جامعة الجيلالي بونعامة - خميس مليانة

معهد العلوم الاقتصادية **السنة الأولى جذع مشترك LMD** **المجموعتان : 1 و 3** **(2022/2021)**

الرياضيات 1 **سلسلة تمارين رقم: 01**

تمرين رقم 1

لتكن E مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$. أوجد إن أمكن الحد الأعلى sup والحد الأدنى inf والعنصر الأكبر max والعنصر الأصغر min للمجموعة E في الحالات الآتية :

$E=[-1;2]$ ، $E=]-1;2]$ ، $E=]-1;2[\cup[3;4[$ ، $E=\left\{\frac{1}{n},\ n\in\mathbb{N}^*\right\}$ ، $E=\left\{2-\frac{1}{n},\ n\in\mathbb{N}^*\right\}$

تمرين رقم 2

1. أثبت أن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها العام على $\mathbb{N}^*$ بـ : $u_n=\frac{n^2+n+9}{n}$ بأنها محدودة من الأسفل.
2. أثبت أن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها العام على $\mathbb{N}$ بـ : $u_n=\frac{2n^2+1}{n^2+4}$ بأنها محدودة من الأعلى بالعدد 2.

تمرين رقم 3

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها العام : $u_n=\frac{1}{(2n+1)\cdot(2n+3)}$

1. بين أن (u_n) متناقصة وتنتهي إلى الصفر.
2. عين العددين a و b بحيث $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=\frac{a}{2n+1}+\frac{b}{2n+3}$
3. جد المجموع $S_n=u_0+u_1+...+u_n$ بدلالة n واستنتج نهاية S_n.

تمرين رقم 4

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم بالشكل :

$$u_n=\ln(1+1)+\ln(1+\frac{1}{2})+...+\ln(1+\frac{1}{n})$$

1. بين أن (u_n) متزايدة
2. أكتب u_n بعبارة مختصرة
3. هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟

تمرين رقم 5

أحسب، عندما تتقارب، نهاية u_n في الحالات الآتية:

$(-2)^n+\frac{1}{3^n}$ ، $2^n-3^{n+1}+n^{10}$ ، 2^n-n^2 ، $n+\sqrt[3]{1-n^3}$ ، $n-\sqrt{n^2-n}$

تمرين رقم 6

بين أن كل من المتتاليات المعرفة من أجل $1\leq n$ ، تقبل نهايات يُطلب حسابها:

$u_n=\frac{n}{n^2+1}$ ، $u_n=\frac{1}{n^2+1}$ ، $u_n=\frac{n}{n+1}$ ، $u_n=\frac{n+1}{n}$

تمرين رقم 7

أدرس تقارب المتتالية: $u_n=\sqrt{1+u_{n-1}}$ مع $u_0=\sqrt{3}$.

تمرين رقم 8

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بالشكل : $u_n=\ln(1+u_{n-1})$ مع $u_0\geq 0$. أحسب نهاية u_n.

تمرين رقم 9

أ) نعرف المتتالية التدريجية (u_n)، بالشكل:

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ 3u_{n+1} = u_n + 4, \quad n \geq 0 \end{cases}$$

1. أحسب u_1 و u_2. ما هي النهايات الممكنة لـ (u_n) ؟
2. أثبت أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ يكون لدينا: $2 \leq u_n$.
3. بين أن المتتالية (u_n) متناقصة مهما كان $n \in \mathbb{N}$.
4. أستنتج أن (u_n) متقاربة، ثم أحسب نهايتها.

ب) نضع من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $\quad v_n = u_n - 2$

1. بين أن (v_n) متتالية هندسية. واستنتج عبارة v_n بدلالة n. هل (v_n) متقاربة ؟
2. ليكن $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ و $T_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

عين عبارة S_n، ثم عبارة T_n بدلالة n. ثم أحسب $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ و $\lim\limits_{n\to\infty} T_n$

تمرين رقم 10

نعرف المتتالية التدريجية (u_n)، حيث :
$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{3}{2} \\ u_n = \dfrac{2}{3 - u_{n-1}} \quad ; \ n \geq 1 \end{cases}$$

1. ما هي النهايات الممكنة لـ (u_n) ؟
2. أثبت بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، يكون لدينا $1 \leq u_n \leq 2$.
3. بين أن (u_n) متناقصة، واستنتج أنها متقاربة.

تمرين رقم 11

نعرف المتتالية التدريجية (u_n)، حيث :
$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = u_n^2 + \dfrac{3}{16} \quad ; \ n \geq 1 \end{cases}$$

1. برهن أن : $\forall n \in \mathbb{N}, \ \dfrac{1}{4} \leq u_n \leq \dfrac{3}{4}$
2. بين أن (u_n) متناقصة تماما، واستنتج أنها متقاربة نحو عدد حقيقي ℓ يُطلب تعيينه.

تمرين رقم 12

لتكن (u_n) و (v_n) و (w_n) ثلاثة متتاليات معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}\left(u_n + 2v_n\right) \end{cases} ، \quad \begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \frac{1}{4}\left(u_n + 3v_n\right) \end{cases} ، \quad w_n = u_n - v_n$$

1. بين أن (w_n) متتالية هندسية، يُطلب تحديد أساسها وحدها الأول. ثم أحسب $\lim\limits_{n\to\infty} w_n$.
2. بين أن (u_n) و (v_n) متجاورتان، ولهما نفس النهاية ℓ (لا يُطلب حساب ℓ في هذا السؤال).
3. نعتبر المتتالية (C_n) المعرفة بالشكل : $\forall n \in \mathbb{N}, \ C_n = 3u_n + 8v_n$

أثبت أن (C_n) متتالية ثابتة، واستنتج النهاية ℓ.