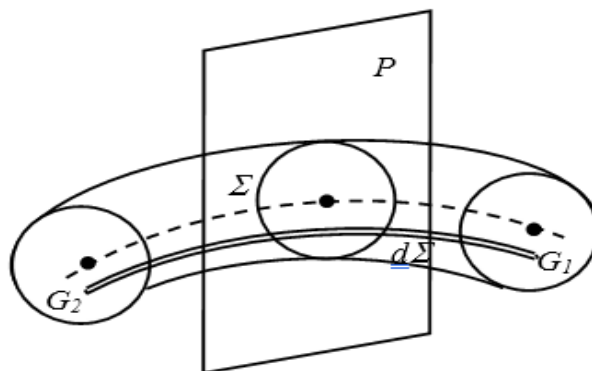


# **Chapitre 2**

## **Traction et Compression simples**

## 2.1 Introduction

L'ingénieur utilise la **résistance des matériaux** avant tout pour déterminer les dimensions des éléments de construction et vérifier leur résistance et leur déformation. L'un des éléments structurels le plus fréquent est la poutre, un objet de grande longueur par rapport à sa section, chargée dans son plan moyen de symétrie (Fig.2.1).



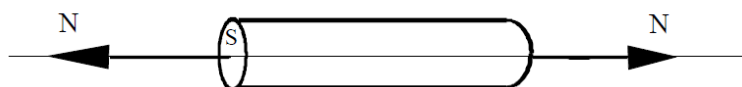
*Figure 2.1 - Élément de poutre*

Cet élément structural est l'objet de ce chapitre qui se consacre à l'étude de sollicitations verticales. Cette étude conduit au calcul de contraintes normales et au tracé des diagrammes.

## 2.2 Traction et compression simples

Soit une barre rectiligne sollicitée par deux forces égales et directement opposées agissant suivant sa fibre moyenne est soumise à un effort normal. Cet effort est dit :

- Un effort de traction simple si les forces tendent à allonger la barre (Fig.2.2),
- Un effort de compression simple si les forces tendent à raccourcir la barre.



*Figure 2.2 – Force de traction simple*

## 2.3 Contrainte normale

### 2.3.1 Coupure d'une facette

En chaque point M d'un solide, il existe des forces intérieures que l'on met en évidence en effectuant une coupure du solide, par une surface S, en deux parties A et B (Fig.2.3).

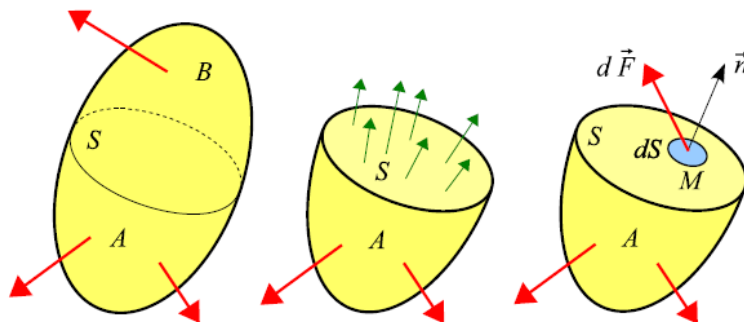


Figure 2.3 – Coupure d’une facette chargée

La partie A, par exemple, est en équilibre sous l’action des forces extérieures qui lui sont directement appliquées et des forces intérieures réparties sur la coupure.

Considérons un point M de S. soit dS un élément infinitésimal de la surface S entourant M et  $\vec{n}$  le vecteur unitaire perpendiculaire en M à S et dirigé vers l’extérieur de la partie A (Fig.2.4). Nous appelons cet ensemble facette  $\vec{n}$  en M. Soit  $d\vec{F}$  la force qui s’exerce sur cette facette.

On appelle vecteur contrainte sur la facette  $\vec{n}$  en M, la quantité :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \frac{d\vec{F}}{dS}$$

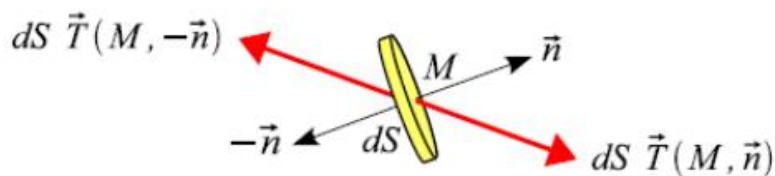


Figure 2.4 – Élément infinitésimal dS

### 2.3.2 Définition d’une contrainte normale

On considère une barre rectiligne, de section S liée à un massif fixe à son extrémité supérieure à l’autre extrémité, elle est soumise à l’action d’une force N suivant son axe.

$\sigma$  est appelé **contrainte normale**. Elle représente l’intensité de l’effort normal par unité de surface.

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad \left[ \frac{N}{m^2} \right]$$

Où :

N = effort normal [N]

A = aire de la section supportant l’effort N [m<sup>2</sup>]

Les unités de la contrainte normale sont le  $N/m^2$ , cependant en physique ces unités sont appelées aussi le Pascal ( $Pa$ ).

$$1 \frac{N}{m^2} = 1 Pa$$

$$1kPa = 1 * 10^3 Pa$$

$$1MPa = 1 * 10^6 Pa$$

$$1GPa = 1 * 10^9 Pa$$

Chaque élément de surface supporte un effort de traction parallèle à la ligne moyenne. Il y a répartition uniforme des contraintes dans la section droite (Fig.2.5).

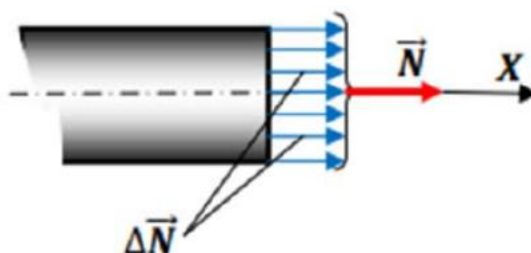


Figure 2.5- Répartition uniforme des contraintes

D'où :

$$\bar{C}(M, \bar{n}) = \sigma \bar{x} \text{ et comme } N = \iint_s \sigma . dS = \sigma . S, \text{ on aura : } \sigma = \frac{N}{S}$$

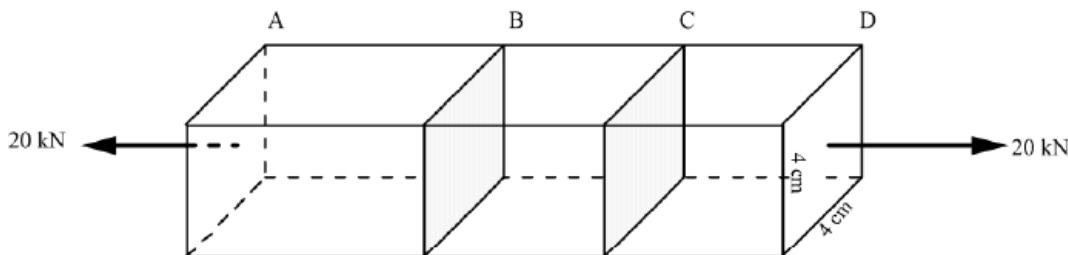
$$N[N] ; S[mm^2] ; \sigma[MPa]$$

Cette relation peut éventuellement être algébrique. On obtiendra alors :

- ✓ Une contrainte  $\sigma < 0$  en compression.
- ✓ Une contrainte  $\sigma > 0$  en traction.

**Exemple 2.1**

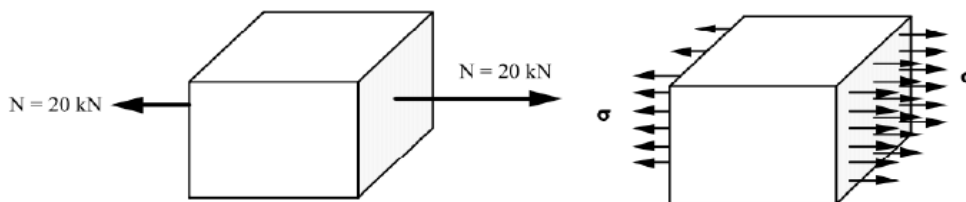
Trouver les contraintes normales en B et en C de la poutre ci-dessous.



**Solution**

En effectuant des coupes en *B* et *C*, on trouve facilement que l'effort *N* vaut 20 kN en tension.

Prenons la partie CD:



La section  $A = 4 \text{ cm} \times 4 \text{ cm} = 16 \text{ cm}^2 = 0.0016 \text{ m}^2$

$$\sigma = \frac{20 \text{ kN}}{0.0016 \text{ m}^2} = 1,2510^4 \text{ kPa}$$

D'où  $\sigma = 12,5 \text{ MPa}$

## 2.4 Diagramme de l'effort normal (DEN)

- Le diagramme de l'effort normal (DEN) donne la valeur de l'effort normal dans toutes les sections perpendiculaires à la membrure à l'étude.
- L'effort normal dans une section est la résultante des charges axiales s'exerçant sur la section.
- Le DEN est obtenu par la méthode des sections en effectuant une coupe suivant l'entrée de chaque force concentrée et, au début et à la fin ainsi qu'au minimum et au maximum (s'il y a lieu) de chaque charge répartie.

### 2.4.1 Diagramme Normal dans le cas d'une force concentrée

#### Exemple 2.2

La figure 2.6 schématise le DEF tout au long d'une barre dans le cas où les efforts axiaux sont concentrés.



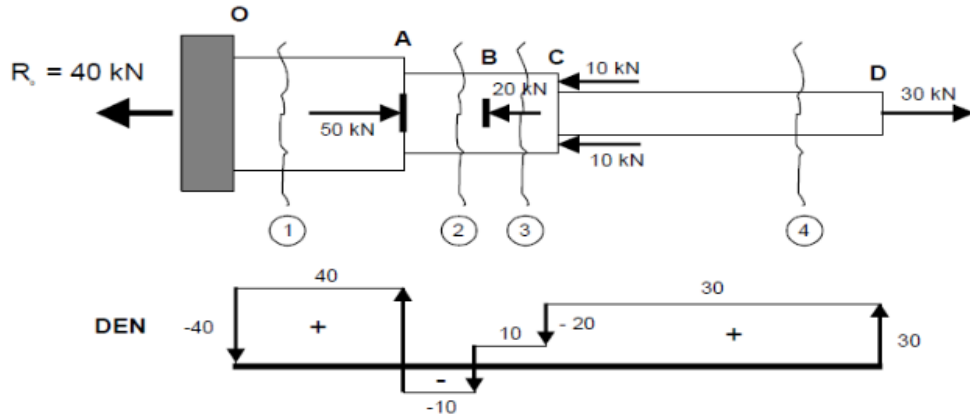


Figure 2.6 - DEF de charges concentrées

### 2.4.2 Diagramme normal dans le cas d'une charge uniformément répartie

Une charge uniformément répartie ou distribuée est une charge qui agit sur une distance considérable de la poutre, et ce de façon uniforme (Fig.2.7 a). C'est-à-dire la charge sollicitant la poutre par unité de longueur est constante. Le poids propre de la poutre est une charge distribuée.

En général, la charge distribuée peut être répartie sur une partie de la poutre ou sur toute sa longueur. On appelle charge uniformément répartie (Bastien, 2014) :

$$W[N] = w \cdot x$$

Où  $w$  : charge par unité de longueur (charge linéaire) [N/m]

$W$  : charge totale uniformément répartie sur une longueur «  $x$  », [m].

Un bloc de béton appuyé sur une poutre peut être une charge distribuée (Fig.2.7 b).

La charge totale «  $W$  » a comme grandeur, le produit de sa charge linéaire «  $w$  » par la longueur de sa charge «  $x$  ». Le point d'application de la charge totale  $W$  est toujours situé au centre de la partie conservée de la distribution.

Ici, la charge est prise dans sa totalité, sa valeur est :

$$W = 50 \times 3 = 150N$$

Et elle est située au centre de la charge considérée, c'est-à-dire à 1,5 m du bord (Fig.2.7 c).

Si on effectuait une coupe dans les trois premiers mètres, la grandeur de la charge serait le produit de la charge linéaire par la grandeur choisie (par exemple à 2 m)

Donc,

$$W = 50 \times 3 = 150N$$

Et son point d'application au centre de la partie conservée, c'est-à-dire à 1 m du bord cette fois-ci.

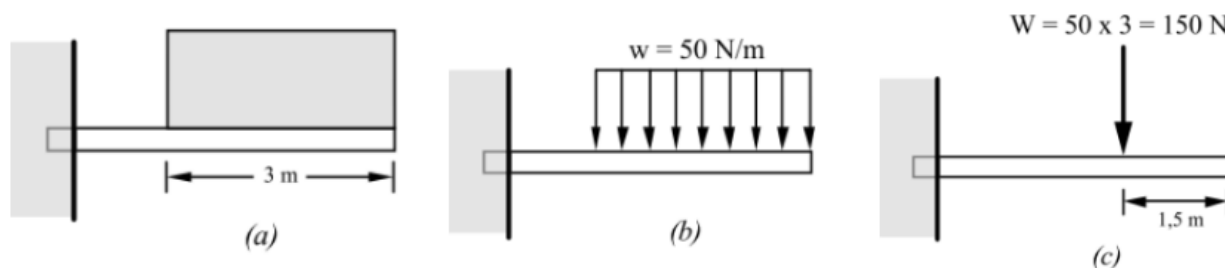


Figure 2.7 - Calcul d'une charge répartie

**Exemple 2.3**

La figure 2.8 schématise le DEF tout au long d'une barre soumise à son poids propre.

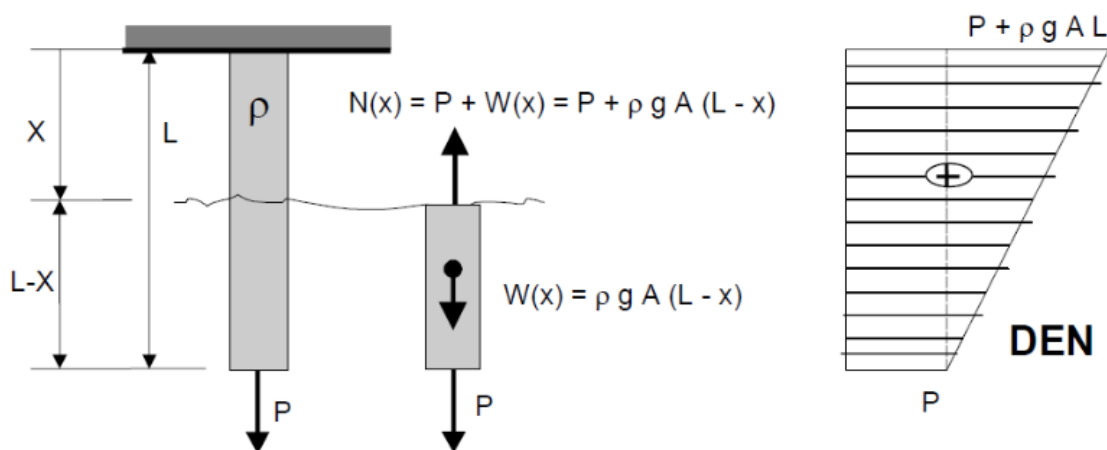
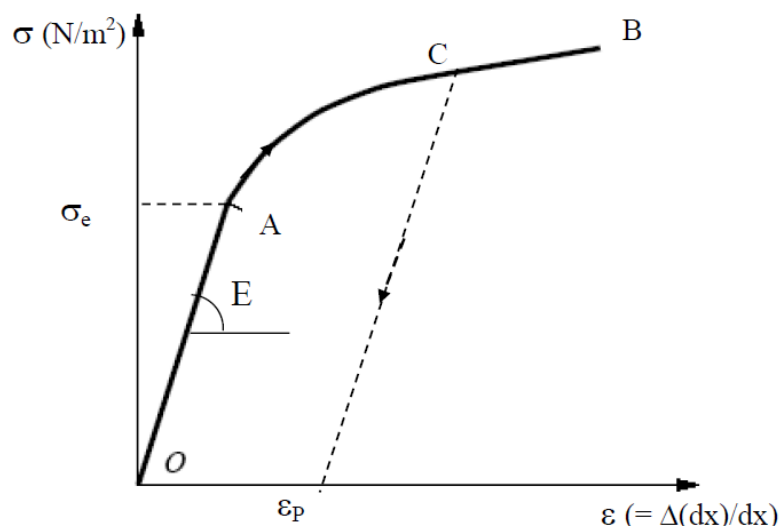


Figure 2.8- Diagramme d'une charge uniformément répartie

**2.5 Courbe Contrainte – Déformation**

La courbe contrainte déformation est une courbe caractérisant le matériau. Elle est obtenue empiriquement d'une expérience de traction effectuée sur une barre de section constante. Lors de cette expérience l'effort normal est augmenté progressivement provoquant l'allongement de la barre. A chaque incrément d'effort, la contrainte normale et la déformation de la barre sont portées sur une courbe. Cette opération est effectuée régulièrement jusqu'à la rupture de la barre. La courbe ainsi obtenue est la courbe *contrainte - déformation* du matériau (Fig.2.9).



**Figure 2.9** – Courbe contrainte-déformation

La partie (OA) est la partie élastique. La limite élastique n'est pas atteinte. La barre reprend sa forme initiale si l'expérience est interrompue dans cette zone. Dans ce cas l'élasticité est linéaire ((OA) est une droite). La pente  $E$  de la droite (OA) est appelée module d'élasticité linéaire ou module de Young (Tableau 2.1). Il représente le rapport entre la contrainte  $\sigma$  et la déformation  $\varepsilon$  dans la zone élastique. La relation entre la contrainte et la déformation dans la zone élastique est donnée par la *loi de Hooke* :

$$\sigma = E\varepsilon$$

La partie AB est la partie plastique, la limite élastique est dépassée ; si l'expérience est interrompue (point C), la barre ne reprend pas sa forme initiale. Le chemin de décharge est, de manière simplifiée parallèle à la droite (OA). Lorsque l'effort appliquée s'annule, il persiste une déformation résiduelle  $\varepsilon_p$  qui ne disparaît plus.

**Tableau 2.1** – Module de Young de quelques matériaux

Matériau	Module de Young (Mpa)
Acier	210000
Bronze	124000
Fer	196000
Or	78000
Plomb	18000
Brique	14000
Calcaire	20000 à 70000

## 2.6 Condition de résistance

Les contraintes développées dans les poutres doivent rester dans le domaine élastique. En général, on adopte un coefficient de sécurité  $S$ .

La condition de résistance pour une contrainte normale de traction est :

$$\sigma = \frac{N}{S} \leq R_{pe} = \frac{\sigma_e}{S}$$

On pose  $R_{pe}$  contrainte pratique à la traction en [MPa]

La condition de résistance pour une contrainte normale de compression est :

$$\sigma = \frac{N}{S} \leq R_{pc} = \frac{\sigma_e}{S}$$

On pose  $R_{pc}$  : contrainte pratique à la compression en [MPa] ;

### 2.6.1 Limite élastique

Pour tous les matériaux homogènes et isotropes, la limite élastique en traction  $\sigma_{et}$  est égale à la limite élastique en compression  $\sigma_{ec}$ .

On les désigne alors simplement  $\sigma_e$  (limite élastique). C'est le cas des aciers.

### 2.6.2 Coefficient de sécurité

Le coefficient de sécurité vaut 1.5 à 2 pour un plancher, 2 à 3 pour une charpente et 10 à 12 pour ascenseurs et câbles.

