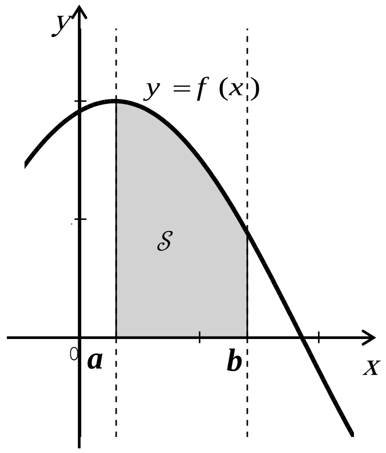
التكامل وبعض طرق حسابه

مفهوم التكامل نسمى **التكامل** من a إلى b للدالة f ، الحيز الجبري للسطح المحدد بالمنحنى الممثل لـ f ومحور الفواصل والمستقيمين : $x=a$ و $x=b$. نرمز له بالرمز $\int_a^b f(x)\,dx$

تكامل دالة مستمرة f دالة مستمرة على مجال I من $\mathbb{R}$ ، و F دالة أصلية لـ f على I . a و b من I .

التكامل من a إلى b للدالة f، هو العدد: $\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$

- الدوال المستمرة على مجال من الشكل $[a,b]$ تقبل المكاملة.



نتيجة إذا كانت f مستمرة على I ، فإن f تقبل دالة أصلية على I.

وإذا أخذت دالة أصلية لـ f القيمة y_0 من أجل القيمة x_0 للمتغير من I، فإن هذه الدالة الأصلية تكون وحيدة.

- في معلم كيفي، المساحة $\mathcal{S}$ المحددة بمنحنى $y=f(x)$ ومحور الفواصل والمستقيمين $x=a$ و $x=b$، تُعطى بالعلاقة $\mathcal{S}=\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$

نظرية المتوسط f دالة مستمرة على المجال $[a,b]$،

فهي تبلغ حضيضها وذروتها على هذا المجال : m و M . فيكون : $m \le f(x) \le M$ ،

ومنه $m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$. وبالتالي : $m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le M$

وحسب نظرية القيم المتوسطة، فإنه توجد نقطة c من المجال $]a,b[$ بحيث: $f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$

تسمى c **بالقيمة المتوسطة** لـ f على $[a,b]$.

خواص الدوال القابلة للمكاملة

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda\int_a^b f(x)\,dx$$

$$f \le g \ \Rightarrow\ \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

$$a<b \qquad \int_a^b |f(x)|\,dx \le \left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$$

مشتق تكامل إذا كانت f دالة مستمرة و $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ ، فإنه يكون $\frac{F(x)-F(x')}{x-x'} = \frac{1}{x-x'}\int_x^{x'} f(t)\,dt$

حسب نظرية المتوسط، فأنه يوجد c يكون محصورا بين x و x' : $f(c)=\frac{F(x)-F(x')}{x-x'}$

وبالمرور على النهاية عندما $x' \to x$ ينتج: $\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x)$

- **دراسة الدالة** $F(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt$. $F(x)$ معرفة تماما لأن الدالة $f(x)=e^{-t^2}$ معرفة ومستمرة على $\mathbb{R}$ ،

من جهة أخرى $F'(x)=f(x)$ مهما كان x من $\mathbb{R}$ ، وبالتالي الدالة $F(x)$ تكون متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ ، ولدينا:

$$\forall x \geq 1, \quad F(x)=F(1)+\int_1^x e^{-t^2}dt$$

وبما أن $e^{-t^2} \leq e^{-t}$ مهما كان $1 \leq t$. فإن $\forall x \geq 1, \quad F(x) \leq F(1)+\int_1^x e^{-t}dt \leq F(1)+\frac{1}{e}$

إذن الدالة متزايدة F ومحدودة من الأعلى، فهي تقبل نهاية (منتهية) عند $(+\infty)$

بعض طرق حساب التكامل

- **الدالة الأصلية،** (إذا عُلمت): نسمي دالة أصلية للدالة f المعرفة على المجال I من $\mathbb{R}$. كل دالة F تقبل الاشتقاق على I بحيث : $F'(x)=f(x) \quad \forall x \in I$

إذا كانت F أصلية لـ f ، فإن كل الدوال من الشكل $F+\lambda$ هي أيضا دوال أصلية لـ f حيث λ ثابت حقيقي

ليكن c عدد كيفي من المجال $[a,b]$. نعتبر الدالة $F(x)=\int_c^x f(t)\,dt$. إذا قبلت F الاشتقاق على المجال $[a,b]$،

فهي الدالة الأصلية لـ f التي تنعدم من أجل $x=c$.

