

المتتاليات العددية

نسمي متتالية منتهية بـ p حد، كل دالة عددية معرفة على الأعداد الطبيعية الأولى $n=1,2,\dots,p$ ، وإذا كانت هذه الدالة معرفة على كل الأعداد الطبيعية، نقول عن المتتالية المرفقة بأنها غير منتهية. نستخدم $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ لتمثيل المتتالية (غير المنتهية) $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ ، حيث u_n : قيمة الحد من الرتبة n .

متتاليات رتيبة - (u_n) متزايدة $\Leftrightarrow \forall n, u_{n+1} \geq u_n$ - (u_n) متزايدة تماما $\Leftrightarrow \forall n, u_{n+1} > u_n$
 - (u_n) ثابتة $\Leftrightarrow \forall n, u_{n+1} = u_n$ - (u_n) متناقصة أو متزايدة.

متتاليات حسابية وهندسية: متتالية حسابية: (u_n) متتالية حسابية إذا تحقق $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$.

الحد العام: $u_n = u_0 + r \cdot n$ مجموع الحدود الأولى: $S_n = (n+1) \cdot \frac{u_0 + u_n}{2}$

متتالية هندسية: (u_n) متتالية هندسية إذا تحقق $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = q \cdot u_n$

الحد العام: $u_n = u_0 \times q^n$. إذا كان $q = 0$ ، فإن u_n يكون معدوماً؛ ربما ليس كذلك من أجل $n = 0$.

وإذا كان $q = 1$. تكون كل الحدود متساوية. مجموع الحدود الأولى: $S_n = u_0 \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ حيث: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n - 1}, \quad n \geq 2 \end{cases}$ بوضع $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n}$

- بين أن (v_n) متتالية هندسية؛ جد أساسها واكتب حدها العام.
- أكتب u_n بدلالة n ، ثم احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n$
- ادرس u_n في الحالتين $u_1 = 0, u_1 = -1$.

■ لدينا $v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 3}{u_{n+1}} = 1 - \frac{3}{u_{n+1}} = 1 - \frac{3}{\frac{2u_n}{u_n - 1}} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2u_n} = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{3}{u_n} \right) = -\frac{1}{2} v_n$

ومنه المتتالية (v_n) هندسية؛ أساسها $-\frac{1}{2}$ وحدها الأول -2 . $v_1 = \frac{u_1 - 3}{u_1} = -2$

■ عبارة v_n بدلالة n : $v_n = (-2) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ومنه عبارة u_n : $u_n = \frac{3}{1 - v_n}$ $\Leftrightarrow v_n = \frac{u_n - 3}{u_n}$

ومنه $u_n = \frac{3}{1 - v_n} = \frac{3}{1 - 4(-1/2)^n}$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{1 - 4(-1/2)^n} = 3$

■ الحالة $u_1 = 0$: المتتالية (v_n) ليس لها معنى. لكن (u_n) ثابتة، ومساوية للصفر $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 0$.

■ الحالة $u_1 = -1$: المتتالية (v_n) هندسية، حدها الأول 4 وأساسها $-\frac{1}{2}$ ؛ وحدها العام:

■ $v_n = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -8 \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ ، ومنه $u_n = \frac{3}{1 - 8(-1/2)^n}$ ، و (u_n) متقاربة نحو 3.

الحواد: A جزء من \mathbb{R} . نقول عن $M \in \mathbb{R}$ أنه حاد من الأعلى لـ A ، إذا تحقق $\forall x \in A, x \leq M$

وإذا كان M حاد من الأعلى لـ A بحيث $A \ni M$ فإن M يُسمى **العنصر الأعظمي** لـ A . ونرمز له بالرمز $\max(A)$
ملاحظة: العنصر الأعظمي إن وُجد فهو وحيد. مثلا المجموعة $\{3\} \cup [1, 2]$ محدودة.