## 2.7 Condition de rigidité

Pour des raisons fonctionnelles (problèmes d'alignement d'appui, cahier des charges...), il est parfois important de limiter l'allongement. Il doit rester inférieur à une valeur limite  $\Delta l_{lim}$

D'après la loi de Hooke :

$$\begin{cases} \sigma = E \cdot \varepsilon = E \cdot \frac{\Delta l}{l} \\ \sigma = \frac{N}{S} \end{cases} \Rightarrow \Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot S}$$

## 2.8 Loi de déformation élastique

On considère une barre de longueur initiale  $L$  soumise à un effort normal  $N$  et entrainera une variation de longueur  $\Delta l$ . Ce qui veut dire qu'une partie infinitésimale  $dx$  de la barre subit une variation de longueur  $du = \Delta(dx)$  (Fig.2.10).

On appelle déformation longitudinale dans la section d'abscisse  $x$ , la quantité adimensionnelle :

$$\varepsilon = \frac{\Delta(dx)}{dx}$$

D'où ;

$$\Delta(dx) = \varepsilon dx$$

D'autre part,

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{ES}$$

En remplaçant ce dernier dans la formule précédente, on aura :

$$\Delta(dx) = \frac{N}{ES} dx$$

D'où, la variation totale de longueur (déformation) de la barre :

$$\Delta L = \int_0^L \Delta(dx) = \int_0^L \frac{N}{ES} dx$$

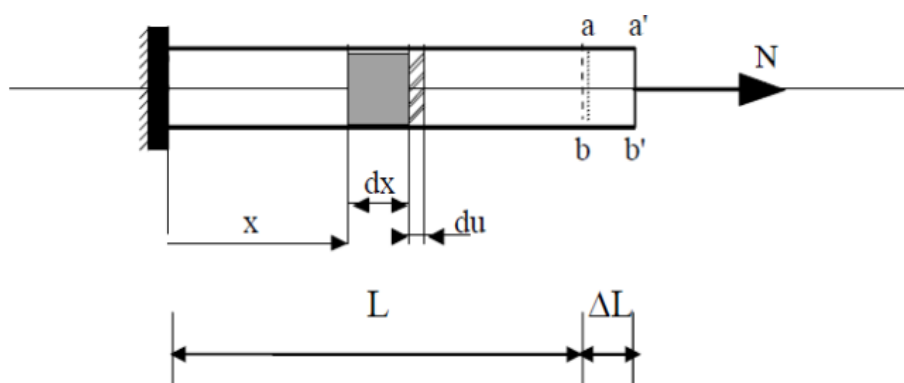


Figure 2.10 – Déformation linéaire d'un élément de poutre

### Cas particulier

Pour une barre homogène de section constante, si  $N$  est constant (Fig.2.10), l'allongement absolu s'écrit :

$$\Delta L = \frac{NL}{ES}$$

En se référant à l'équation

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{ES}$$

On déduit que :

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$$

Où  $\varepsilon$  exprime la déformation (ou l'allongement) relative et  $\Delta l$  est la déformation absolue (Fig.2.11).

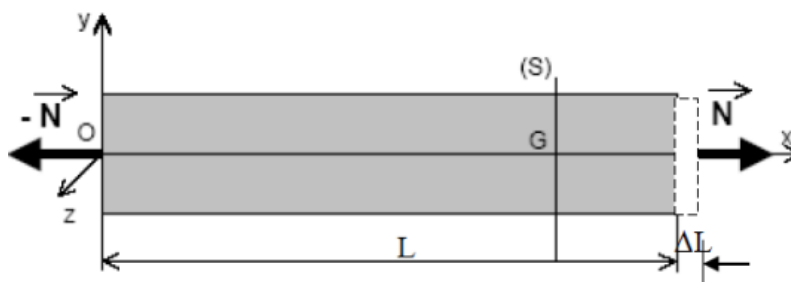
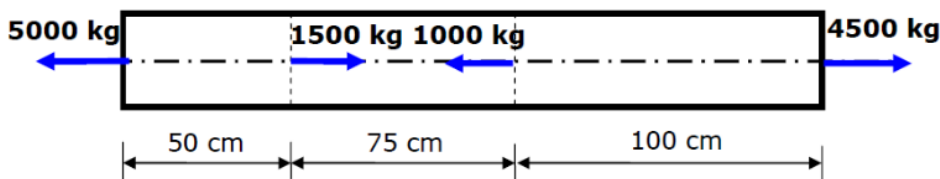


Figure 2.11 - Barre homogène soumise à un effort de traction

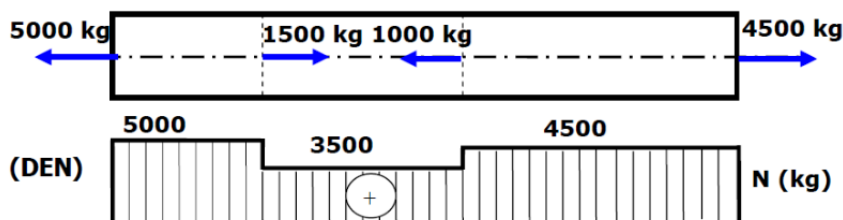
**Exemple 2.4**

Déterminer l'allongement total de la barre métallique sollicitée comme le montre la figure ci-dessous, sachant que le module de Young  $E=2,1 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ . La section de la barre est constante égale à  $5 \text{ cm}^2$ .



**Solution**

Le DEN est schématisé par la figure ci-après :



$$\begin{aligned}\Delta L &= \int_0^L \frac{N}{ES} dx = \int_0^{L_1} \frac{N_1}{ES_1} dx + \int_{L_1}^{L_1+L_2} \frac{N_2}{ES_2} dx + \int_{L_1+L_2}^L \frac{N_3}{ES_3} dx \\ &= \frac{N_1 L_1}{ES_1} + \frac{N_2 L_2}{ES_2} + \frac{N_3 L_3}{ES_3} \\ &= \frac{1}{E} \sum_{i=1}^3 \frac{N_i L_i}{S_i}\end{aligned}$$

$$\Delta L = \frac{1}{2,1 \cdot 10^6 \times 5} (5000 \times 50 + 3500 \times 75 + 4500 \times 100)$$

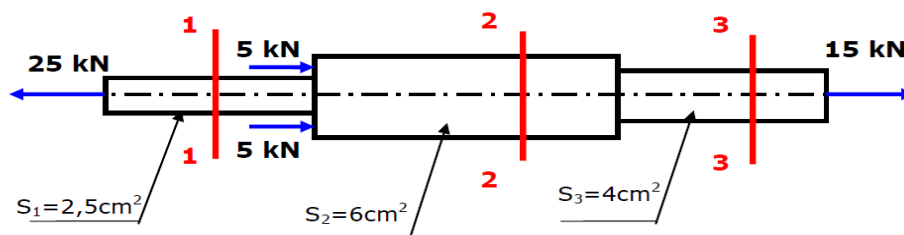
Ainsi, l'allongement total de la barre est

$$\Delta L = 0,092 \text{ cm}$$

## 2.9 Exercices d'application

### Exercice 2.1

Soit la barre schématisée par la figure ci-dessous. Calculer les contraintes au niveau des sections 1-1, 2-2 et 3-3.

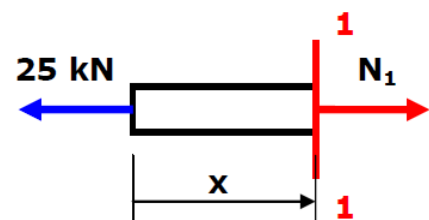


### Solution

#### Section 1-1

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_1 = 25 \text{ kN}$$

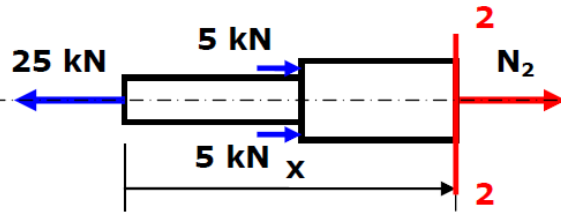
$$\sigma_{1-1} = \frac{N_1}{S_1} = \frac{25}{2,5} = 10 \text{ kN/cm}^2 = 100 \text{ MPa}$$



**Section 2-2**

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_2 = 15 \text{ kN}$$

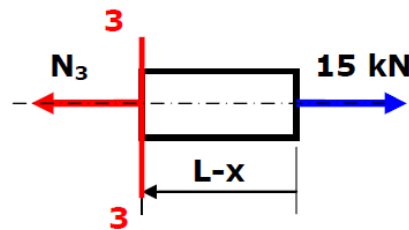
$$\sigma_{2-2} = \frac{N_2}{S_2} = \frac{15}{6} = 2,5 \text{ kN/cm}^2 = 25 \text{ MPa}$$



**Section 3-3**

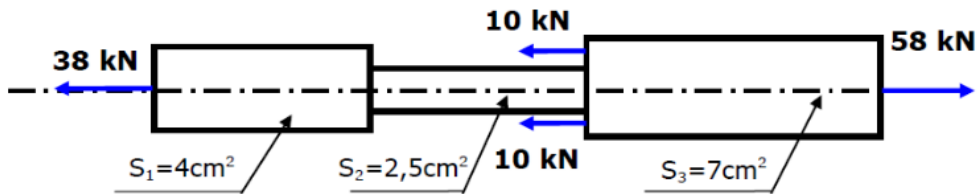
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_3 = 15 \text{ kN}$$

$$\sigma_{3-3} = \frac{N_3}{S_3} = \frac{15}{4} = 3,75 \text{ kN/cm}^2 = 37,5 \text{ MPa}$$



**Exercice 2.2**

Vérifier la résistance de la barre métallique schématisée par la figure ci-dessous, sachant que :  $[\sigma] = 14 \text{ kN/cm}^2$ .



**Solution**

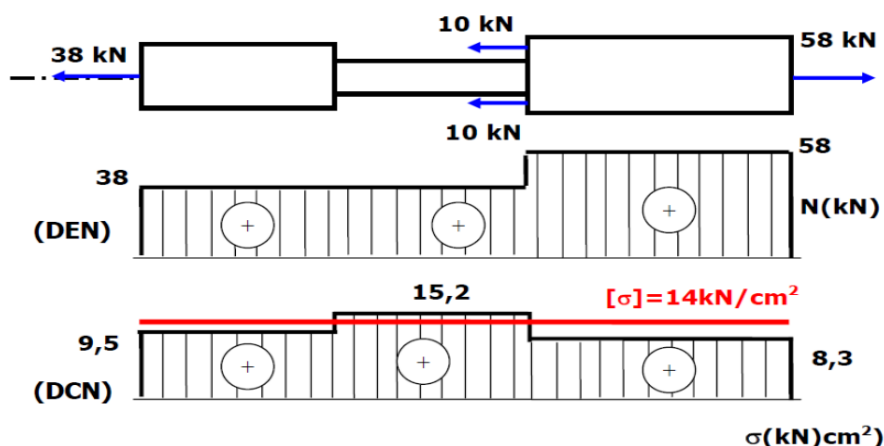
On trace le Diagramme de l'Effort Normal (DEN) et on déduit le Diagramme de la Contrainte Normale (DCN) comme illustré sur la figure ci-dessous.

Ensuite, nous comparons la contrainte maximale avec la contrainte admissible donnée du matériau. Comme le montre la figure ci-dessous des diagrammes (DEN) et (DCN), la contrainte maximale est :  $\sigma_{\max} = 15,2 \text{ kN/cm}^2$ .

On remarque que :  $\sigma_{\max} > [\sigma]$

D'où la condition de résistance n'est pas assurée, ce qui veut dire que la barre ne résiste pas à la traction.





**Exercice 2.3**

Une barre d’acier de 10 mm de diamètre reçoit une force de traction de 12560N.

- Quelle sera l’allongement de la barre de 5 m si le module de Young  $E= 210000 \text{ N/mm}^2$  ?
- Quelle sera alors la contrainte dans cette barre ?

**Solution**

- Section de la barre :

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi 10^2}{4} = 78.54 \text{ mm}^2$$

- L’allongement de la barre :

$$\Delta l = \frac{Nl_0}{EA} = \frac{12560 \times 5000}{210000 \times 78.54} = 3.8 \text{ mm}$$

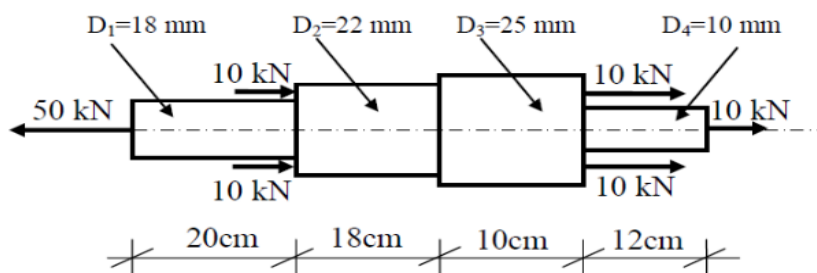
- La contrainte sera égale à :

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{12560}{78.54} = 159.9 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \approx 160 \text{ MPa}$$

**2.10 Exercices à résoudre**

**Exercice 2.1**

Soit la barre schématisée par la figure ci-dessous :



- 1- Tracer le diagramme de l’effort normal tout au long de la barre ;
- 2- Tracer le diagramme de la contrainte normale tout au long de la barre ;

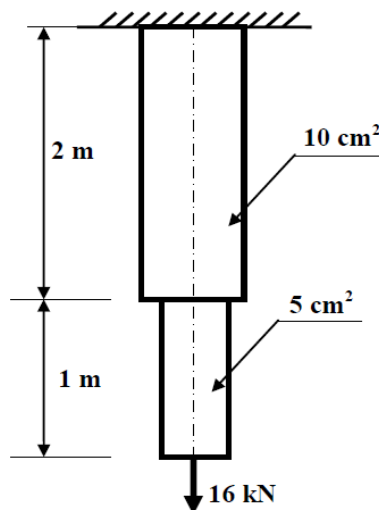
- 3- Vérifier la résistance de la barre si la contrainte admissible du matériau est supposée de  $14\text{KN}/\text{cm}^2$  ;
- 4- Calculer la déformation (allongement ou raccourcissement) de la barre ;
- 5- En-déduire le pourcentage de l'allongement et le pourcentage du raccourcissement dans la barre.

### Exercice 2.2

Soit la barre en acier, schématisée par la figure ci-dessous, encastrée à son extrémité supérieure et tendue par une force de  $16\text{KN}$  à son extrémité inférieure.

En tenant compte du poids spécifique du matériau

- 1- Tracer le diagramme de l'effort normal tout au long de la barre ;
- 2- Tracer le diagramme de la contrainte normale tout au long de la barre ;
- 3- Vérifier la résistance de la barre, à la section dangereuse, si la contrainte admissible du matériau est supposée de  $15\text{KN}/\text{cm}^2$ .

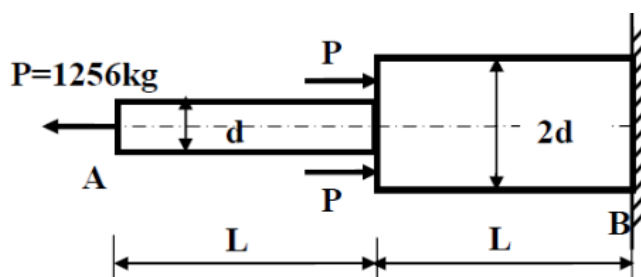


### Exercice 2.3

Deux barres cylindriques en acier, sont reliées ensemble, comme le montre la figure ci-dessous.

Le système entier est encastré à son extrémité inférieure et sollicité par l'effort  $P$ .

- Déterminer le diamètre de la barre  $d$ , si la contrainte admissible du matériau constituant chacune des deux barres est égale à  $16\text{KN}/\text{cm}^2$ .



# **CHAPITRE 3**

## **Cisaillement pur**

### 3.1 Introduction

Il y a **cisaillement** lorsqu'une pièce est sollicitée par deux forces égales, de même droite d'action mais de sens contraires qui tendent à faire **glisser** l'une sur l'autre des deux parties de la pièce (Fig.3.1).

Lorsque le seul effort agissant est un effort tranchant, on l'appelle **cisaillement pur**.

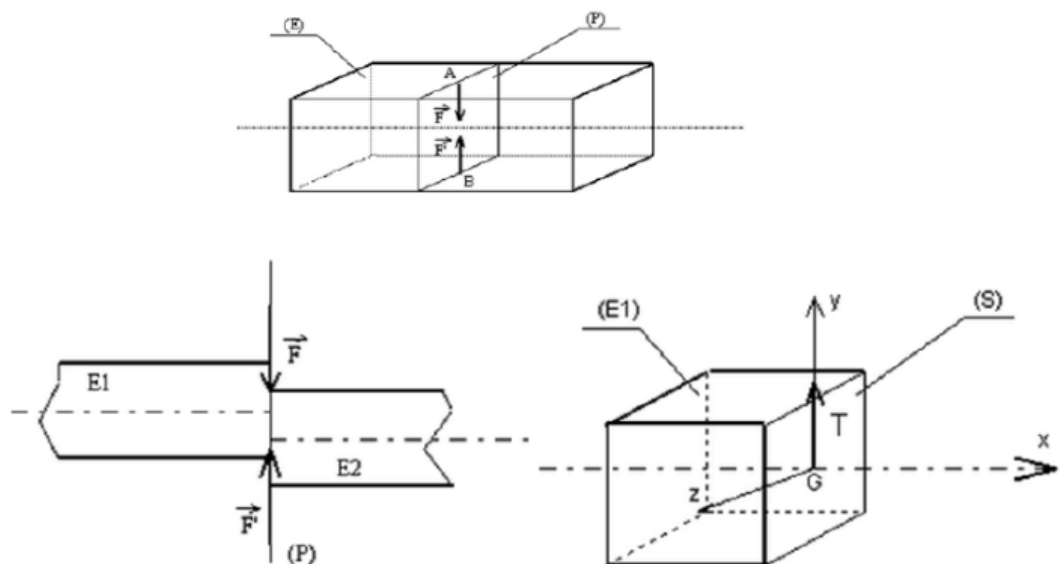


Figure 3.1 Cisaillement

Sous l'action de ces deux forces la poutre tend à se séparer en deux tronçons **E1** et **E2** glissant l'un par rapport à l'autre dans le plan de section droite (P).

Une section droite (S) d'une poutre (E) est sollicitée au cisaillement simple si les éléments de réduction au centre de surface G de (S) du torseur des efforts de cohésion sont :

$$\{\tau_{coh}\}_G = \begin{Bmatrix} \bar{T} \\ 0 \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_G$$

### 3.2 Essai de cisaillement

La sollicitation de cisaillement pur est un cas très particulier de la RDM car elle est impossible à réaliser expérimentalement. D'autre part le cisaillement simple concerne une section de la poutre et non la poutre entière.

Les essais et résultats qui suivent permettent toutefois de rendre compte des actions tangentielles dans une section droite et serviront ainsi dans le calcul de pièces soumises au cisaillement.

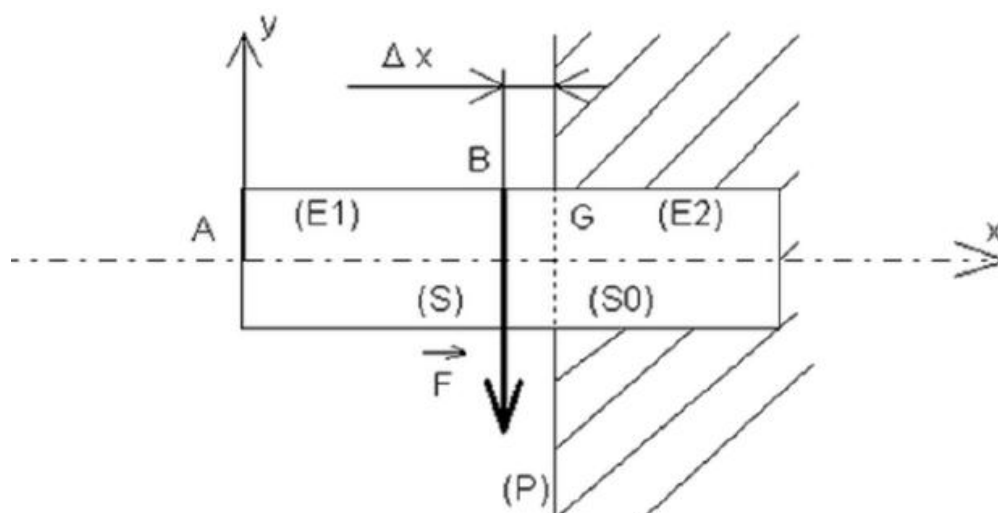


Figure 3.2- Poutre sollicitée par un cisaillement

Considérons une poutre (E) parfaitement encastree et appliquons-lui un effort de cisaillement F uniformément réparti dans le plan (P) de la section droite (S) distante de Δx du plan (S0) d'encastrement.