- في التكامل $F(x)=\int_\alpha^x \frac{dt}{1+t^2}$ ، نلاحظ أن الدالة $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ مستمرة على $\mathbb{R}$ ، و F تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ،

ولدينا $\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x)=f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ ولدينا أيضا $\forall x \in \mathbb{R}, \quad F''(x)=f'(x)=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$

$$\int \frac{1}{9-x^2}dx=\int \frac{1}{(3-x)(3+x)}dx=\frac{1}{6}\int\left(\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x-3}\right)dx=\frac{1}{6}\left(\ln(x+3)-\ln(x-3)\right)+c$$

$$\int 3x\sqrt{1-2x^2}dx=-\frac{3}{4}\int\left(1-2x^2\right)^{1/2}(-4x)dx=-\frac{1}{2}\left(1-2x^2\right)^{3/2}+c$$

- **بتبديل المتغير** إذا كانت g رتيبة وتقبل للاشتقاق، واعتبرنا مثلا التحويل: $x=g(t); \ \alpha=g(\alpha); \ b=g(\beta)$

يكون $\int_a^b (t)\,dt=\int_\alpha^\beta f\left(g(t)\right).g'(t)\,dt$

- لنحسب التكامل $\int \frac{2x}{(1-x^2)^2}dx$. من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $u(x)=(1-x^2) \Rightarrow u'(x)=2x$

ومنه $\int \frac{2x}{(1-x^2)^2}dx=\int \frac{u'(x)}{u^2(x)}dx$ ، وبما أن $\frac{u'}{u^2}$ هي الدالة الأصلية للدالة $-\frac{1}{u}$ ، نحصل على :

$$\int \frac{2x}{(1+x^2)^2}dx=-\frac{1}{1+x^2}+c$$

- في التكامل $\int_{-1}^0 x\sqrt{1-x}\,dx$. نستخدم التحويل $u=1-x$ ، فيكون $du=-dx$

من أجل $x=-1$ نجد $u=2$. و من أجل $x=0$ يكون $u=1$

$$\int_{-1}^0 x\sqrt{1-x}\,dx=\int_2^1(1-u)\sqrt{u}\,(-du)=\int_1^2(\sqrt{u}-u\sqrt{u})du=\frac{-4(\sqrt{2}+1)}{15}$$

- في التكامل $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x+3}}$ ، نستخدم التحويل : $t=\sqrt{x+3} \Leftrightarrow t^2=x+3 \Leftrightarrow x=t^2-3, \quad (t \geq 0)$

$x = t^2 - 3 \Rightarrow dx = 2t\,dt$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+3}} dx = \int \frac{(t^2-3)}{3} 2t\,dt = 2\int (t^2-3)\,t\,dt = 2\left(\frac{t^2}{3} - 3t\right) + c$$

نعبر عن النتيجة بدلالة x : $\int \frac{x}{\sqrt{x+3}} dx = 2\left(\frac{t^3}{3} - 3t\right) + k = 2\left(\frac{(\sqrt{x+3})^3}{3} - \sqrt{x+3}\right) + c$

التكامل بالتجزئة F و G أصليتان لـ f و g : $f(x)$

$$\int F(x)\cdot g(x)\,dx = F(x)\cdot G(x) - \int f(x)\cdot G(x)\,dx$$

- $\int x e^x dx = xe^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + c$
- $\int \ln(x-1)\,dx = x\ln(x-1) - \int \frac{x}{x-1} dx = x\ln(x-1) - \ln(x-1) - x + c$
- $\int x^2 \ln x\,dx = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \int \frac{1}{3}x^2 dx = \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{9}x^3 + c$

تكاملات بعض الدوال المألوفة لتكن $F(x)$ دالة أصلية لـ $f(x)$.

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
$x^n\ (n \neq 1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x \rvert$	e^x	$\frac{1}{a} e^{ax}$
$\sin ax$	$-\frac{1}{a}\cos ax$	$\cos ax$	$\frac{1}{a}\sin ax$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$

توسيع مفهوم التكامل f و g دالة معرفتان على $[a, +\infty[$ حيث: $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

إذا وُجدت النهاية $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ ، نقول أن التكامل $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ متقاربا.

- **مجموعة تعريف الدالة:** $F(x) = \int \frac{dx}{e^x - 1}$ ، **وحساب** $F(x)$ **واستنتاج** $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{e^x-1}$.

مجموعة تعريف $F(x)$ هي $\mathbb{R}^*$. بوضع $t = e^x - 1$ يكون $x = \ln(t+1)$ ، ومنه $dx = \frac{dt}{t+1}$

إذن $\int \frac{dx}{e^x - 1} = \int \frac{dt}{t(t+1)}$ ، وبكتابة العبارة $\frac{1}{t(t+1)}$ بالشكل $\frac{a}{t} + \frac{b}{t+1}$ ، نجد $a = 1, b = -1$

ومنه $\int \frac{dt}{t(t+1)} = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right) dt = \ln\lvert t \rvert - \ln\lvert t+1 \rvert + c = \ln\left\lvert \frac{t}{t+1} \right\rvert + c = F(x) = \ln\left\lvert \frac{e^x - 1}{e^x} \right\rvert + c$

من جهة أخرى، لدينا بالتعريف $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{e^x - 1} = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{dx}{e^x - 1}$

لنحسب التكامل المحدود $\int_1^t \frac{dx}{e^x - 1} = \left[\ln \frac{e^x - 1}{e^x}\right]_1^t = \ln\frac{e^t - 1}{e^t} - \ln\frac{e-1}{e}$

ومنه $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{e^x-1} = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{dx}{e^x - 1} = \lim_{t\to+\infty} \left(\ln\frac{e^t - 1}{e^t} - \ln\frac{e-1}{e}\right)$

وأخيرا $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{e^x-1} = \lim_{t\to+\infty} \left(\ln\left(1 - \frac{1}{e^t}\right) - \ln\frac{e-1}{e}\right) = 1 - \ln(e-1)$