الحد الأعلى لتكن A جزء من \mathbb{R} . نقول عن μ أنه حد أعلى لـ A ، ونكتب $\mu = \sup(A)$ ، إذا تحقق:

$$\forall x \in A, x \leq \mu, \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, \mu - \varepsilon < a$$

بمعنى أن μ هو حاد من الأعلى لـ A ، ومن أجل كل عدد حقيقي أصغر تماما من μ ومكتوب بالشكل $\mu - \varepsilon$ ، مع $\varepsilon > 0$ سوف لن يكون حادا من الأعلى لـ A .

ملاحظة: إذا وُجد $\max(A)$ ، فإن $\sup(A) = \max(A)$.

وإذا كان $\sup(A) \in A$ ، فإن $\max(A)$ موجود: $\sup(A) = \max(A)$

تعريف مشابه للحد الأدنى $\min(A)$ والعنصر الأصغري $\inf(A)$ لمجموعة A .

متتاليات محدودة: يكون العدد M حاد من الأعلى للمتتالية (u_n) ، عندما يتحقق $u_n \leq M$ من أجل كل u_n ،

ويسمى أصغر الحواد العليا بالحد الأعلى للمتتالية. وعندئذ نقول عن المتتالية (u_n) بأنها محدودة من الأعلى.

وإذا وجدت أكبر قيمة لـ u_n تساوي a (الحد الأعلى)، فإن هذه القيمة هي ذروة المتتالية. تعريف يخص المحدودية من الأدنى.

وتكون المتتالية (u_n) **محدودة**، إذا كانت محدودة من الأعلى ومن الأدنى. أي إذا وجد عدد C : $\forall n, |u_n| \leq C$

المتتالية $\left(\frac{1}{n}\right)$ محدودة بـ 0 و 1. و $u_n = 2 - n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) : حدها الأعلى 1، لكنها ليست محدودة من الأدنى.

نهاية متتالية: يكون العدد l نهاية للمتتالية (u_n) ، ونكتب $\lim u_n = l$ أو $l \leftarrow u_n$ ؛ عندما يكون، من أجل كل عدد

$$0 < \varepsilon, \text{ يوجد } n, \text{ بحيث يكون لدينا ابتداء من هذه المرتبة: } l - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon.$$

أو بعبارة أخرى إذا كان من أجل كل عدد $0 < \varepsilon$ ، تكون كل حدود المتتالية (u_n) باستثناء عدد منته منها تحقق

$$\text{المتراجحتين } l - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon, \text{ أو تحقق } |u_n - l| < \varepsilon.$$

- عندما تقبل متتالية نهاية نقول عنها بأنها **متقاربة**، وتكون متباعدة بخلاف ذلك.

- مثلا في المتتالية $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ، $0 \leftarrow$ ، إذا رمزنا بـ n للمرتبة الأولى الأكبر من $\frac{1}{\varepsilon^2}$ ، فإنه يكون لدينا ابتداء من هذه

$$\text{المرتبة } \varepsilon^2 < \frac{1}{n} \text{ وبالتالي } -\varepsilon < u_n < +\varepsilon \text{ والمتتالية } (u_n) \text{ متقاربة نحو الصفر.}$$

متتاليات متقاربة - كل متتالية تقبل نهاية واحدة على الأكثر.

- كل متتالية متقاربة تكون محدودة.

- كل متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى تكون متقاربة.

- إذا كانت (u_n) و (v_n) متقاربتين، وكان $v_n < u_n$ من أجل كل n ، فإن $\lim v_n < \lim u_n$.

- إذا كانت (u_n) و (v_n) متقاربتين، فإن $\lim(u_n - v_n) = 0 \Leftrightarrow \lim u_n = \lim v_n$

- إذا حققت (u_n) : $|u_p - u_q| < h$: $p > k \wedge q > k \Rightarrow \forall h > 0, \exists k \in \mathbb{N}$ تكون متقاربة.

- تؤول المتتالية (u_n) نحو النهاية $+\infty$ إذا تحقق: $\forall h > 0, \exists k \in \mathbb{N}, n > k \Rightarrow u_n > h$
- كل متتالية متزايدة وغير محدودة من الأعلى تكون متباعدة نحو $+\infty$.