On se rapproche des conditions du cisaillement réel, à condition de vérifier que Δx es très petit.

Si l'on isole (E1), on trouve alors le torseur de cohésion suivant :

$$\{\tau_{coh}\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -F & 0 \\ 0 & F \cdot \Delta x \end{Bmatrix}_G$$

Lorsque Δx tend vers 0, on retrouve alors le torseur de cohésion du cisaillement pur.

### 3.3 Cisaillement pur - Théorie élémentaire

Imaginons un cube de matière infiniment petit situé à cheval sur la ligne ab (Fig.3.3). A cause du phénomène de cisaillement, la face supérieure et la face inférieure du cube sont soumises aux contraintes de cisaillement τ. Si l'on admet que ces faces sont libres de toute autre contrainte que τ, alors on dit qu'elles sont sollicitées en *cisaillement pur*.

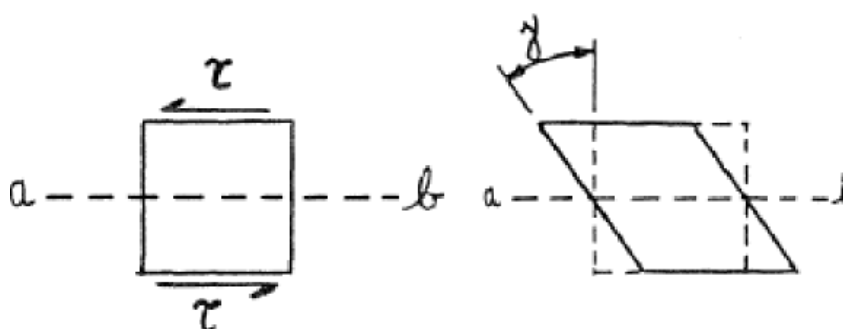


Figure 3.3 – Cube sous l'action d'un cisaillement pur

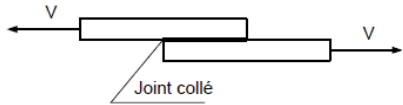
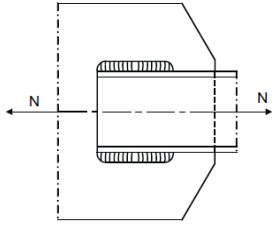
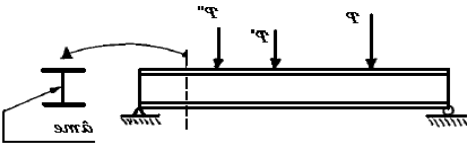
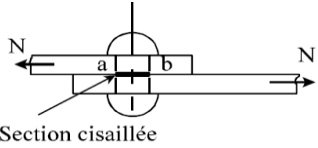
Sous l'influence de ces contraintes, le cube va se déformer et les 2 faces en question vont glisser l'une par rapport à l'autre. L'angle  $\gamma$ , infiniment petit, qui définit cette distorsion, s'appelle "angle de glissement".

Dans le domaine élastique, les déformations étaient proportionnelles à leur cause, c'est-à-dire les contraintes. La loi de Hooke  $\sigma = \epsilon E$  en constituait l'expression mathématique dans le cas de la traction.

Dans le cas du cisaillement, il en est de même et l'on dira que l'angle de glissement  $\gamma$  est proportionnel à sa cause, c'est-à-dire à la contrainte tangentielle de cisaillement  $\tau$ .

Le tableau 3.1 récapitule quelques exemples de cisaillement pur dans différents domaines.

Tableau 3.1- Exemples de cisaillement pur

Exemple	Sollicitations	Illustration
Les joints collés entre 2 tôles.	Les contraintes $\tau$ qui règnent au sein de la couche de colle sont plus ou moins uniformément réparties ; pareil type d'assemblage dans les constructions légères et dans la restauration (renforcement de structures).	
Deux plats assemblés par des cordons de soudure latéraux.	Il y aura cisaillement dans le plan de séparation entre le métal d'apport (soudure) et le métal de base (plat en acier) dû à l'effort N de traction qui sollicite l'assemblage.	
L'âme d'une poutre fléchie	Aux environs des deux appuis, l'âme de la poutre fléchie ci-contre par les efforts P, P',... est le siège de contraintes de cisaillement importantes.	
Deux plats assemblés par un rivet	Celui-ci sera cisailé, à cause de l'effort N sur l'assemblage, dans une section suivant ab.	

### 3.3.1 Etude de la contrainte de cisaillement

Une **contrainte de cisaillement**  $\tau$  est une contrainte mécanique appliquée de manière parallèle ou tangentielle à une face d'un matériau, par opposition aux contraintes normales qui sont appliquées de manière perpendiculaire. C'est le rapport d'une force à une surface. Elle possède donc la dimension d'une pression, exprimée en pascals ou pour les grandes valeurs en mégapascals (MPa).

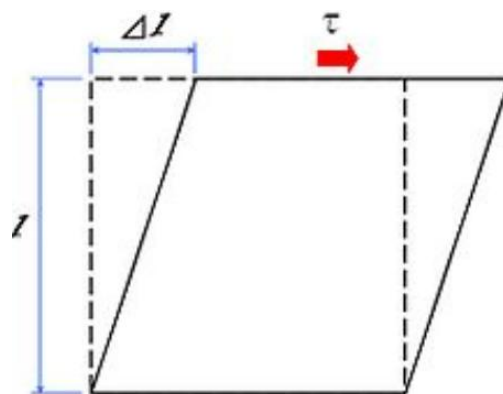


Figure 3.4- Contrainte de cisaillement  $\tau$

Une force  $\tau$  est appliquée au sommet du carré original, tandis que le bas de ce même carré reste immobile. Le mouvement de la partie supérieure, résultant de la force initiale, crée une déformation du carré, le transformant ainsi en parallélogramme.

Chaque élément de surface  $\Delta S$  supporte un effort de cisaillement  $\Delta F$  contenu dans le plan (S). Il y a répartition uniforme des contraintes dans la section droite.

D'où :

$$\tau = \frac{\|\vec{T}\|}{S}$$

Avec :

$\tau$ : contrainte tangentielle en Mpa ou  $N/mm^2$

$T$ : effort tranchant en N

$S$  : aire de la section droite cisailée en  $mm^2$

### 3.3.2 Etude des déformations en cisaillement

Si on trace la variation du glissement  $\Delta y$  en fonction de l'effort  $F$ , on obtient la courbe représentée à la figure (3.4), ayant une zone de déformations élastiques (OA) et une zone de déformations permanentes (ABC).

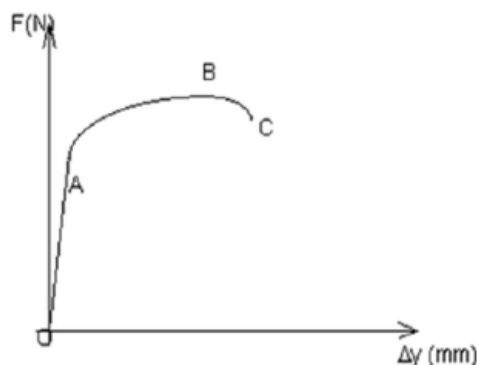


Figure 3.4- Courbe de  $F=f(\Delta y)$

La section S cisailée se déplace dans son plan par glissement défini par un angle de glissement  $\gamma$  (Fig.3.5).

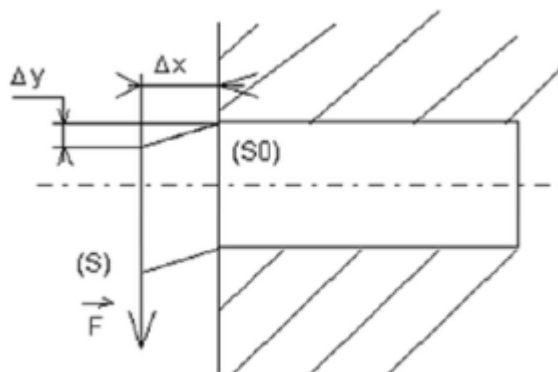


Figure 3.5- Glissement transversal  $\Delta y$

Cet angle défini par :

$$\operatorname{tg} \gamma = \Delta y / \Delta x$$

La déformation (ou distorsion)  $\gamma$ , appelée glissement relatif ou déviation (sans unité) reste faible dans le domaine élastique d'où :

$$\gamma = \Delta y / \Delta x$$

En déformation élastique, la contrainte de cisaillement  $\tau$  varie linéairement en fonction de l'angle de glissement  $\gamma$  (Fig3.6), on introduit alors le module d'élasticité transversale (module de Coulomb)  $G$  telle que :

$$\tau = G \cdot \gamma$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

$\nu$  : coefficient de Poisson.

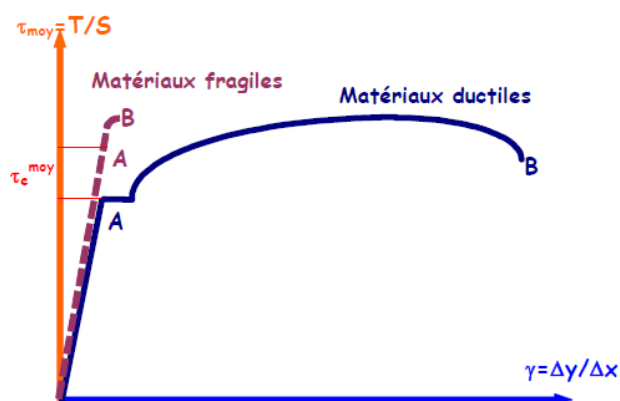


Figure 3.6- Courbe contrainte-déformation en cisaillement



### 3.4 Condition de résistance au cisaillement

Pour des raisons de sécurité, la contrainte tangentielle  $\tau$  doit rester inférieure à une valeur limite appelée résistance pratique de cisaillement  $\tau_{adm}$  (ou  $R_{eg}$  la résistance élastique au cisaillement du matériau en MPa).

Avec :

$$\tau_{adm} = \frac{R_{eg}}{S}$$

$S$  est un coefficient de sécurité.

La condition de résistance s'écrit :

$$\tau < \tau_{adm}$$

### 3.5 Cisaillement technologique

Le cisaillement pur est une idéalisation supplémentaire de la Résistance des Matériaux. Il ne se produit pratiquement jamais si ce n'est dans la section transversale d'une barre tordue, et sur l'axe neutre de la section d'une poutre fléchie. Dans tous les autres cas, les contraintes tangentielles  $\tau$  sont presque toujours accompagnées de contraintes normales  $\sigma$ .

Dans différents assemblages de constructions (assemblages boulonnés, clavetés, rivetés, soudés, dans les entailles à bois, etc.) les éléments d'assemblage sont soumis dans différents plans à la traction ou à la compression, au cisaillement ou au matage. Le cisaillement est toujours accompagné soit d'une flexion, soit d'une traction ou d'une compression ; c'est pourquoi dans les plans de cisaillement, hormis les contraintes tangentielles, nous trouvons encore des contraintes normales. Mais comme les valeurs de ces contraintes normales sont petites devant les contraintes tangentielles, pratiquement on effectue un calcul de cisaillement.

**Conséquence** : un état de charge tel que dans toute section droite il n'existe qu'un effort tranchant ne peut donc se produire. Et donc, nous définirons un état de charge où le cisaillement est prépondérant par l'appellation : *cisaillement technologique*.

**Définition** : un système est soumis à *cisaillement technologique* lorsque les contraintes prépondérantes sont dues à l'effort tranchant  $V$ .

#### 3.5.1 Expression de la contrainte tangentielle

Dans le "*cisaillement technologique*" nous pouvons considérer, excepter aux endroits où l'effort  $V$  est appliqué, et en l'absence d'une connaissance précise de la distribution des contraintes, que les contraintes tangentielles produites par l'effort tranchant  $V$  sont réparties *d'une manière uniforme dans la section soumise à cisaillement Acis* (Fig.3.7) :

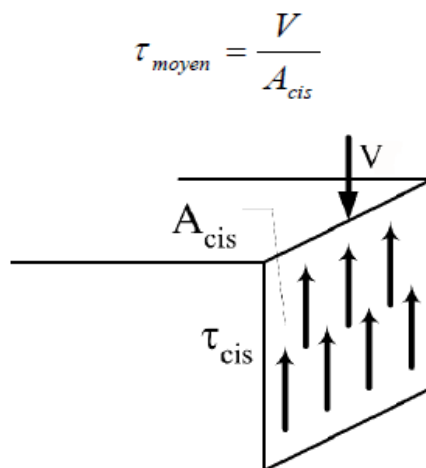


Figure 3.7. - répartition des contraintes tangentielles

Cette contrainte moyenne  $\tau_{moyen}$  est appelée cisaillement technologique. Les valeurs des contraintes admissibles devront tenir compte des approximations faites dans la théorie développée.

### 3.5.2 Dimensionnement (contraintes admissibles)

1) Dans le cas d'un matériau ductile, la contrainte tangentielle admissible en cisaillement  $\tau_{adm\ cis}$  est obtenue en tenant compte d'un coefficient de sécurité  $S$  par rapport à la limite d'élasticité en cisaillement  $\tau_e$  :

$$\tau_{adm} = \frac{\tau_{e\ cis}}{S}$$

Pour les matériaux ductiles, la limite élastique en cisaillement  $\tau_{e\ cis}$  est égale à 58 % de la limite élastique de traction, soit :

$$\tau_{e\ cis} = 0.58 R_e \approx 0.6 R_e$$

et donc :

$$\tau_{adm} = 0.58 \frac{R_e}{S}$$

2) Si le matériau est fragile (béton, fonte grise, etc...) il est préférable de ne pas l'utiliser en cisaillement, toutefois on peut admettre, que la contrainte tangentielle admissible de cisaillement  $\tau_{adm\ cis}$  se déterminera à partir de la résistance à la rupture  $R_m$  et vaut :

$$\tau_{adm} = \frac{R_m}{S}$$

3) Quel que soit le type de matériau utilisé, le dimensionnement des sections droites devra être tel que les contraintes tangentielles moyennes de cisaillement  $\tau_{moy}$  ne dépassent pas la contrainte tangentielle de cisaillement admissible  $\tau_{adm\ cis}$  :

$$\tau_{moy} \leq \tau_{adm}$$

### 3.6 Exercices d'application

#### Exercice 3.1

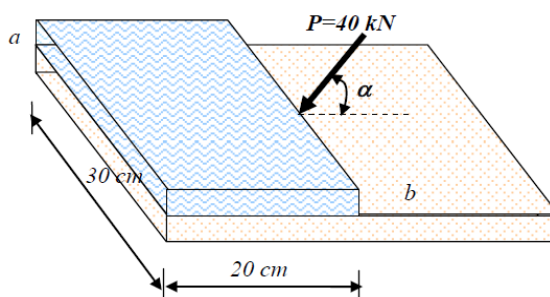
Que vaut le module de Coulomb de l'acier sachant que  $E=210000 \text{ N/mm}^2$  et  $\nu=0.30$  ?

#### Solution

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} = \frac{210000}{2(1 + 0.30)} = 80769 \text{ MPa}$$

#### Exercice 3.2

Calculer la contrainte moyenne sur le plan  $ab$  sur la figure ci-dessous.



#### Solution

La contrainte moyenne sur le plan  $ab$  est :

$$\tau = \frac{T}{S} = \frac{P \cos \alpha}{S}$$

D'où pour  $\alpha$ , par exemple, égale à  $45^\circ$  on a :

$$\tau = \frac{40\sqrt{2}}{2(20 \times 30)} = 0,047 \text{ kN/cm}^2$$

#### Exercice 3.3

La contrainte de cisaillement dans un corps métallique est égale à  $1050 \text{ kg/cm}^2$ . Si le module de cisaillement vaut  $8400 \text{ kN/cm}^2$ , déterminer la déformation de cisaillement.

#### Solution

De l'équation (4), on a :

$$\gamma = \frac{\tau}{G}$$

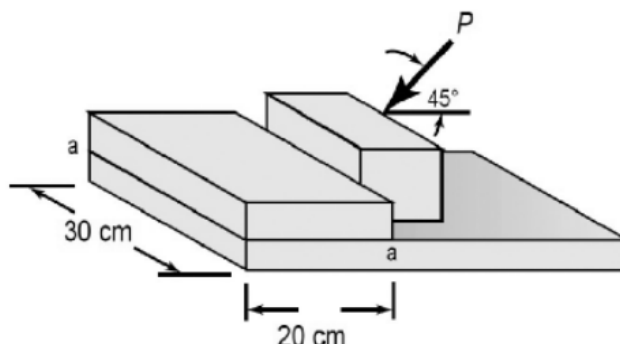
$$\gamma = \frac{1050}{840000} = 0,00125 \text{ rad} = 0,225^\circ$$

### 3.7 Exercices à résoudre

#### Exercice 3.1

Considérons la figure ci-dessous. La force tend à cisailer la butée le long du plan a-a.

Calculer la contrainte moyenne de cisaillement sur le plan a-a pour  $P=40\text{KN}$ .



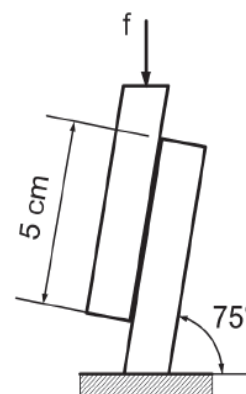
#### Réponse :

$$\tau_{moy} = 0.47 \text{ N/mm}^2$$

#### Exercice 3.2

Dans l'industrie du bois, on utilise des blocs inclinés pour déterminer la résistance compression-cisaillement des joints collés. Soit les deux blocs A et B collés ayant 4 cm de profondeur perpendiculairement au plan de la figure.

- Calculer la résistance maximale au cisaillement de la colle pour une force verticale  $f$  de 40 kN nécessaire pour provoquer la rupture du joint.
- A ce moment, quelle est la contrainte de compression ?



**CHAPITRE 4**  
**Flexion simple**

## 4.1 Introduction

En physique (mécanique), la flexion est la déformation d'un objet sous l'action d'une charge. Elle se traduit par une courbure. Dans le cas d'une poutre, elle tend à rapprocher ses deux extrémités. Dans le cas d'une plaque, elle tend à rapprocher deux points diamétralement opposés sous l'action.

Une poutre est soumise à la *flexion* lorsque les forces qui lui sont appliquées tendent à faire varier sa *courbure* (Fig. 4.1) (Bourahla).

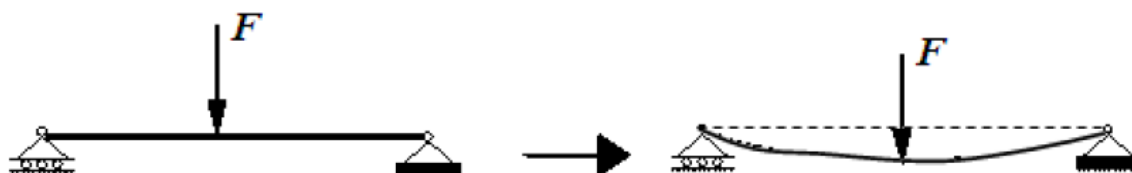


Figure 4.1- Courbure d'une poutre

On entend par *flexion simple* un mode de sollicitation tel que dans les sections droites de la poutre il existe deux composantes des efforts intérieurs : le moment fléchissant  $M_{fz}$  (ou  $M_{fy}$ ) et l'effort tranchant  $T_Y$  (ou  $T_z$ ).