عمليات على المتتاليات المتقاربة إذا تقاربت (u_n) و (u'_n) نحو l و l' على الترتيب، فإنه يكون:

$$(\ell' \neq 0) \quad \frac{\ell}{\ell'} \leftarrow \frac{u_n}{v_n} \quad , \quad \ell \cdot \ell' \leftarrow u_n \cdot v_n \quad , \quad \ell \pm \ell' \leftarrow u_n \pm v_n$$

نعتبر المتتالية التدريجية (u_n) ، المعرفة كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = \sqrt{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \end{cases} , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

برهن بأن هذه المتتالية محدودة من الأعلى بـ 2. وبين أنها متزايدة، واستنتج تقاربها.

بالتراجع. من أجل $n=0$ ، يكون لدينا $u_0 = \sqrt{2} < 2$.

$$u_n < 2 \Rightarrow u_n + 2 < 2 + 2 = 4 \Rightarrow \sqrt{u_n + 2} < \sqrt{4} = 2 \quad \text{يكون } u_n < 2$$

ومنه المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بـ 2.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = \sqrt{2+u_n} - u_n = \frac{2+u_n - u_n^2}{\sqrt{2+u_n} + u_n} = \frac{(1+u_n)(2-u_n)}{\sqrt{2+u_n} + u_n} > 0$$

و (u_n) متزايدة لأن > 0 ، فإن (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بـ 2؛ فهي متقاربة. لتكن l نهايتها.

بما أن (u_n) و (u_{n+1}) لهما نفس النهاية l ، فإن l تحقق $l = \sqrt{2+l}$ ومنه $l=2$.

نعتبر المتتالية ذات الحد العام: $v_n = \frac{1}{n!}$ ($\mathbb{N} \ni n$).

1. أحسب $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ وأثبت أن المتتالية (v_n) متناقصة مهما كان $\mathbb{N} \ni n$.

2. أثبت أنه من أجل كل $1 \leq n$ يكون $\frac{v_{n+1}}{v_n} \leq \frac{1}{2}$.

3. استنتج أن $v_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ، $\forall 1 \leq n$. ماذا نقول عن المتتالية (v_n) ؟

1. لدينا: $\forall \mathbb{N} \ni n \quad \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{n+1} \leq 1$. ومنه المتتالية ذات الحدود الموجبة (v_n) ، متناقصة.

2. إذا كان $1 \leq n$ فإن $2 \leq n+1$ ، وبما أن $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{n+1}$ ، فإن $\frac{v_{n+1}}{v_n} \leq \frac{1}{2}$ مهما كان $1 \leq n$.

3. لنثبت صحة الخاصية P_n : $0 \leq v_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ من أجل كل $1 \leq n$.

لدينا P_1 صحيحة. إذا انتقلنا إلى القيمة $1 \leq n$ ، فسيكون لدينا $0 \leq v_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ، أي أن P_n مهما كان $1 \leq n$.

إذن لدينا $0 \leq v_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ، $\forall n \geq 1$ ، وبالمرور على النهاية لما $n \rightarrow +\infty$ ، نستنتج أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

متتاليات مستخرجة : نعتبر المتتالية $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$. لنستخرج الحد الأول u_{n_1} ذي الرتبة n_1 ، ثم الحد الثاني u_{n_2} الذي مرتبته $n_1 < n_2$ ، وهكذا مع بقية الحدود؛ وبذلك نحصل على المتتالية المستخرجة (غير المنتهية):

$$v_1 = u_{n_1}, v_2 = u_{n_2}, \dots, v_n = u_{n_n}, \dots$$

- في كل متتالية محدودة، يمكن استخراج متتالية جزئية متقاربة.
- في كل متتالية عددية، توجد متتالية مستخرجة تكون إما متزايدة، وإما متناقصة، وإما ثابتة.
- إذا آلت متتالية إلى نهاية معلومة، فإن أية متتالية مستخرجة منها ستؤول إلى نفس النهاية.

مثلا: تؤول المتتاليات $\left(\frac{1}{n}\right)$ و $\left(\frac{1}{2n}\right)$ و $\left(\frac{1}{3n}\right)$ إلى نفس النهاية، وهي الصفر.

متتاليات متجاورة تكون المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتين إذا تحقق ما يلي:

- (u_n) متزايدة و (v_n) متناقصة؛ أو بالعكس،
- $\forall n \quad u_n \leq v_n \Rightarrow u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n$
- $\lim (u_n - v_n) = 0$

متتاليات تدريجية : f دالة عددية، نُعرف المتتالية (u_n) بإعطاء حدها الأول u_0 وعلاقة التدرج $u_n = f(u_{n-1})$

لدراسة هذا النمط من المتتاليات، ندرس تغيرات f ، ونحدد المجال I الذي يشمل جميع حدود المتتالية (u_n) .

- إذا كانت (u_n) متقاربة وتقبل النهاية l ، فإن المتتالية $f(u_n)$ تكون متقاربة وتقبل النهاية $f(l)$ ، حيث f دالة عددية مستمرة.

- لتكن f دالة عددية مستمرة. إذا كانت المتتالية التدرجية $u_n = f(u_{n-1})$ متقاربة، فإن نهايتها l هي حل للمعادلة $f(x) = x$. وهذا ما يدفع للاستعانة بمنحنى $y = f(x)$ و $y = x$.

- إذا كانت الدالة f متزايدة على مجال I ، فإن المتتالية (u_n) تكون رتيبة. مقارنة بين قيمتي الحدين الأولين منها تدلنا على تناقص أو تزايد المتتالية (u_n) .

بالفعل، إذا ما اعتبرنا $I = [a; b]$ ، وكانت $u_0 \leq u_1$ ، فإن $f(u_0) \leq f(u_1)$. بالتراجع يمكن إثبات أن (u_n) المحدودة من الأعلى بـ b ، تكون متزايدة. فهي إذن متقاربة.

وكذلك إذا كانت $u_0 \geq u_1$ ، فإن $f(u_0) \geq f(u_1)$. ونثبت أيضا بالتراجع إثبات أن (u_n) المحدودة من الأدنى بـ a ، تكون متناقصة. إذن فهي متقاربة.

إذا كانت l هي نهاية (u_n) ، ولكون f مستمرة على I ، فإن $f(u_n)$ ستتقارب نحو $f(l)$.

إذن لدينا $u_n \rightarrow l$ ، ومن العلاقة $u_n = f(u_{n-1})$ والمرور على النهاية، نحصل على المساواة $f(l) = l$.

- إذا كانت f متناقصة على I ، فإن المتتاليتين المستخرجتين (u_{2n+1}) و (u_{2n}) تكونان رتيبتين، وبجهتين متعاكستين. بالفعل، إذا كانت f متناقصة، فإن $f \circ f$ تكون متزايدة. ومنه يكون لدينا:

$$\forall x, y \in I : x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y) \Rightarrow f \circ f(x) \leq f \circ f(y)$$

بتطبيق النظرية السابقة على الدالة $f \circ f$ ، تكون المتتالية $(u_0; u_2 = f \circ f(u_0); u_4 = f \circ f(u_2); \dots)$ رتيبة ومتقاربة، وكذلك المتتالية $(u_1; u_3 = f \circ f(u_1); u_5 = f \circ f(u_3); \dots)$ تكون رتيبة ومتقاربة.

$$\boxed{\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{1+u_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases} \text{ دراسة المتتالية:}}$$

كل حدود u_n موجبة وتنتمي إلى المجال $[0, 1]$:

الدالة f مستمرة على المجال $[0, 1]$: و $\forall x \in [0, 1], f'(x) < 0$ ، ومنه f متناقصة على المجال $[0, 1]$.