La flexion est aussi dite *simple*, lorsque la poutre possède un *plan de symétrie* et que les forces fléchissant agissent dans ce plan, *perpendiculairement* au grand axe de la poutre (Fig. 4.2).

Nous nous limiterons dans ce cours à l'étude de la flexion des poutres droites isostatiques, c'est à dire celles pour lesquelles les équations d'équilibre suffisent à la détermination des actions de liaison. Nous nous limiterons également aux poutres dont le plan de symétrie est vertical ( $G_{xy}$ ).

## 4.2 Hypothèses de calcul

- La ligne moyenne de la poutre est rectiligne. L'axe (O,x) est confondu avec la ligne moyenne.
- La section droite de la poutre est constante.
- La poutre admet un plan de symétrie longitudinal, par exemple le plan (O,x,y). Il en résulte que (G,y) et (G, z) sont les axes principaux de la section droite.
- Toutes les forces appliquées à la poutre que ce soit les forces à distance ou les forces élémentaires de liaison sont :
  - Perpendiculaires à la ligne moyenne
  - Situées dans le plan de symétrie ou réparties symétriquement par rapport à celui-ci.
  - Concentrées en un point ou réparties suivant une loi.

- Au cours de la déformation, les sections droites restent planes et normales à la ligne moyenne.

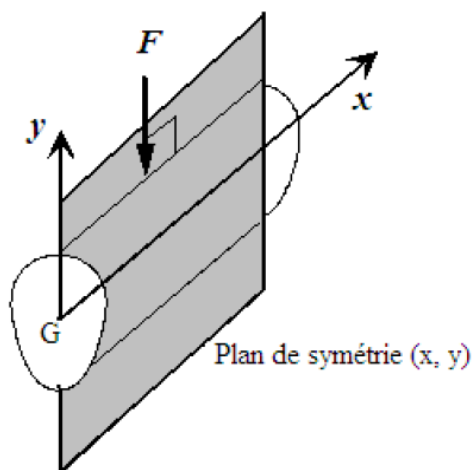


Figure 4.2- Poutre en flexion simple

### 4.3 Essai de flexion

Considérons une poutre, reposant sur deux appuis, soumise à une charge concentrée verticale (Fig. 4.3).

Après déformation, cette poutre fléchit : On constate que les fibres situées dans la partie supérieure sont sollicitées en compression tandis que celles situées en partie inférieure sont sollicitées en traction (Delaplace et al., 2008).

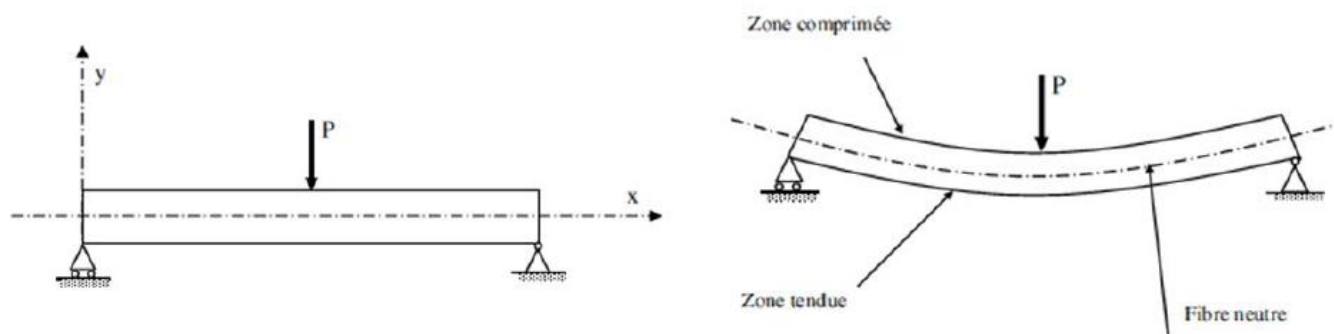


Figure 4.3 -Modélisation d'un essai de flexion trois points

Entre ces deux régions il existe une fibre qui ne reste ni tendue ni comprimée : la fibre neutre.

Les allongements ou raccourcissements relatifs sont proportionnels à la distance  $y$  de la fibre considérée.

### 4.4 Répartition des contraintes

#### 4.4.1 Contraintes normales

Lorsque la poutre fléchit (Fig. 4.4), la section droite pivote d'un angle  $\Delta\phi$ .

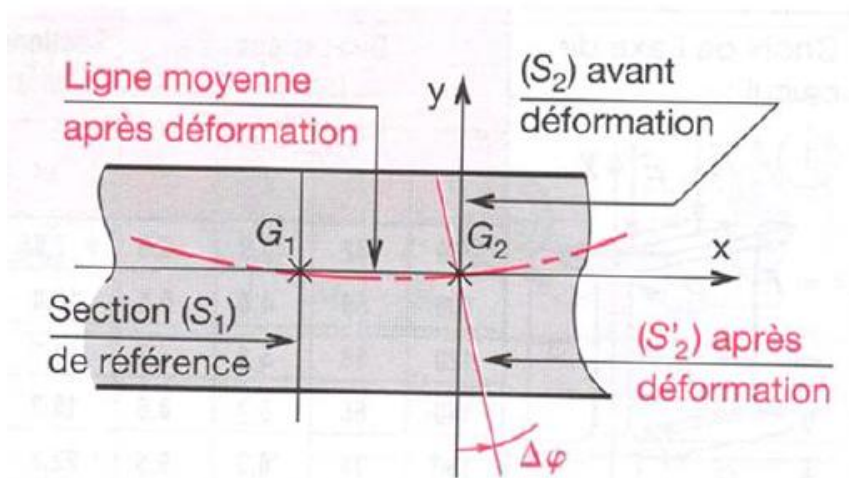


Figure 4.4- Définition de l'angle  $\Delta\phi$

Les contraintes normales engendrées sont proportionnelles à la distance qui les sépare du plan des fibres moyennes (Fig.4.5), d'où :

$$\sigma_M = -E\theta y$$

E: Module de Young [MPa]

y: Distance de M/ à la fibre neutre [mm]

$\theta = \frac{\Delta\phi}{\Delta x}$ : Angle unitaire de flexion [rad/mm]

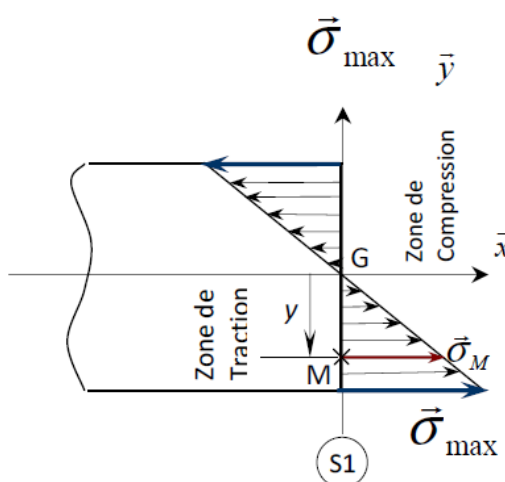


Figure 4.5- Répartition des contraintes normales



### 4.4.2 Relation entre contrainte normale et moment fléchissant

Le vecteur-contrainte dans la section droite s'écrit :

$$\vec{C}(M, \vec{x}) = \sigma_x \vec{x} = -E\theta y \vec{x}$$

Le moment résultant du torseur de cohésion :

$$\vec{M}_{fz} = M_{fz} \vec{z} = \int_S G \vec{M} \wedge \vec{C}(M, \vec{x})$$

Nous avons :

$$G \vec{M} = y \vec{y} + z \vec{z}$$

Il en résulte que :

$$M_{fz} = \int_S E\theta y^2 dS = E\theta \int_S y^2 dS$$

Or

$$\sigma_x = -E\theta y \rightarrow E\theta = -\frac{\sigma_x}{y}$$

Donc,

$$M_{fz} = -\frac{\sigma_x}{y} \int_S y^2 dS = -\frac{\sigma_x}{y} \cdot I_{GZ}$$

Finalement,

$$\rightarrow \sigma_x = -\frac{M_{fz}}{I_{GZ}} y$$

Les contraintes maximales se développent dans les fibres les plus éloignées de la fibre neutre :

$$|\sigma|_{max} = \frac{|M_{fz}|_{max}}{\frac{I_{GZ}}{v}}$$

Avec ;

$v = |y|_{max}$ : Ordonnée du point le plus éloigné de (G,  $\vec{z}$ ) [mm]

$\frac{I_{GZ}}{v}$ : Module de flexion de la section en M [MPa]

$\sigma_M$ : Contrainte normale de flexion en M [MPa]

### 4.4.3 Contrainte tangentielle

La répartition des contraintes tangentielles est plus difficile à déterminer. Pour cela on fait l'hypothèse que la contrainte tangentielle  $\tau_y$  est uniformément répartie, non pas sur la section entière mais sur toutes les fibres situées à une distance  $y_0$  de l'axe neutre dans le plan de la section (S). Sa valeur est donnée par :

$$\tau_y = -\frac{T_y W_{GZ}}{b I_{GZ}}$$

Avec ;

$$W_{GZ} = \iint_{(S)} y \, ds$$

$W_{GZ}$  représente le moment statique (d'ordre 1) de la zone hachurée de la section par rapport à l'axe neutre.

Et  $b$  est la largeur de poutre à l'endroit où est calculée la contrainte de cisaillement.

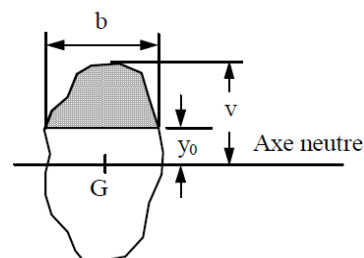


Figure 4.6- Moment statique d'une section plane

### 4.4.4 Relation entre efforts tranchants et moments fléchissant

Soit la poutre ci-dessous soumise à la flexion simple. Imaginons une coupure en un point  $C$  qui divise la poutre en deux parties notées *gauche* et *droite*. Chacune de ces deux parties est en équilibre sous l'action des efforts extérieurs qu'elle reçoit et sous l'action des effets de l'autre partie (efforts intérieurs).

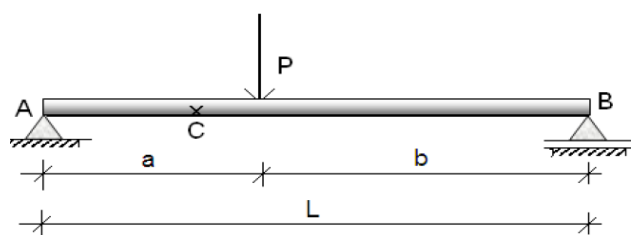


Figure 4.7- Poutre sollicitée en flexion simple

Chacune des deux parties agit sur l'autre de sorte que :

- ✓ Tous les mouvements horizontaux, verticaux et de rotation d'une partie par rapport à l'autre sont nuls.
- ✓ Chaque partie est en équilibre. Pour qu'il y ait concordance en signe entre les deux parties, on utilise la convention de signe montrée sur la figure (4.8).
- ✓ L'effort tranchant  $T(x)$  dans une section d'abscisse  $x$ , séparant la poutre orientée en une partie *gauche* et une partie *droite*, est la résultante des forces extérieures s'exerçant sur *la partie gauche*.

- ✓ Le moment fléchissant  $M(x)$  dans une section d'abscisse  $x$ , séparant la poutre orientée en une partie *gauche* et une partie *droite*, est la somme des moments extérieurs (dus aux couples concentrés et aux efforts d'action et de réaction) s'exerçant sur *la partie gauche*.

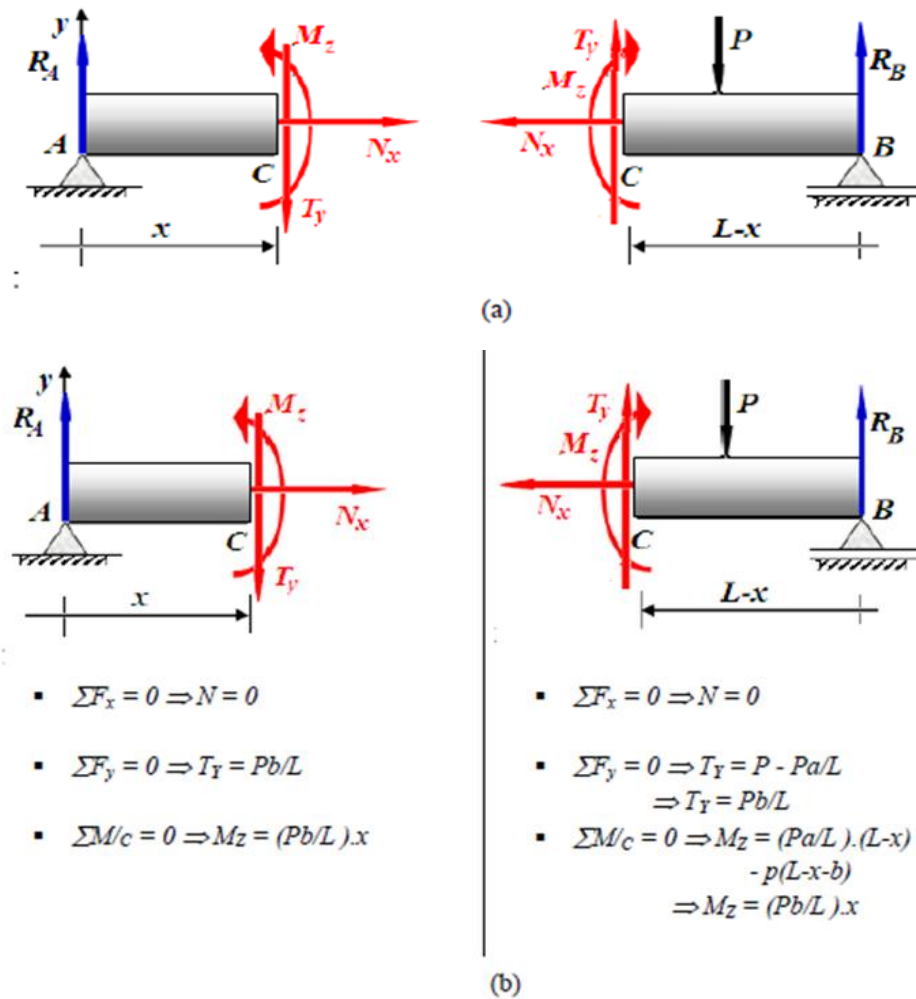


Figure 4.8- Convention de signes

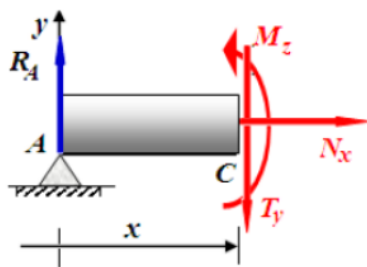
### 4.5 Diagrammes des Efforts tranchants et des moments fléchissant

Le diagramme des efforts tranchants est la courbe représentative de la fonction  $T(x)$  et le diagramme des moments fléchissant est la courbe représentative de la fonction  $M(x)$ , où  $x$  est l'abscisse de la poutre de l'une de ses extrémités.

Si on veut exprimer et tracer la variation de l'effort tranchant et le moment fléchissant le long de la poutre schématisée par la figure 4.7.

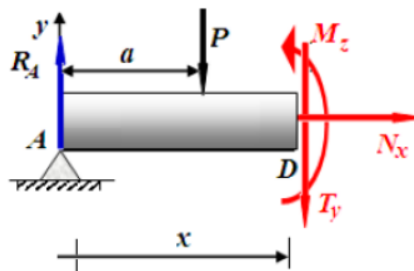
On suppose d'abord que la poutre soit coupée au point C (1<sup>ère</sup> partie) puis au point (D) (2<sup>ème</sup> partie).

1<sup>ère</sup> partie :  $0 \leq x \leq a$



- $\sum F_x = 0 \Rightarrow N = 0$
- $\sum F_y = 0 \Rightarrow T_Y = Pb/L$
- $\sum M/C = 0 \Rightarrow M_Z = (Pb/L) \cdot x$   
 $M_Z(x=0) = 0$   
 $M_Z(x=a) = Pab/L$

2<sup>ème</sup> partie :  $a \leq x \leq L$



- $\sum F_x = 0 \Rightarrow N = 0$
- $\sum F_y = 0 \Rightarrow T_Y = - Pa/L$
- $\sum M/C = 0 \Rightarrow M_Z = (Pa/L) \cdot (L-x)$   
 $M_Z(x=a) = Pab/L$   
 $M_Z(x=L) = 0$

Ayant obtenu les expressions des efforts tranchants et moments fléchissant pour chacune des deux parties, traçons leurs variations le long de la poutre comme montrées par la figure ci-dessous.

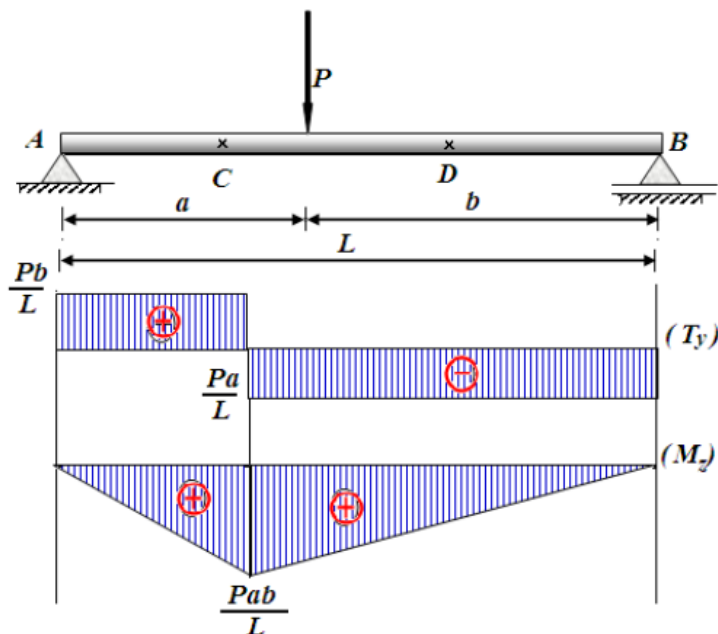
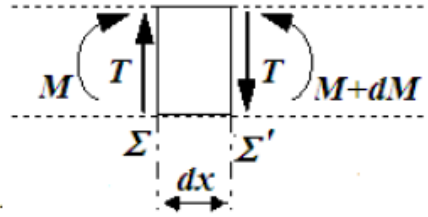


Figure 4.9- Diagramme de T et M

## 4.6 Relation entre moment fléchissant et effort tranchant

Considérons un élément de poutre pris entre deux sections ( $\Omega$ ) et ( $\Omega'$ ) infiniment voisines, distantes de  $dx$  (Fig. 4.10).



**Figure 4.10-** Élément de poutre isolée non chargée

- L'influence de la partie gauche sur l'élément est représentée par  $T$  et  $M$ .
- L'influence de la partie droite sur l'élément est représentée par  $T'$  et  $M'$ .

Si aucun effort ne s'exerce sur la poutre entre les sections ( $\Omega$ ) et ( $\Omega'$ ), les efforts tranchants de ces deux sections sont égaux ( $T'=T$ ). Cependant, les moments fléchissant  $M$  et  $M'$  ( $M'=M+dM$ ) sont différents.