حسب النظرية فإن المتتاليتين المستخرجتين (u_{2n}) و (u_{2n+1}) رتيبان وفي اتجاه معاكس:

نلاحظ بأن $u_0 = 0$ ، $u_1 = 1$ ، $u_2 = \frac{1}{2}$ ، ومنه (u_{2n}) متزايدة و (u_{2n+1}) متناقصة.

ولكون (u_n) متقاربة ولتكن l نهايتها، فإن (u_{2n}) و (u_{2n+1}) متقاربتان أيضا نحو نفس النهاية l :

$l = (f \circ f)(l)$ لأن $u_{2(n+1)} = (f \circ f)(u_{2n})$ و $f \circ f$ مستمرة.

$$. \text{ لدينا إذن } l = \frac{1+l}{2+l} \text{ التي تعطي القيمة } l = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$$

$$\boxed{\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}_+ \\ u_{n+1} = \frac{1+u_n^2}{2}, \quad n \geq 0 \end{cases} \text{ نعرف المتتالية التدرجية } (u_n) \text{ بالشكل:}}$$

1. ما هي النهايات الممكنة ل (u_n) ؟

2. بين أن المتتالية (u_n) متزايدة مهما كان $n \in \mathbb{N}$.

3. من أجل $u_0 \in [0, +1]$ ، أثبت أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ يكون لدينا $0 \leq u_n < 1$.

واستنتج أن (u_n) متقاربة. ما هي نهايتها في هذه الحالة ؟

4. من أجل $u_0 < 1$ ، أثبت أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ يكون $1 < u_n$ ، استنتج أن $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$.

1. إذا تقاربت المتتالية (u_n) نحو l ، فإن l يحقق: $l = \frac{1+l^2}{2}$ ، ومنه $l^2 - 2l + 1 = 0$. أي $l = 1$.

2. تزايد المتتالية (u_n) : إذا وضعنا $u_n = x$ و $u_{n+1} = f(x)$ ، سيكون $f(x) = \frac{1+x^2}{2}$.

$$\text{لدينا: } f(x) - x = \frac{1+x^2}{2} - x = \frac{1}{2}(x-1)^2 \geq 0 \text{، ومنه } f(x) - x \geq 0$$

ومنه نستنتج أن المتتالية (u_n) تحقق: $\forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} - u_n \geq 0$. أي (u_n) متزايدة مهما كان $n \in \mathbb{N}$.

3. الدالة $f(x) = \frac{1+x^2}{2}$ معرفة ومستمرة وتقبل الاشتقاق على \mathbb{R} ، حيث: $f'(x) = x$

إذن $f'(x) \geq 0$ ، $\forall x \geq 0$ ، ولدينا: $\inf_{[0, +1]} f = \frac{1}{2}$ و $\sup_{[0, +1]} f = 1$

ومنه $f([0, +1]) \subseteq [\frac{1}{2}, +1] \subseteq [0, +1]$ ، وأخيرا $0 \leq u_n < 1$ ، $\forall n \in \mathbb{N}$.

نتيجة: بما أن (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى، فهي متقاربة. (u_n) تتقارب نحو النهاية $l=1$.

4. بوضع: $u_n = x$ و $u_{n+1} = f(x)$ ، وبما أن $f(x)$ متزايدة، فإنه إذا كان $1 < u_0$ ، يكون: $u_n > 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$;

وتكون المتتالية (u_n) أيضا متزايدة، لكنها لن تكون متقاربة في هذه الحالة، لأننا لو فرضنا أن (u_n) محدودة،

فستصبح (u_n) متقاربة نحو l ($l=1$)، وعندئذ: $u_n > u_0$ $\forall n \in \mathbb{N}$;

بالمرور على النهاية لما $n \leftarrow \infty$ ، يكون: $l > u_0$. لكن $1 < u_0$ ، ومنه $1 < l$.

وهذا يناقض الفرض. إذن المتتالية المتزايدة (u_n) فهي ليست متقاربة. ومنه $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$