- L'équilibre de l'élément s'écrit :  $M + Tdx - M - dM = 0$

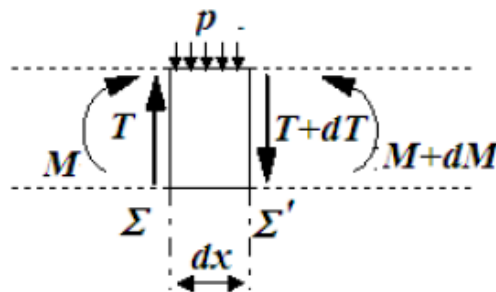
D'où :

$$T = \frac{dM}{dx}$$

Ainsi, sur toute portion de poutre comprise entre des charges, l'effort tranchant est la dérivée par rapport à l'abscisse  $x$  du moment fléchissant.

## 4.7 Relation entre effort tranchant et chargement réparti

Considérons le cas où une charge répartie, d'intensité  $p$ , s'exerce entre les sections ( $\Sigma$ ) et ( $\Sigma'$ ) (Fig. 4.11). La charge totale appliquée sur l'élément est  $p dx$ .



**Figure 4.11 -** Élément de poutre isolée chargée uniformément

L'équilibre des forces sur l'élément mène à :  $T - p dx - T - dT = 0$

Ce qui veut dire que :

$$-p = \frac{dT}{dx}$$

L'équilibre des moments donne :  $M + Tdx - \frac{pdx^2}{2} - M - dM = 0$

En négligeant le terme du second ordre ( $\frac{pdx^2}{2}$ )

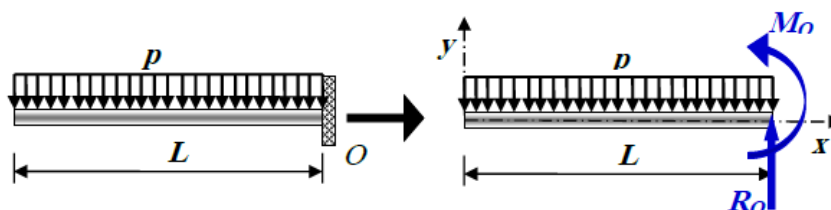
Il reste

$$T = \frac{dM}{dx}$$

Ce qui veut dire que la relation entre l'effort tranchant et le moment fléchissant reste valable au premier ordre.

**Exemple 4.1**

Pour la poutre console schématisée par la figure ci-dessous, exprimer et tracer la variation de l'effort tranchant et le moment fléchissant le long de la poutre.



**Solution**

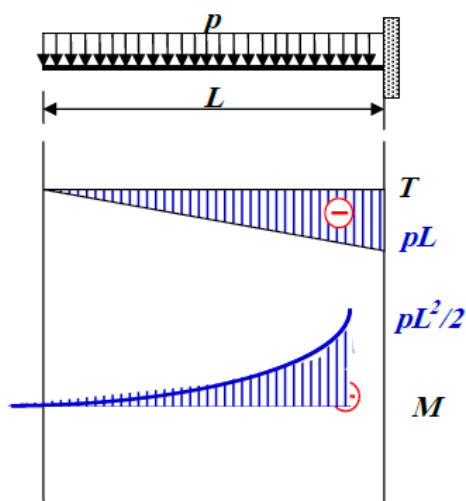
On a, pour  $0 \leq x \leq L$  :

$$T(x) = -p \cdot x$$

$$M(x) = -\frac{p \cdot x^2}{2}$$

Ces expressions montrent la variation de l'effort tranchant et du moment fléchissant en fonction de l'abscisse x.

Leurs tracés sont montrés sur la figure suivante :



**Remarque**

Lorsqu'une charge concentrée s'exerce entre ( $\Sigma$ ) et ( $\Sigma'$ ) (Fig. 4.12), l'équilibre s'écrit :  $T' = T - F$

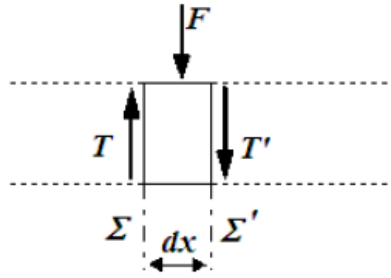


Fig.4.12 -Élément de poutre isolée chargé par une force concentrée

## 4.8 Condition de résistance à la flexion

### 4.8.1 Contrainte normale

En tenant compte des singularités de forme et des hypothèses simplificatrices, la contrainte réelle doit être inférieure à une contrainte admissible.

La condition de résistance pour les contraintes normales s'écrit donc :

$$k \cdot |\sigma_{max}| \leq \sigma_p = \frac{\sigma_e}{S}$$

k : coefficient de concentration de contraintes en flexion ;

S : coefficient de sécurité

### 4.8.2 Contrainte tangentielle

De même, la condition de résistance pour les contraintes tangentielles s'écrit :

$$|\tau_{moy}| \leq \tau_p = \frac{\tau_e}{S}$$

## 4.9 Equation différentielle de la déformée

### 4.9.1 Définition de la déformée

Considérons une poutre horizontale simplement appuyée, fléchie dans le plan vertical  $xy$  (Fig.4.13). Après flexion, l'axe longitudinal  $AB$  de la poutre prend la forme courbe  $AMB$ . Cette courbe est appelée *déformée* ou *ligne élastique* (ou *élastique* tout simplement) de la poutre et peut être décrite par une équation de la forme  $y = f(x)$ . Les ordonnées  $y$  représentant les flèches subies par les sections (leurs centres de gravité plus exactement) de la pièce.

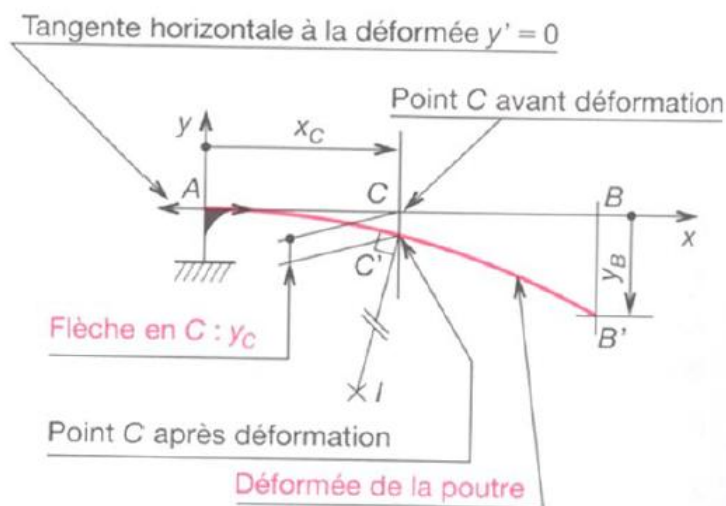


Figure 4.13- La déformée d'une poutre

### 4.9.2 Relations entre flèche et moment fléchissant

L'influence de l'effort tranchant sur la courbure de la déformée étant généralement très faible, elle peut être négligée (nous étudierons plus loin l'influence de  $T$ ). Nous admettrons donc que la courbure de la ligne élastique en un point donné ne dépend que de la valeur du moment fléchissant en ce point. Dans ce cas, nous utilisons la relation liant la courbure au moment fléchissant obtenue rigoureusement dans le cas de la flexion pure et qui s'écrit (Bourahla) :

$$\frac{I}{R} = \frac{M_z}{EI_z}$$

D'autre part, on apprend dans les cours de Géométrie Différentielle que la courbure en un point  $M$ , d'une courbe plane donnée par l'équation explicite  $y = f(x)$ , vaut :

$$\frac{1}{R} = \varepsilon \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

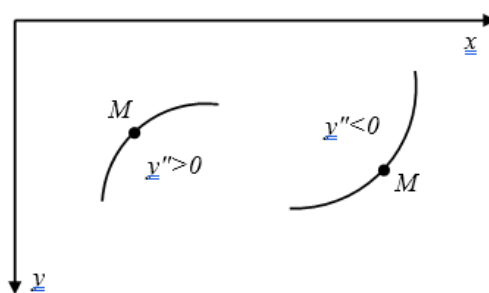


Figure 4.14 Courbure en un point  $M$

Remarquons toutefois que du point de vue mathématique  $\varepsilon$  vaut + 1 et le signe de la courbure ne dépend que de la valeur de la dérivée seconde (le dénominateur de l'expression précédente étant strictement positif). Ainsi, la courbure (ou la dérivée seconde) est positive si la concavité de la courbe est tournée vers les  $y$  positifs et elle est négative quand la concavité est orientée vers les  $y$  négatifs (Fig.4.14).



A partir des deux équations précédentes, on déduit la relation différentielle suivante reliant le moment ( $M_z$ ) et la flèche ( $y$ ).

$$\frac{M_z}{EI_z} = \varepsilon \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

Physiquement, la dérivée première  $y' = dy/dx$  représente la pente de la tangente à la déformée  $y$  au point courant  $M$ . Dans le cadre de l'hypothèse admise des petits déplacements, les angles sont très petits et, non seulement on peut confondre la tangente et l'angle ( $dy/dx = \operatorname{tg}\theta \approx \theta$ ), mais le terme  $(dy/dx)^2$  devient négligeable devant l'unité. D'où la simplification de la relation :

$$\frac{M_z}{EI_z} = \varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = \varepsilon y''$$

Notons au passage que dans le cadre des petits déplacements,  $y'$  représente également la rotation de la section  $\Sigma$  d'abscisse  $x$ .

La valeur à donner à  $\varepsilon$  se déduit plus facilement de la dernière expression. Il suffit de comparer les signes de  $y''$  et de  $M_z$ . La convention de signes adoptée pour le moment est exactement l'opposé de celle de  $y''$  puisqu'on considère un moment comme positif quand la concavité de la déformée est tournée vers les  $y$  négatifs.

D'où le signe adéquat à prendre :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = y'' = -\frac{M_z}{EI_z} \quad \underline{\text{ou encore}} : EI_z y'' = -M_z$$

Donc, on peut calculer la flèche à partir de l'équation de la déformée déterminer par double intégration de l'équation du moment fléchissant.

$$\frac{M_z}{EI_z} = \varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} = \varepsilon y''$$

### 4.9.3 Condition de rigidité

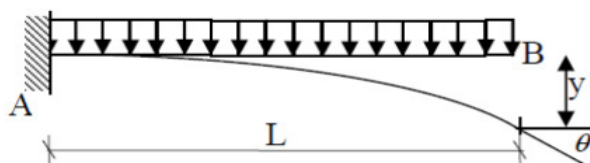
On calcule la flèche maximale et on vérifie ensuite que cette flèche reste inférieure à une valeur limite  $f_{lim}$ .

$$y_{max} \leq f_{lim}$$

## 4.10 Exercices d'application

### Exercice 4.1

Déterminer l'expression de la déformée d'une console soumise à une charge uniformément répartie sur toute sa longueur.



### Solution

En appliquant la méthode d'intégration, on obtient la déformée de la poutre console comme suit :

$$M = -q \frac{x^2}{2} \rightarrow Ely''(x) = -M = q \frac{x^2}{2}$$

$$\rightarrow Ely'(x) = EI\theta(x) = q \frac{x^3}{6} + C_1$$

$$\rightarrow Ely(x) = q \frac{x^4}{24} + C_1x + C_2$$

### *Conditions aux limites :*

La rotation  $y'(x=L)$  et la flèche  $y(x=L)$  sont nulles au niveau de l'encastrement :

$$y'(L) = 0 = q \frac{L^3}{6} + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = -q \frac{L^3}{6}$$

$$y(L) = 0 \Rightarrow q \frac{L^4}{24} - q \frac{L^4}{6} + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{qL^4}{8}$$

D'où ;

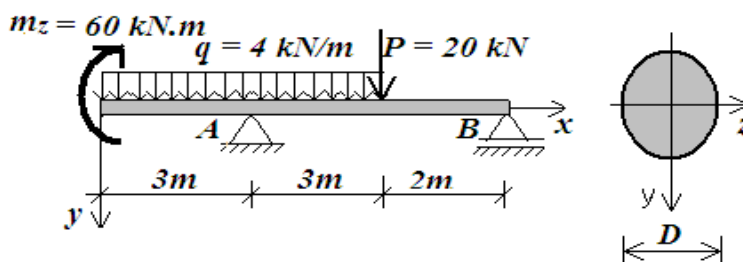
$$y = \frac{1}{EI} \left[ \frac{qx^4}{24} - \frac{qL^3}{6}x + \frac{qL^4}{8} \right] \quad \text{et} \quad y'(x) = \theta(x) = \frac{1}{6EI} (qx^3 - qL^3)$$

$$\text{A l'extrémité libre } x = 0 \Rightarrow \theta_{\max} = \frac{-qL^3}{6EI} \quad \text{et} \quad y = \frac{qL^4}{8EI}$$

### Exercice 4.2

Soit une poutre en acier de section transversale ronde, comme le montre la figure ci-dessous.

- 1- Calculer les réactions d'appuis ;
- 2- Tracer les diagrammes des efforts intérieurs tout au long de la poutre ;



**Solution**

1- Réactions aux appuis

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow R_{Ax} = 0 \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow R_{Ay} + R_B = 44 \text{ kN} \\ \sum M /_A = 0 &\Rightarrow R_B = 24 \text{ kN} \\ \sum M /_B = 0 &\Rightarrow R_{Ay} = 20 \text{ kN} \end{aligned}$$

Vérification :

$$R_{Ay} + R_B = 44 \text{ kN} \Leftrightarrow 20 + 24 = 44$$

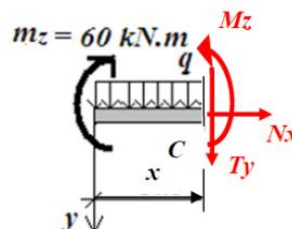
2- Diagramme des efforts intérieurs

**Section 1-1**  $0 \leq x \leq 3 \text{ m}$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T_y = -4x \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} T_y(x=0) = 0 \\ T_y(x=3) = -12 \text{ kN} \end{cases}$$

$$\sum M /_C = 0 \Rightarrow M_z = 60 - 2x^2 \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} M_z(x=0) = 60 \text{ kN.m} \\ M_z(x=3) = 42 \text{ kN.m} \end{cases}$$



**Section 2-2**  $3 \leq x \leq 6 \text{ m}$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T_y = 20 - 4x$$

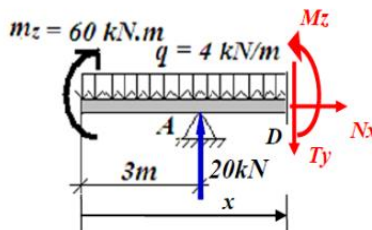
$$\Rightarrow \begin{cases} T_y(x=3) = +8 \text{ kN} \\ T_y(x=6) = -4 \text{ kN} \end{cases}$$

$$\sum M /_D = 0 \Rightarrow M_z = 60 + 20(x-3) - 2x^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M_z(x=3) = 42 \text{ kN.m} \\ M_z(x=6) = 48 \text{ kN.m} \end{cases}$$

$$T_y = 0 \Rightarrow x = 5 \text{ m}$$

$$M_z^{max} = M_z(x=5 \text{ m}) = 50 \text{ kN.m}$$

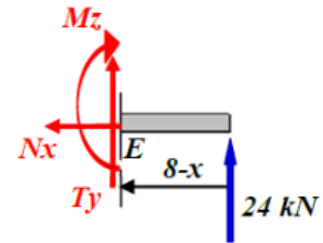


**Section 3-3**  $6 \leq x \leq 8m$

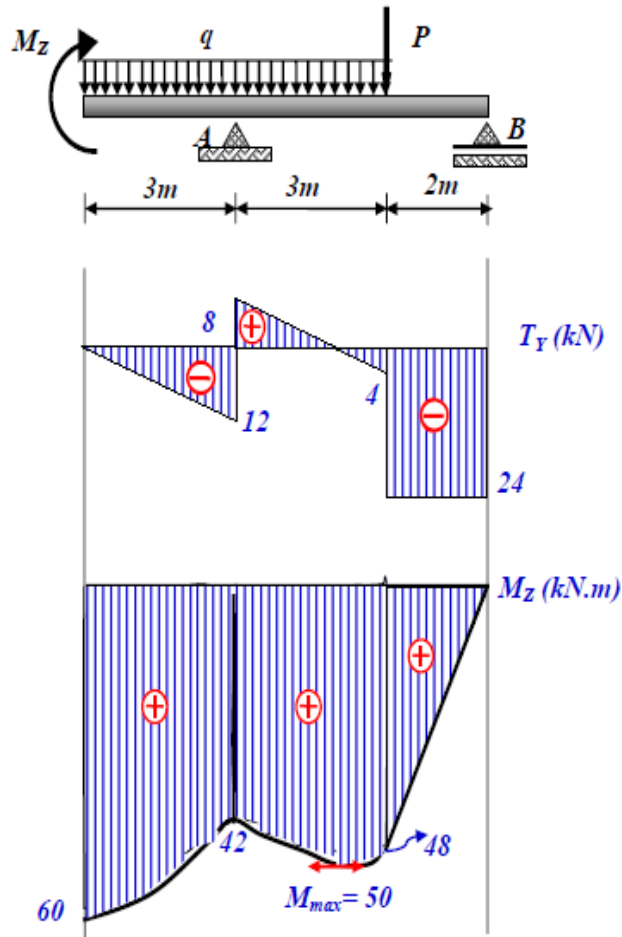
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T_y = -24kN$$

$$\sum M /_E = 0 \Rightarrow M_z = 24(8-x)d'ou \begin{cases} M_z(x=6) = 48kN.m \\ M_z(x=8) = 0 \end{cases}$$



D'où le diagramme des efforts tranchants et moments fléchissant :



### 4.11 Exercices à résoudre

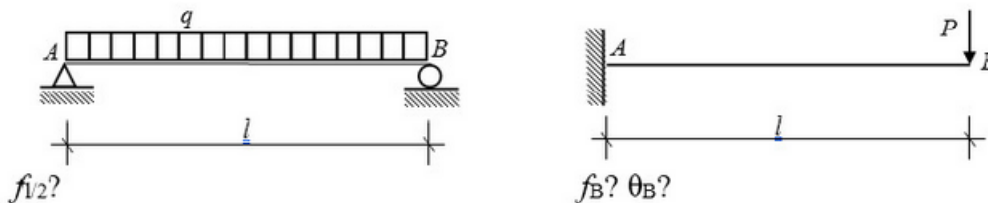
#### Exercice 4.1

Suite de l'exercice 4.2 :

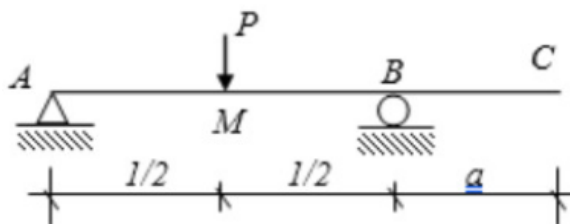
- 3- Pour la section où le moment fléchissant est maximal, tracer la distribution des contraintes normales et tangentielles tout au long de la section transversale de la poutre.
- 4- Déterminer le diamètre de la section si,

**Exercice 4.2**

Calculer les déformées ( $f$ ) et les rotations ( $\theta$ ) indiquées des systèmes représentés ci-après, en utilisant la méthode d'intégration directe.

**Exercice 4.3**

Calculer les déformées ( $f$ ) et les rotations ( $\theta$ ) de la poutre ci-après, en utilisant la méthode d'intégration directe.



**Réponse :**  $f_M = \frac{pl^3}{48EI}$ ,  $f_C = \frac{pl^2a}{16EI}$ ,  $\theta_C = \frac{-pl^2}{16EI}$

# **CHAPITRE 5**

## **Etat de contrainte et de déformation**

## 5.1 Introduction

L'objet de ce chapitre est l'étude des effets des charges sur les éléments auxquels elles sont appliquées, en termes de contraintes et de déformations. Ces dernières constituent l'outil principal de mesure de la résistance et de la rigidité des éléments. En d'autres termes ce sont les quantités de base d'appréciation de l'état et du comportement des éléments sous l'effet des charges. Les définitions des notions de contraintes et de déformation seront d'abord présentées, ensuite les différents états de contraintes seront examinés. Les procédés de transformation (translation et rotation) des contraintes et des déformations seront énoncés. Finalement les relations entre les efforts et les contraintes d'une part, et d'autre part, entre ces dernières et les déformations seront aussi établies.

## 5.2 Notion de contrainte

Les efforts internes définis dans le chapitre précédent, engendré par des forces extérieures, ne sont que les résultantes des efforts élémentaires agissant sur chaque section de l'élément sollicité par les forces extérieures. On appelle ces efforts élémentaires, contraintes (Bourahla).

### 5.2.1 Vecteur contrainte

Le torseur de cohésion permet de modéliser les efforts intérieurs au point G centre de la section droite mais ce torseur ne représente qu'une vision globale de toutes les actions mécaniques qui s'appliquent localement en chaque point de la section droite.

Pour représenter ces actions mécaniques, on considère un point M de la surface S. Autour de ce point M, on considère un élément de surface  $dS$  de normale  $\vec{n}$  (Fig.5.1).

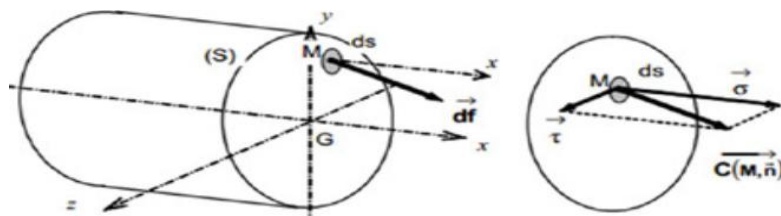


Figure 5.1- Zoom local sur un point M de la coupure

Les efforts intérieurs exercés sur  $dS$  sont une densité surfacique d'efforts ou densité de force par unité de surface.

Cette densité surfacique d'effort est caractérisée par le vecteur contrainte  $\vec{C}(M, \vec{n})$

Les actions mécaniques s'exerçant sur la surface sont donc  $(d\vec{F}) \vec{C} = (M, \vec{n})dS$

L'unité du vecteur contrainte est le rapport d'une force par unité de surface soit  $N/m^2$  ou Pa.

### 5.2.2. Contrainte normale et contrainte tangentielle

On définit les contraintes normales et tangentielle respectivement la projection de  $\vec{C}(M, \vec{n})$  sur la normale  $\vec{n}$ , et la projection de  $\vec{C}(M, \vec{n})$  sur le plan de l'élément de surface  $dS$  (Fig.5.2) :

$$\vec{C}(M, \vec{n}) = \sigma \vec{n} + \tau \vec{t}$$

Avec ;

$\sigma$  : Contrainte normale.

$\tau$  : Contrainte tangentielle

$\vec{n}$  Vecteur normale à l'élément de surface  $dS$

$\vec{t}$  : Vecteur tangent à l'élément de surface  $dS$

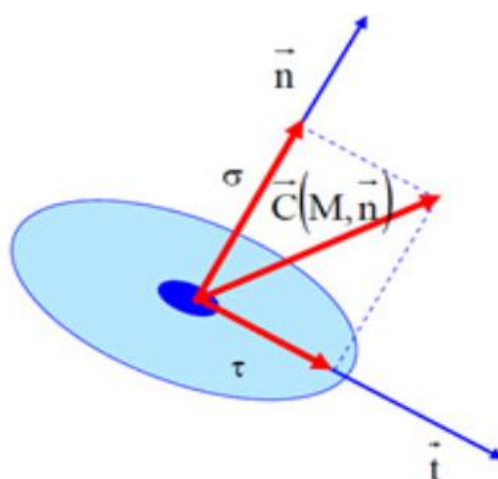


Figure 5.2- Vecteur contrainte

### 5.3 Etat de contrainte

Découpons au voisinage du point O du corps sollicité un parallélépipède rectangle infiniment petit de côtes  $dx$ ,  $dy$  et  $dz$ . Sur chaque face de ce parallélépipède agissent une contrainte normale et deux contraintes tangentielles.

La contrainte normale est positive quand elle agit sur une facette positive dans le sens positif de l'axe considéré ou sur une facette négative dans le sens négatif de cet axe.

Une contrainte tangentielle est positive quand elle agit sur une facette positive dans le sens positif de l'axe parallèle à la facette ou sur une facette négative dans le sens négatif de l'axe parallèle à cette facette.

Toutes les contraintes de l'élément représenté sur la Figure (5.3) sont positives.



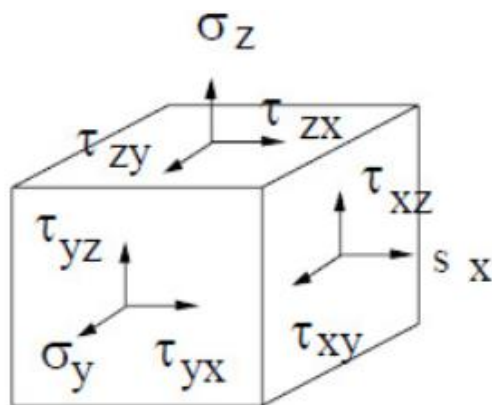


Figure 5.3- Représentation des contraintes sur un élément de volume

L'état de contrainte en un point est, donc, représenté par un tenseur:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Pour que le corps soit en équilibre, il faut que:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad ; \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} \quad ; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

L'état de contrainte plan est le cas particulier d'une seule facette du volume où sur chaque côté agissent une contrainte normale et une contrainte tangentielle (Fig.5.4).

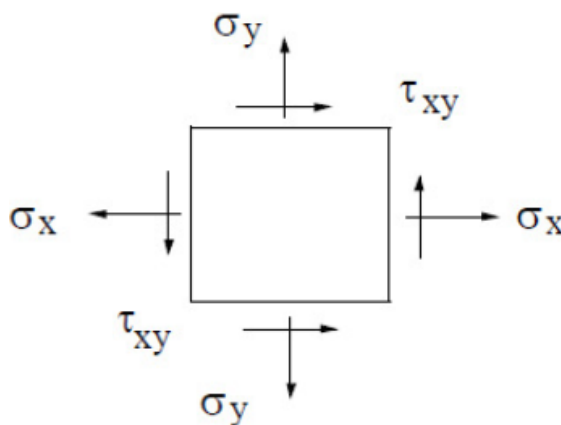


Figure 5.4- Etat plan de contraintes

L'état de contrainte linéaire est le cas particulier d'un seul côté de la facette sur lequel agissent une contrainte normale et une contrainte tangentielle (Fig. 5.5).

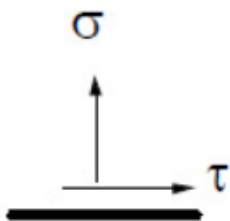
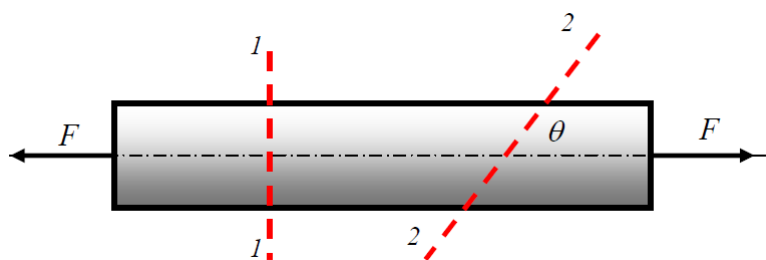


Figure 5.5- Etat linéaire de contrainte

**Exemple 5.1**

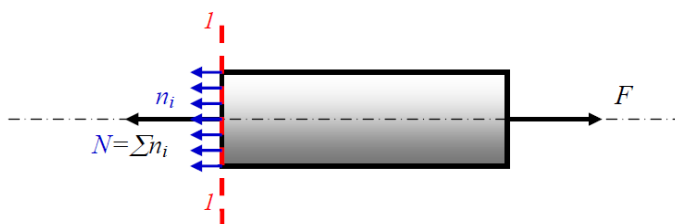
Soit une barre droite, de section A constante, soumise à une force axiale F.

- Déterminer les contraintes normales et tangentielles sur un plan normal à l'axe de la barre (plan 1-1) et sur un autre faisant un angle  $\theta$  avec l'axe de la barre (plan 2-2).

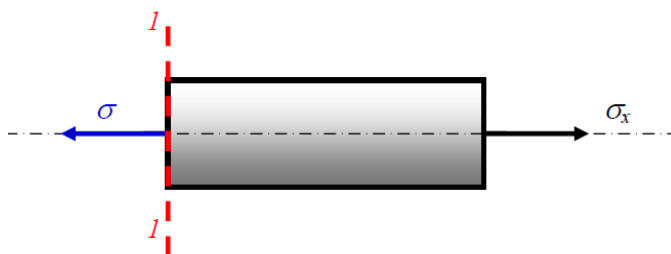


**Solution**

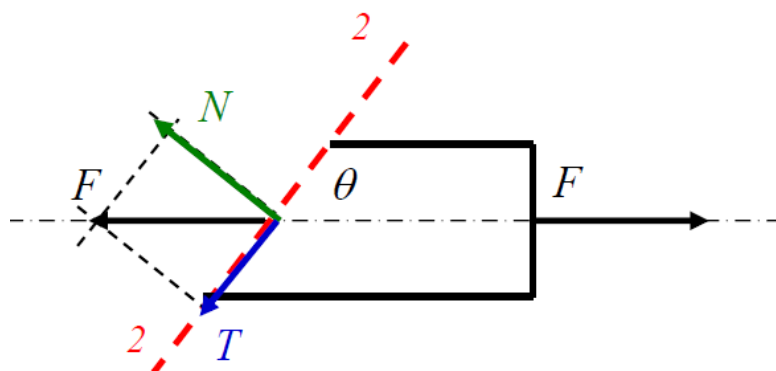
Plan 1-1



$$\begin{cases} \sigma = \frac{N}{A} = \frac{F}{A} = \sigma_x; & \sigma \leq [\sigma] \\ \tau = 0 \end{cases}$$



Plan 2-2



$$\sigma_{\theta} = N/A' = F/A \cdot \sin^2 \theta = \sigma_x \cdot \sin^2 \theta$$

$$\tau_{\theta} = T/A' = F/A \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta = \sigma_x \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta$$

Avec ;

$$N = F \cdot \sin \theta, T = F \cdot \cos \theta, A' = A / \sin \theta$$

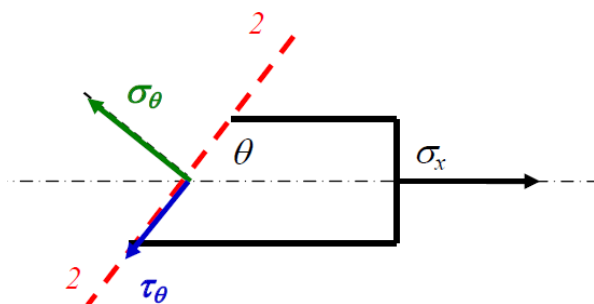
A partir des relations trigonométriques :

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}, \quad \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{\sin(2\alpha)}{2}$$

On tire les relations suivantes :

$$\sigma_{\theta} = \sigma_x / 2 \cdot (1 - \cos 2\theta) \quad ; \quad \sigma_{max} = \sigma_x / 2 \quad \text{pour } \theta = 90^\circ$$

$$\tau_{\theta} = \sigma_x / 2 \cdot \sin 2\theta \quad ; \quad \tau_{max} = \sigma_x / 2 \quad \text{pour } \theta = 45^\circ$$



- La contrainte normale maximale agit sur les sections perpendiculaires à l'axe de la barre.
- La contrainte tangentielle maximale agit sur un plan faisant un angle de  $45^\circ$  par rapport à l'axe de la barre.

### 5.3.1 Equations de transformation de l'état de contrainte linéaire

Pour une barre en traction (Fig. 5.6), la contrainte normale qui se développe dans la section S est donnée par :

$$\sigma = \frac{N}{S}$$

L'état de contrainte dans un plan quelconque  $S_\alpha$  dont la normale extérieure  $n_\alpha$  coupe l'axe  $\sigma$  sous un angle  $\alpha$ , la contrainte totale  $p_\alpha$  est égale à

$$P_\alpha = \frac{N}{S_\alpha} = \frac{N}{S} \cos\alpha = \sigma \cos\alpha$$

Les contraintes normales et tangentielles dans la section  $S_\alpha$  sont données par :

$$\sigma_\alpha = P_\alpha \cos\alpha = \sigma \cos^2\alpha$$

$$\tau_\alpha = P_\alpha \sin\alpha = \sigma \cos\alpha \sin\alpha = \frac{1}{2} \sigma \sin 2\alpha$$

#### Etude de l'orientation

$$\sigma_{max} = \sigma = P_\alpha ; \alpha = 0 \rightarrow \tau_0 = 0$$

$$\tau_{max} = \sigma/2 ; \alpha = \frac{\pi}{4} \rightarrow \sigma_{\pi/4} = \sigma/2$$

Considérons les contraintes qui agissent sur deux sections orthogonales :

$$\tau_\alpha = \frac{1}{2} \sigma \sin 2\alpha$$

C'est la loi de réciprocité des contraintes tangentielles

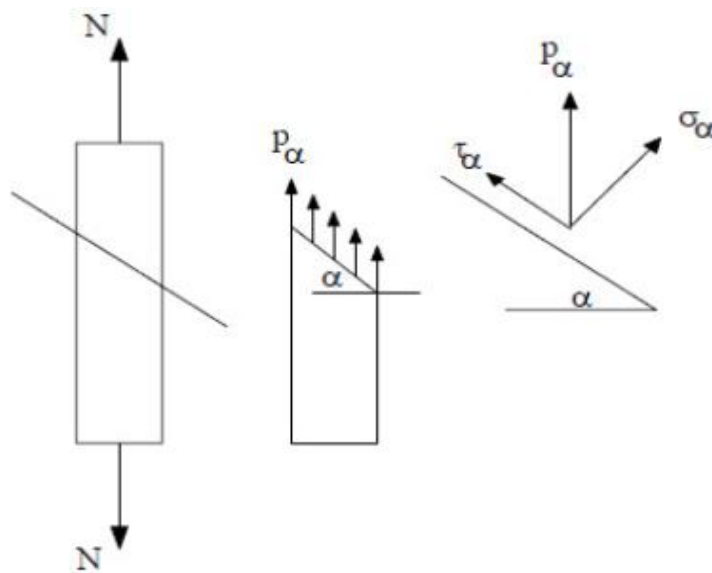


Figure 5.6 - Barre en traction

### 5.3.2 Equation de contrainte de l'état de contrainte plan

Pour connaître les contraintes suivant une direction  $\alpha$  par rapport à l'axe  $x$ , nous isolons une partie de l'élément en forme de prisme triangulaire droit (Fig. 5.7).

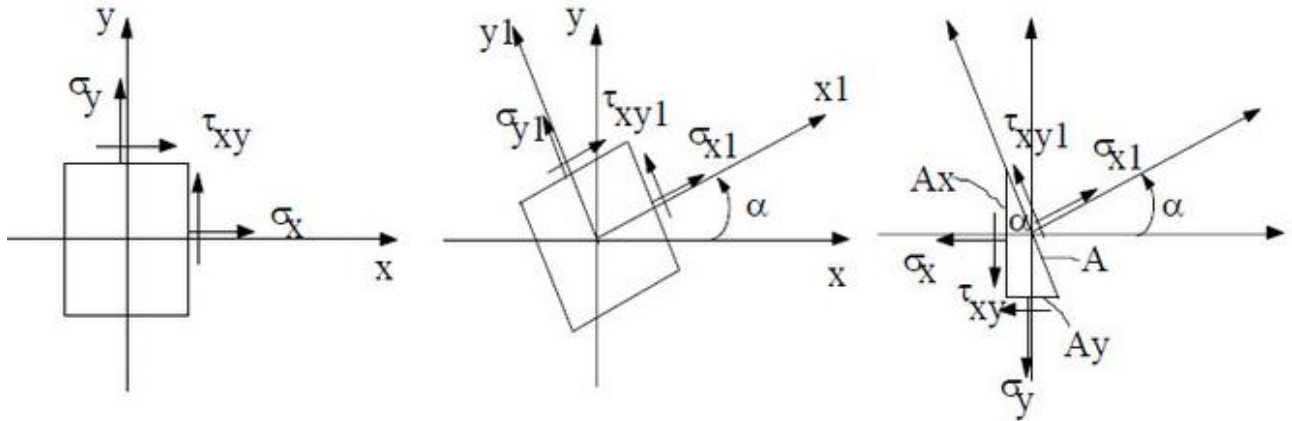


Figure 5.7 - Contrainte plane suivant une direction  $\alpha$

Soit  $S$  l'aire de la face du prisme opposé à l'angle droit, on a :

$$A_x = S \cos \alpha$$

$$A_y = S \sin \alpha$$

Les contraintes sur les différentes faces du prisme doivent s'équilibrer, on a :

Suivant la normale :

$$\sum F_\alpha = 0 \rightarrow A \sigma_\alpha - A \sigma_x \cos^2 \alpha - A \tau_{xy} \cos \alpha \cdot \sin \alpha - A \sigma_y \sin^2 \alpha - A \tau_{xy} \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 0$$

Suivant la tangente :

$$\sum F_{\alpha+90} = 0 \rightarrow A \tau_\alpha + A \sigma_x \cos \alpha \cdot \sin \alpha - A \tau_{xy} \cos^2 \alpha + A \tau_{xy} \sin^2 \alpha - A \sigma_y \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 0$$

Soit :

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + 2 \tau_{xy} \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\tau_\alpha = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \tau_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$$

En substituant dans ces deux dernières équations les expressions de

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}, \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}, \quad \sin \alpha \cos \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2}$$

on obtient:

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha$$

Ces équations sont connues sous le nom d'équations de transformation des contraintes dans le plan.

- **Les contraintes principales**

En variant l'angle  $\alpha$ , les contraintes normales et tangentielles varient. Pour des raisons de résistance, les valeurs maximales des contraintes sont d'une grande utilité.

Pour déterminer la facette sur laquelle agit la contrainte normale  $\sigma_1$ , on annule l'expression de la dérivée par rapport à  $\alpha$  de  $\sigma_{\alpha}$ .

$$\frac{d\sigma_{\alpha}}{d\alpha} = 0 \Rightarrow \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha = 0$$

Et on tire :

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

En utilisant cette équation, on peut écrire :

$$\cos 2\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2R} \text{ et } \sin 2\alpha = \frac{\tau_{xy}}{R}$$

Avec ;  $R = \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} + \tau_{xy}^2}$

Par substitution dans les équations de transformation des contraintes dans le plan, on obtient :

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} + \tau_{xy}^2}$$

Et  $\tau_{\alpha_0} = 0$

Pour distinguer l'orientation des axes principaux, on remplace l'angle  $\alpha_0 \in [-\pi/2, +\pi/2]$  donné dans l'expression de  $\sigma_{\alpha}$  et on la compare avec  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ .

Ainsi on identifie la direction de l'un des axes principaux, l'orientation du deuxième axe correspond à l'angle  $(\alpha_0 \pm \pi/2)$ . Le sens positif des angles est le sens trigonométrique.

Ou d'une autre façon ;

$$\sigma_{max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

### Remarques

- Les contraintes  $\sigma_{max}$  et  $\sigma_{min}$  sont appelées *contraintes principales* et les plans sur lesquels s'y trouvent s'appellent *plans principaux*.
- Les contraintes tangentielles sont nulles sur les *plans principaux*.

On procède de la même manière que pour les contraintes principales, en annulant l'expression de la dérivée de  $\tau_\alpha$  :

$$\begin{aligned} \frac{d\tau_\alpha}{d\alpha} = 0 &\Rightarrow -2\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha\right) = 0 \\ &\Rightarrow \operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \end{aligned}$$

On remarque que :

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\alpha_{00} \times \operatorname{tg} 2\alpha_0 &= -1 \\ \Rightarrow \operatorname{tg} 2\alpha_{00} &= \frac{-1}{\operatorname{tg} 2\alpha_0} = -\operatorname{ctg} 2\alpha_0 \end{aligned}$$

Par analogie avec :  $\operatorname{tg}\left(\theta \pm \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{ctg}\theta$

On aura :

$$2\alpha_{00} = 2\alpha_0 \pm \frac{\pi}{2} \rightarrow \alpha_0 = \alpha_0 \pm \frac{\pi}{4}$$

Le plan des contraintes tangentielles maximales est à  $45^\circ$  par rapport à celui des contraintes normales principales. On déduit que :

$$\cos 2\alpha_{00} = \frac{\tau_{xy}}{R} \text{ et } \sin 2\alpha_{00} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2R}$$

En substituant ces valeurs dans l'expression  $\tau_\alpha$ , on obtient l'expression de la contrainte tangentielle maximale:

$$\tau_{1,2} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Les orientations des facettes des contraintes tangentielles maximales sont déterminées de la même façon que les axes des contraintes principales en remplaçant l'angle  $\alpha_{00} \in [-\pi/2, \pi/2]$  et on la compare avec  $\tau_{1,2}$ .

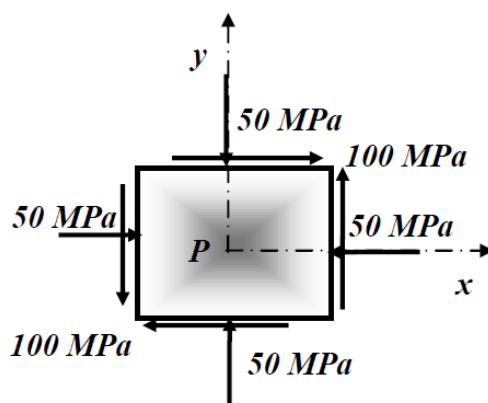
La contrainte normale associée est donnée par :

$$\sigma' = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

### Exemple 5.2

Considérons l'état plan de contraintes au point P représenté sur la figure ci-dessous.

- 1- Ecrire la matrice des contraintes au point P dans le repère (O,x,y,z).
- 2- Déterminer les éléments principaux des contraintes puis les représenter dans le plan (x,y).
- 3- Calculer les valeurs des contraintes de cisaillement extremums. Dans quels plans se trouvent-elles?



### Solution

1- Matrice des contraintes au point P

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} -50 & -100 & 0 \\ -100 & -50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2- Les éléments principaux

$$\sigma_{max} = \frac{-50 - 50}{2} + \sqrt{\left(\frac{-50 + 50}{2}\right)^2 + (-100)^2}$$

$$\sigma_{max} = 50 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{min} = \frac{-50 - 50}{2} - \sqrt{\left(\frac{-50 + 50}{2}\right)^2 + (-100)^2}$$

$$\sigma_{min} = -150 \text{ MPa}$$

$$\text{tg}(2\alpha_p) = -\frac{-100}{\frac{-50 + 50}{2}} \Rightarrow 2\alpha_p = 90^\circ \Rightarrow \alpha_p = 45^\circ$$



C'est-à-dire les normales aux plans principaux sont les bissectrices au plan (x,y) comme montré sur la figure ci-dessous.

3- *Contraintes de cisaillement extremums :*

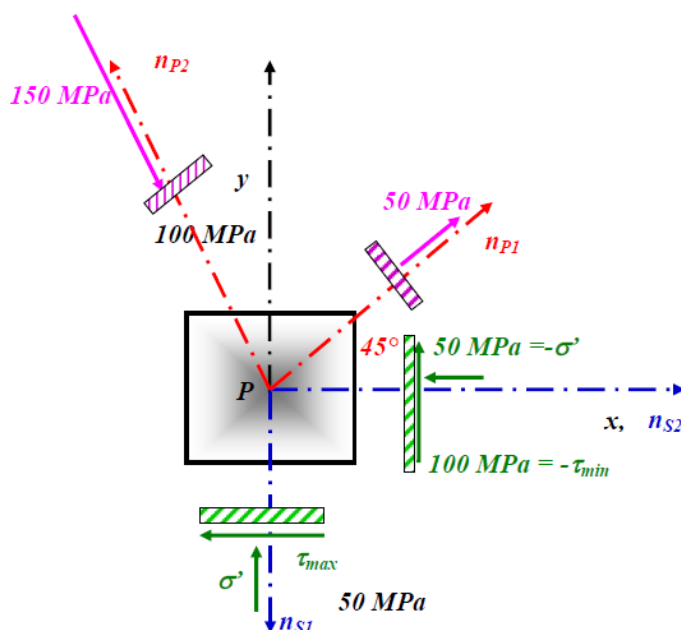
$$\tau_{max,min} = \pm \sqrt{\left(\frac{-50 + 50}{2}\right)^2 + (100)^2}$$

$$\tau_{max} = 100 \text{ MPa}; \quad \tau_{min} = -100 \text{ MPa}$$

$$\text{tg}(2\alpha_s) = \frac{-50 + 50}{100}$$

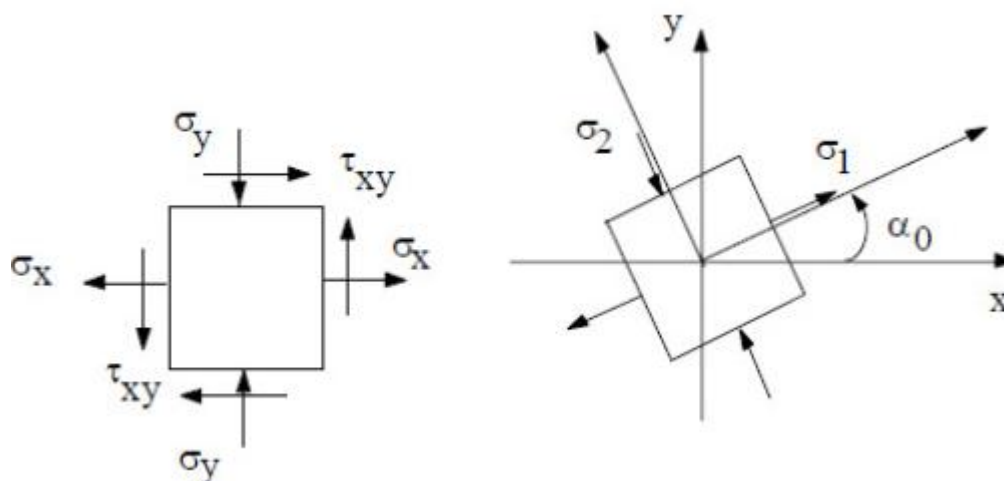
$$\alpha_s = 0$$

Cela signifie que les contraintes de cisaillement extremum se trouvent sur les facettes de normales x et y.



## 5.4 Cercle de Mohr

Dans la représentation graphique des contraintes connue sous le nom de cercle de Mohr, l'axe des abscisses représente les contraintes normales et les contraintes tangentielles sont projetées sur un axe perpendiculaire dirigé vers le bas, afin que le sens positif des angles soit le sens trigonométrique (Fig.5.8).



**Figure 5.8-** Représentation graphique des contraintes

Le cercle de Mohr peut être positionné sur le plan  $(\sigma, \tau)$  en connaissant l'état de contrainte en un point défini par  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  et  $\tau_{xy}$  et de l'utiliser pour déterminer graphiquement les contraintes principales  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  (Fig.5.9).

Le problème indirect consiste à construire le cercle de Mohr à partir de l'état de contrainte principal et de déterminer ensuite n'importe quel état de contrainte orienté d'un angle  $\alpha$ .

Pour tracer le cercle de Mohr on suit les étapes suivantes :

- 1- tracer un repère perpendiculaire et orthonormé  $(O, \sigma, \tau)$
- 2-placer les points  $A(\sigma_x, \tau_{xy})$  et  $B(\sigma_y, -\tau_{xy})$  dans ce repère
- 3- déduire le point  $C$ , point d'intersection de la droite  $AB$  et l'axe des abscisses Pour déduire du cercle de Mohr les contraintes sur un plan incliné dont la normale fait un angle  $\alpha$  avec l'axe  $ox$ , il suffit de déterminer le point «  $D$  » qui fait un angle  $2\alpha$  avec le point  $A$  et dans le même sens, c-à-d  $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}) 2\alpha$ . Les coordonnées du point  $D$  sont  $(\sigma_\alpha, \tau_\alpha)$ .

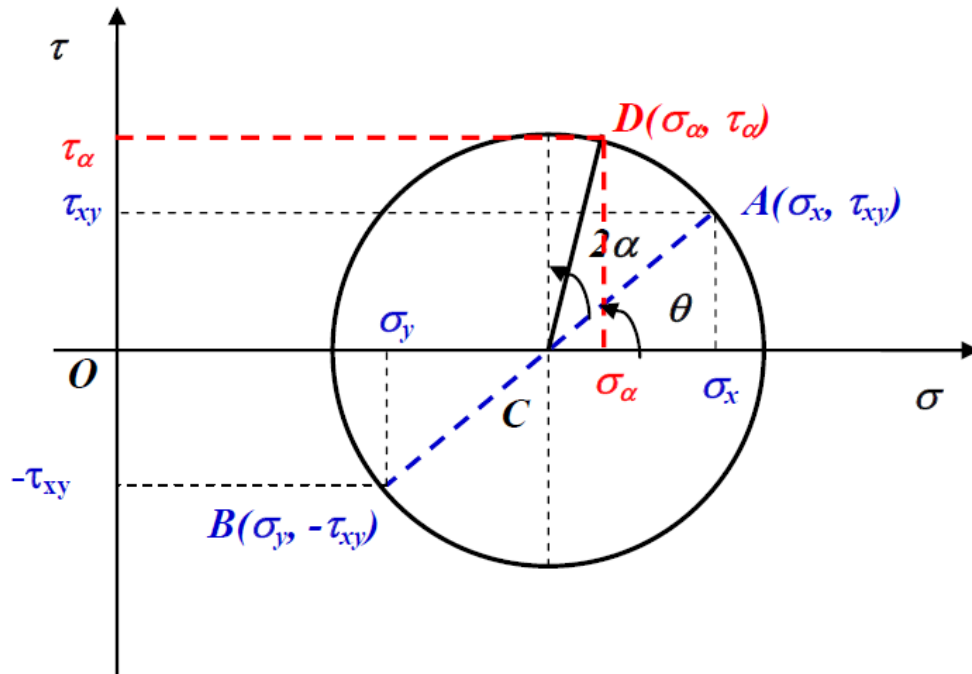


Figure 5.9- Représentation graphique du cercle de Mohr

Du cercle de Mohr, on remarque que :

$$\sigma_{\alpha} = \overline{OC} + R \cos(\theta + 2\alpha) \quad \text{et} \quad \tau_{\alpha} = R \sin(\theta + 2\alpha)$$

Avec ;

$$\overline{OC} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}; \quad R \cos \theta = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}; \quad R \sin \theta = \tau_{xy}$$

En utilisant les relations trigonométriques :

$$\cos(\theta + 2\alpha) = \cos \theta \cos 2\alpha - \sin \theta \sin 2\alpha$$

$$\sin(\theta + 2\alpha) = \sin \theta \cos 2\alpha + \cos \theta \sin 2\alpha$$

Nous retrouvons les expressions de  $\sigma_{\alpha}$  et  $\tau_{\alpha}$  précédentes.

### Exemple 5.2

Un élément plan est soumis aux contraintes  $\sigma_x = 50$  MPa et  $\sigma_y = 50$  MPa.

Déterminer la contrainte de cisaillement existante dans cet élément. Quelle forme prend le cercle de Mohr ?

### Solution

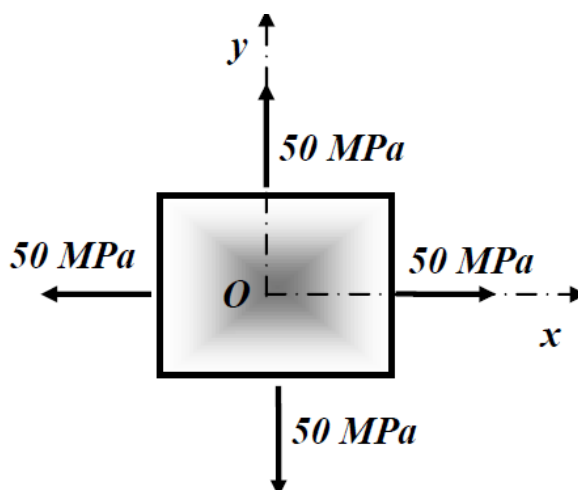
En remplaçant les contraintes  $\sigma_x$  et  $\sigma_y$  dans les équations de transformation :

$$\sigma_{\alpha} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha$$

On obtient :  $\forall \alpha, \sigma_{\alpha} = 50 \text{ MPa}$  et  $\tau_{\alpha} = 0$

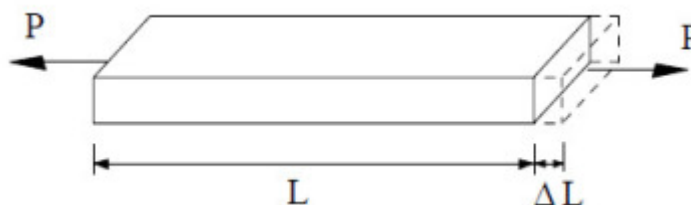
Cet état de contraintes est représenté sur la figure ci-dessous :



Le cercle de Mohr prend la forme d'un point.

## 5.5 Relation contrainte-déformation

Considérons une barre constituée d'un matériau homogène et isotrope sollicitée par des forces axiales (Fig. 5.10).



**Figure 5.10-** Barre sollicitée par des forces axiales

En supposant que l'hypothèse de Bernoulli est valable, alors toutes les fibres d'un élément de longueur  $L$  s'allongent d'une longueur  $\Delta L$  et leurs allongements relatifs  $\varepsilon$  sont définis par:

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} = \text{cste}$$

La relation contrainte-déformation est définie par la loi de Hooke qui traduit la dépendance linéaire des déformations par rapport aux contraintes :

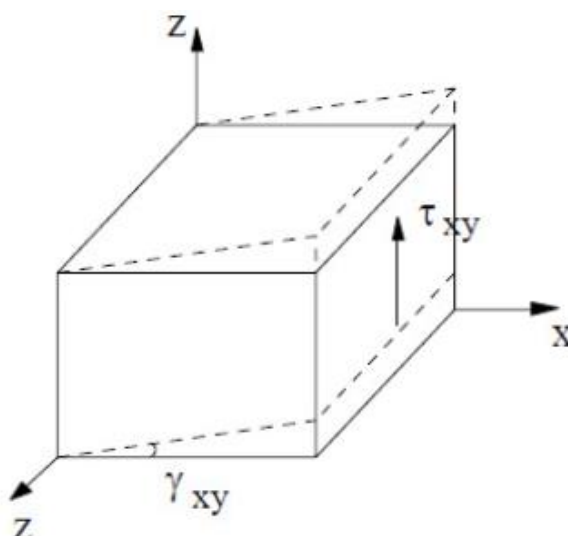
$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \text{ ou } \sigma = E\varepsilon$$

Où E est le coefficient de proportionnalité appelé module d'élasticité ou module d'Young.

E a la dimension d'une contrainte [N/mm<sup>2</sup>] et représente une des constantes caractéristiques mécanique du matériau.

Comme  $\sigma_x$  conduit à l'apparition de la déformation relative  $\varepsilon_x$ , il en est de même pour les contraintes tangentielles  $\tau_{xy}$  qui engendrent des déformations relatives  $\gamma_{xy}$ .

Si on considère maintenant un élément de volume unitaire soumis à l'action de la contrainte  $\tau_{xy}$ , le déplacement de la facette x le long de l'axe y provoque une distorsion des facettes z, faisant ainsi varier l'angle droit de  $\gamma_{xy}$  comme le montre la figure (5.11).



**Figure 5.11-** Élément de volume soumis à une contrainte  $\tau_{xy}$

La relation entre la contrainte tangentielle et la déformation relative  $\gamma_{xy}$  est exprimée par la loi de Hooke pour le cisaillement par :

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

Où G est le coefficient de proportionnalité qu'on appelle module d'élasticité transversal qui a les dimensions d'une contrainte.

### 5.5.1 Loi de Hooke généralisée

La loi de Hooke généralisée traduit les relations linéaires entre contraintes et déformations dans le cas tridimensionnel.

Considérons d'abord les déformations normales  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  et  $\varepsilon_z$  de l'élément de volume unitaire de la Fig. 5.12. Ces déformations peuvent être exprimées en termes des contraintes normales par superposition de leurs efforts.

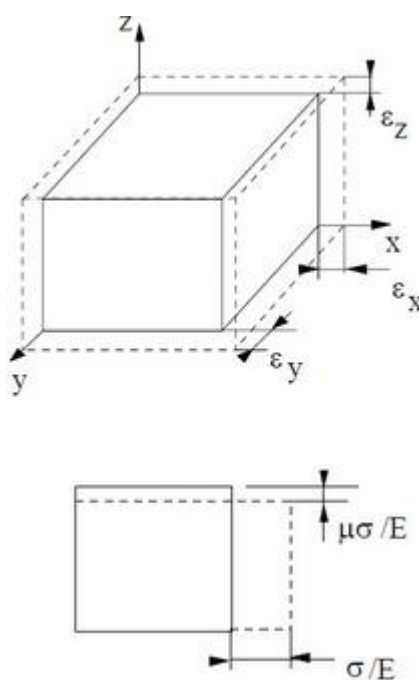
Chaque contrainte normale provoque selon son axe d'application une déformation relative  $\varepsilon$  proportionnelle à la contrainte  $\sigma$ :

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

Et suivant les deux autres axes, des déformations relatives

$$\varepsilon' = -\nu \frac{\sigma}{E} \text{ et } \varepsilon'' = -\nu \frac{\sigma}{E}$$

$\nu$  est le coefficient de Poisson, sans dimension ( $0 \leq \nu \leq 0.5$ )



**Figure 5.12-** Elément de volume subissant des déformations

Donc la déformation relative suivant chaque axe est la somme de la déformation relative due à la contrainte suivant cet axe et celles provoquées par les contraintes selon les deux autres axes perpendiculaires. D'où

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

De même pour ;

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

Il faut noter que les contraintes tangentielles ne provoquent qu'une distorsion angulaire :

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

Ces équations représentent la loi de Hooke généralisée caractérisée par les constantes élastiques  $E$ ,  $G$  et  $\nu$ .

Un matériau élastique, isotrope, est complètement défini par  $E$  et  $\nu$  car il existe une relation entre les trois paramètres définie par:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

### 5.5.2 Variation d'un volume unitaire

La variation d'un volume unitaire  $V_0 = 1 \times 1 \times 1$  d'un point d'un corps soumis à des contraintes normales peut être écrite comme:

$$\Delta V = V_f - V_0 = (1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z) - 1$$

$V_f$ : volume de l'élément après déformation

$V_0$ : volume initial de l'élément

En négligeant les termes faisant intervenir le produit des petites quantités :

$$e = \frac{\Delta V}{V_0} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

## 5.6 Equations de transformation des déformations

Les équations de transformation des déformations planes  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\varepsilon_{xy}$  définies dans un repère XOY en fonction des déformations  $\varepsilon_\alpha$  et  $\gamma_\alpha$  exprimées dans un repère  $X_1OY_1$  orienté d'un angle  $\alpha$  par rapport à XOY sont données par :

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\alpha + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\alpha$$

$$\frac{\gamma_\alpha}{2} = -\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \sin 2\alpha + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cos 2\alpha$$

L'analogie qui existe entre ces équations et celles des transformations des contraintes planes est définie par :

$$\sigma_x \rightarrow \varepsilon_x$$

$$\sigma_y \rightarrow \varepsilon_y$$

$$\tau_{xy} \rightarrow \frac{\gamma_{xy}}{2}$$

Ainsi toutes les propriétés des transformations des contraintes planes sont applicables à celles des déformations. En particulier les déformations principales :

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

Et l'orientation des déformations principales :

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}$$

Ainsi que les déformations angulaires maximales :

$$\frac{\gamma_{max}}{2} = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

Le principe du cercle de Mohr est valable pour la représentation géométrique des déformations en respectant l'analogie entre les contraintes et les déformations. Ainsi les coordonnées des points A et B deviennent :

$$A\left(\varepsilon_x, \frac{\gamma_{xy}}{2}\right) \text{ et } B\left(\varepsilon_y, \frac{\gamma_{xy}}{2}\right)$$

## 5.7 Exercices d'application

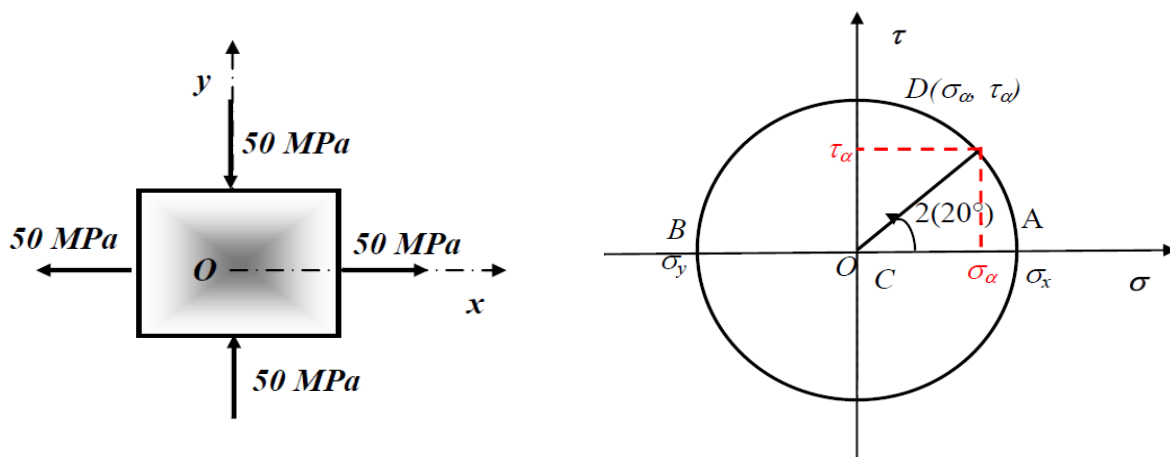
### Exercice 5.1

Tracer le cercle de Mohr pour un élément plan soumis aux contraintes  $\sigma_x = 50$  MPa et  $\sigma_y = -50$  MPa. Déduire du cercle de Mohr l'état de contraintes sur un plan incliné faisant un angle  $\alpha = 20^\circ$  avec l'axe  $ox$ .

### Solution

Cet état de contrainte est dessiné sur le plan physique et le cercle de Mohr suivants :





On a :  $R = \sigma_x$

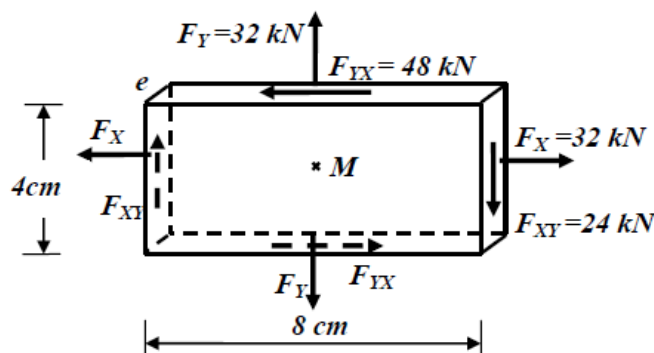
$$\sigma_\alpha = R \cos 40^\circ = 38,3 \text{ MPa}$$

$$\tau_\alpha = R \sin 40^\circ = 32,1 \text{ MPa}$$

**Exercice 5.2**

Soit une plaque rectangulaire d'une épaisseur  $e = 2\text{mm}$ , sollicitée comme la montre la figure ci-dessous.

- 1- Déterminer et dessiner l'état de contrainte en un point M de la plaque sur deux plans perpendiculaires.
- 2- Dessiner le cercle de Mohr de cet état de contrainte.
- 3- En déduire les valeurs et les directions des contraintes principales et les dessiner dans un plan physique.
- 4- En déduire les valeurs et les directions des contraintes tangentiels extrêmes et la contrainte normale correspondante et les dessiner dans le même plan physique précédant.
- 5- En déduire l'état de contrainte sur un plan dont la normale fait un angle de  $45^\circ$  avec l'axe des x.



**Solution**

1- L'état de contrainte est déterminé de la manière suivante :

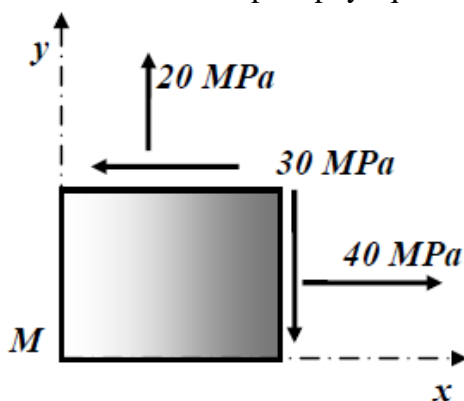
$$\sigma_x = \frac{F_x}{A_{xy}} = \frac{32}{0,2 \times 4} = 40 \text{ kN/cm}^2$$

$$\tau_{xy} = \frac{F_{xy}}{A_{xy}} = \frac{24}{0,2 \times 4} = 30 \text{ kN/cm}^2$$

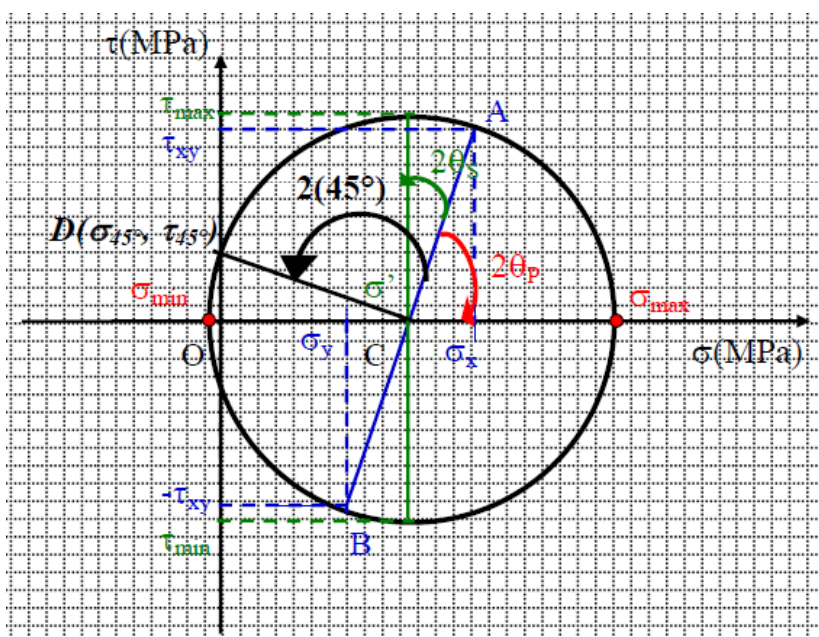
$$\sigma_y = \frac{F_y}{A_{yx}} = \frac{32}{0,2 \times 8} = 20 \text{ kN/cm}^2$$

$$\tau_{yx} = \frac{F_{yx}}{A_{yx}} = \frac{48}{0,2 \times 8} = 30 \text{ kN/cm}^2$$

L'état de contrainte ainsi obtenu est dessiné sur le plan physique ci-dessous :



2- Tracé du cercle de Mohr



## 3- Contraintes principales

$$\sigma_{max} = \overline{OC} + R = 30 + 31,6 = 61,6 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{min} = \overline{OC} - R = 30 - 31,6 = -1,6 \text{ MPa}$$

$$2\alpha_p = -71,6^\circ \Rightarrow \alpha_p = -35,8^\circ$$

## 4- Contraintes tangentielles extremums :

$$\tau_{max} = +R = 31,6 \text{ MPa}$$

$$\tau_{min} = -R = -31,6 \text{ MPa}$$

$$2\alpha_s = 18,4^\circ \Rightarrow \alpha_s = 9,2^\circ$$

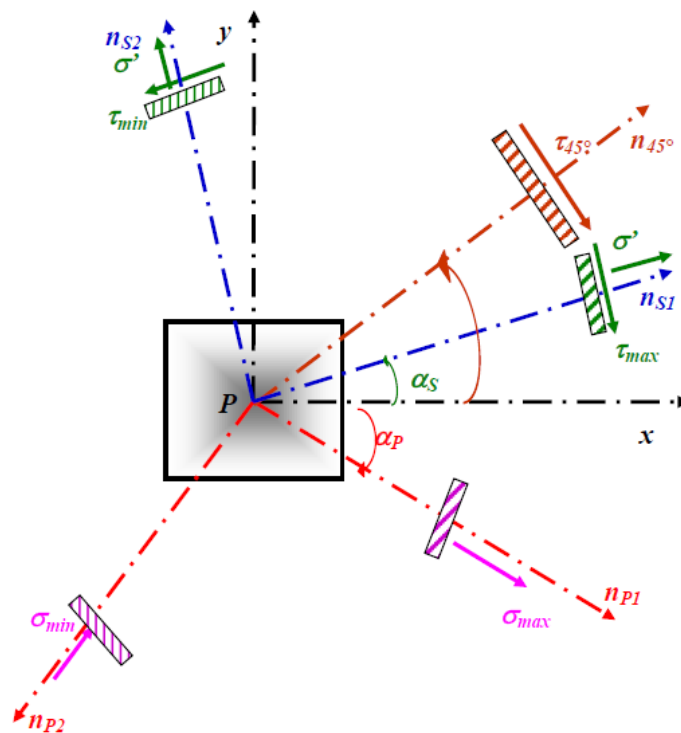
$$\sigma' = \overline{OC} = 30 \text{ MPa}$$

## 5- Etat de contrainte sur un plan incliné

On détermine le point  $D(\sigma_\alpha, \tau_\alpha)$  avec  $\alpha = 45^\circ$  sur le cercle de Mohr

$$\sigma_\alpha = \sigma_{45^\circ} = 0$$

$$\tau_\alpha = \tau_{45^\circ} = 10 \text{ MPa}$$



**Exercice 5.3**

Une plaque rectangulaire en acier ayant les dimensions  $L = 800 \text{ mm}$ ,  $b = 400 \text{ mm}$  et  $t = 20 \text{ mm}$  est sollicitée par des contraintes normales  $\sigma_x = 60 \text{ N/mm}^2$  et  $\sigma_y = -18 \text{ N/mm}^2$ .

Sachant que  $E = 2.105 \text{ N/mm}^2$  et  $\nu = 0.3$  déterminer la déformation  $\Delta t$  et la variation du volume  $\Delta V$ .

**Solution**

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta t}{t} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

Puisque  $\sigma_z = 0$  ;

$$\frac{\Delta t}{t} = \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$$

$$\rightarrow \varepsilon_z = -\frac{0.3}{2 \times 10^5}(60 - 18) = -6.3 \times 10^{-5}$$

$$\frac{\Delta b}{b} = \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}\sigma_x = 0.5 \times 10^{-5}[-18 - (0.3 \times 60)] = -1.8 \times 10^{-4}$$

$$\frac{\Delta L}{L} = \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}\sigma_y = 0.5 \times 10^{-5}[60 + (0.3 \times 18)] = 3.27 \times 10^{-4}$$

D'où ;

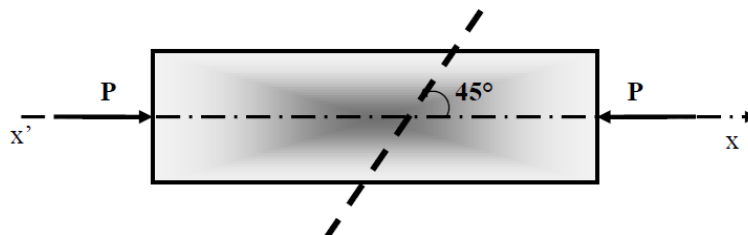
$$\frac{\Delta V}{V} = (3.27 - 1.8 - 0.63) \times 10^{-4} = 0.84 \times 10^{-4}$$

$$\rightarrow \Delta V = 400 \times 800 \times 20 \times 0.84 \times 10^{-4} = 537.6 \text{ mm}^3$$

**5.8 Exercices à résoudre****Exercice 5.1**

Une barre courte en béton de section droite  $20 \times 20 \text{ cm}$  est comprimée par une force  $P$ .

- Quelle est la valeur de cette force, si la contrainte normale sur une facette, inclinée d'un angle de  $45^\circ$  par rapport à l'axe des  $x$ , est égale à  $-15 \text{ kg/cm}^2$  ?



**Exercice 5.2**

L'état de contrainte sur deux plans perpendiculaires de normales  $ox$  et  $oy$  est défini comme suivant:

$$\bar{\Gamma}(O, \bar{x}) = \begin{cases} -80 \text{ MPa} \\ 60 \text{ MPa} \end{cases} ; \quad \bar{\Gamma}(O, \bar{y}) = \begin{cases} -60 \text{ MPa} \\ 40 \text{ MPa} \end{cases}$$

- 1- Dessiner cet état de contrainte dans un plan physique.
- 2- Dessiner le cercle de *Mohr* de cet état de contrainte.
- 3- Dédurre du cercle de *Mohr* les valeurs et les directions des contraintes principales puis les représenter dans un plan physique.
- 4- Dédurre du cercle de *Mohr* les valeurs et les directions des contraintes tangentielles extremum et des contraintes normales correspondantes, puis les représenter dans le même plan physique précédent.

**Exercice 5.3**

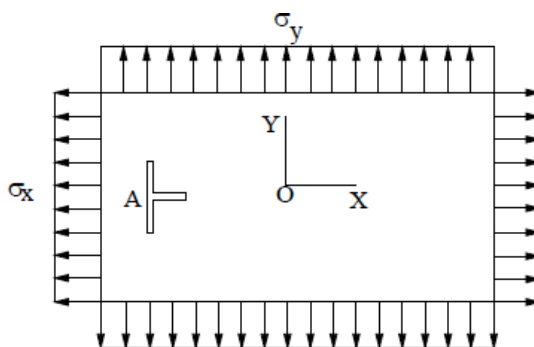
Un élément unitaire sur un corps sollicité par des forces extérieures subit les déformations suivantes:

$$\varepsilon_x = 230 \times 10^{-6}, \quad \varepsilon_y = 510 \times 10^{-6}, \quad \text{et} \quad \gamma_{xy} = 180 \times 10^{-6}.$$

Calculer les déformations d'un élément orienté de  $40^\circ$ .

**Exercice 5.4**

Une plaque rectangulaire mince en acier est soumise à des contraintes normales uniformes  $\sigma_x$  et  $\sigma_y$ . On mesure les déformations relatives  $\varepsilon_x = 0.001$  et  $\varepsilon_y = -0.0007$  respectivement suivant  $x$  et  $y$  à l'aide d'une jauge électrique attachée au point A comme l'indique la figure ci-dessous. Sachant que  $E = 2.07 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$  et le coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ , déterminer les contraintes  $\sigma_x$  et  $\sigma_y$ .



# Conclusion générale

*Le présent polycopié est le fruit de trois années de travail et de mise en forme. Inspiré de plusieurs ouvrages dans le domaine de Génie civil et de Génie Mécanique, il a été conçu pour s'harmoniser avec les besoins d'ingénieurs Géotechniciens plus particulièrement.*

*Après une petite introduction sur la résistance des matériaux et son utilité dans plusieurs domaines (Génie Civil, Génie Mécanique, Hydraulique, etc...), l'étudiant est capable de modéliser des structures réelles pour étudier leur stabilité.*

*D'autre part, une partie de cet ouvrage a été enrichi par les sollicitations simples les plus utilisées dans le calcul des contraintes normales et tangentielles (traction, compression et cisaillement).*

*L'utilité de la flexion simple dans le calcul des déformations (flèche) lui a consacré tout un chapitre avec des exemples et exercices d'application.*

*Et enfin, l'ingénieur Géotechnicien qui a bénéficié de ce cours, sera capable de modéliser des cas d'études réels (talus, murs de soutènement, glissement de terrains, etc...) en se basant sur l'état de contraintes et de déformations présenté dans le dernier chapitre.*

*Chaque chapitre a été enrichi par des exemples et exercices résolus et des exercices supplémentaires non résolus pour examiner la compréhension des étudiants ciblés par cet ouvrage.*

# Références bibliographiques

- Alexandru D.C.** *Quelques chapitres de la résistance des matériaux*. Ed. OPU, Alger, 267p.
- Anisimov A.** *Calcul des barres dans le cas de sollicitation composée (Partie 1 de RDM II)*. Ed. OPU, Alger, 1993, 111p.
- Bastien, J.** *Résistance Des Matériaux : Introduction au calcul des structures*. Université de Technologie Belfort-Monbeliard, 2014, 261p.
- Benamara, N., et Moussaoui, A.**, *Cours de Résistance des Matériaux II*, Département de Génie Civil, Institut Supérieur des Etudes Technologiques de Gafsa, 2018, 87p.
- Bourahla, N.**, *Résistance des matériaux de base*, Edition GECOTEC.
- Case J., Chilver L., Ross C.T.F.** *Strength of Materials and Structures*. Ed. John Wiley & Sons Inc., New York, 1999, 699p.
- Damien A.** *Cours, TD, TP de Résistance Des Matériaux*. Novembre 2020.
- Del Pedro M., Gmür T., Botsis J.** *Introduction à la mécanique des solides et structures*. PPUR presses polytechniques et Universitaires Romandes, CH-1015 Lausanne, 2004 - 313p.
- Delaplace A., Gatuingt F., Ragueneau F.** *Mécanique des structures : Résistance des matériaux*. Dunod, Paris, 2008.
- Dias da Silva V.** *Mechanics and strength of materials*. Ed. Springer, New York, 2006, 529p.
- Haricahne, Z.** *Polycopié de Résistance Des Matériaux*. Département de Génie Civil, Université Hassiba Benbouali Chlef, 2015, 122p.
- Mott R.L.** *Applied Strength of Materials*. Ed. Prentice Hall, New Jersey, 1990, 559p
- Mott R.L.** *Solution manual to accompany Applied Strength of Materials*. Ed. Prentice Hall, New Jersey, 2002, 235p
- Nash W.A.** *Theory and problems of strength of materials*. 4<sup>th</sup> Ed. McGraw-Hill, New York, 1998, 474p.
- Patnaik S.N., Hopkins D.A.** *Strength of materials: A unified theory*. Ed. Elsevier, USA, 2004, 750p.
- Richard Liew J.Y., Shanmugam N.W., Yu C.H.** *Structural Analysis*. in *Structural Engineering Handbook*. Ed. Chen Wai-Fah Boca Raton: CRC Press LLC, 1999, 189p.
- Timoshenko S.** *Résistance des matériaux – Tome 1: Théorie élémentaire et problèmes*. 3<sup>ème</sup> Ed. Dunod, Paris, 1968, 420p.
- Timoshenko S.** *Résistance des matériaux – Tome 2: Théorie développée et problèmes*, Dunod, Paris, 1968. 3<sup>ème</sup> Ed. Dunod, Paris, 1968, 464p.