

الدوال العددية والاشتقاق

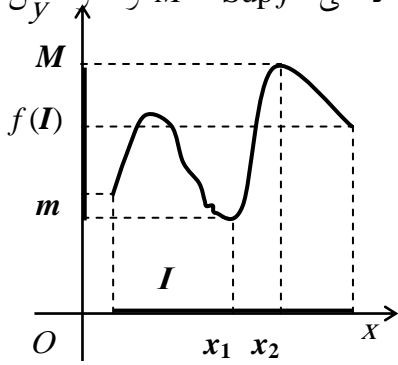
الدالة العددية لمتغير حقيقي: هي الدالة التي مجموعة بدئها \mathbb{R} ، ومجموعة وصولها هي \mathbb{R} .

- **النهاية** ليكن x_0 من $]a, b[$ و f دالة عددية معرفة على $]a, b[$ ، لا تشترط أن تكون f معرفة عند x_0 .
- تعني العبارة "عندما يؤول x إلى x_0 ، تؤول $f(x)$ إلى l " أنه بإعطاء $\varepsilon > 0$ ، يمكن إيجاد $\eta > 0$ يرتبط بـ ε :
 $|x - x_0| < \eta$ ، الذي يضمن $|f(x) - l| < \varepsilon$. ونكتب $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ ، مع x قد يختلف عن x_0 .

الاستمرار إذا افترضنا أن الدالة $f(x)$ المعرفة على المجال $]a, b[$ تقبل، عندما $x \rightarrow x_0$ ، النهاية l (التي قد تختلف عن $f(x_0)$). في حالة العكس $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ نقول أن f مستمرة عند x_0 .

تكون الدالة f مستمرة عند x_0 إذا تحقق: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$ $x_0 \in D_f$

- إذا كانت دالة $f(x)$ مستمرة عند كل نقطة من مجال I من \mathbb{R} ، نقول أن f مستمرة على المجال I .
- كل دالة f مستمرة على مجال مغلق I ، تكون محدودة من الأعلى بجدها الأعلى $M = \text{Sup } f$ ومحدودة من الأدنى بجدها الأدنى $m = \text{Inf } f$.

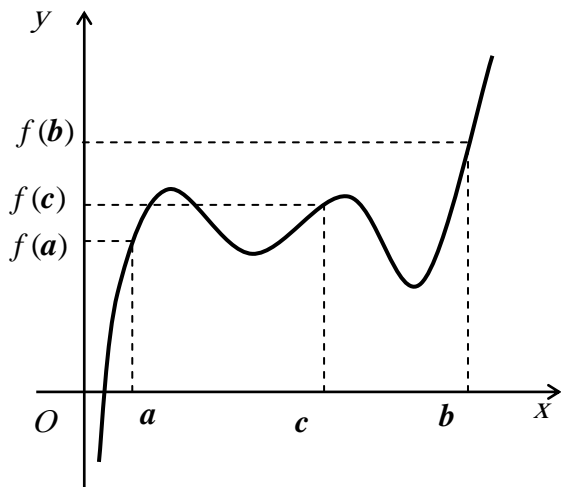


التمديد بالاستمرار الدالة f غير معرفة عند x_0 مع $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & , x \neq x_0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) & , x = x_0 \end{cases} \quad \text{يمكن تمديد } f \text{ بالاستمرار كما يلي :}$$

قضيه ليكن $0 < k$ ، تكون الدالة f مستمرة على $I \subset D_f$.

إذا حققت دالة f على المجال I الشرط الآتي: $\forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$



نظرية القيم المتوسطة

f دالة معرفة ومستمرة على $[a, b]$.

من أجل كل قيمة y محصورة بين $f(a)$ و $f(b)$ ،

توجد قيمة c محصورة بين a و b بحيث $y = f(c)$

نتيجة إذا كانت f معرفة ومستمرة على مجال مغلق ومحدود

$[a, b]$ ، بحيث يكون $f(a)$ و $f(b)$ من إشارتين مختلفتين،

فإن f تنعدم على الأقل عند قيمة c من $]a, b[$.

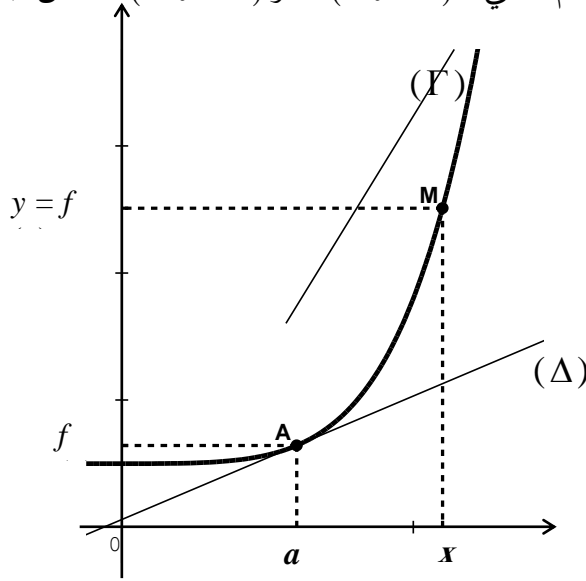
الاشتقاق نفرض أن $f(x)$ مستمرة عند x_0 . إذا افترضنا

أن الدالة $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ غير المعرفة عند $x = x_0$ تقبل نهاية عندما يؤول x إلى x_0 ، نقول أن الدالة $f(x)$ تقبل

الاشتقاق عند النقطة x_0 . تُسمى هذه النهاية العدد المشتق عند x_0 .

f تقبل الاشتقاق عن x_0 \Leftrightarrow وجدت النهاية $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ \Leftrightarrow وجد العدد المشتق $f'(x_0)$.

التفسير الهندسي (Γ) المنحنى الممثل للدالة $f(x)$ في معلم كيني. $A(a; f(a))$ و $M(x; f(x))$ من (Γ)



إذا كان $x \neq a$ فإن $A \neq M$ ،

ويكون معامل توجيه المستقيم AM

هو $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

• إذا كانت الدالة f تقبل للاشتقاق عند النقطة a

فإن AM ينتهي إلى المماس (Δ) لـ (Γ) عند a

الذي معادلته: $y - f(a) = (x - a)f'(a)$ ،

وغير الموازي لمحور الترتيب.

الاشتقاق عن اليمين f دالة معرفة على D . $D \ni x_0$.

f تقبل الاشتقاق عن يمين x_0 \Leftrightarrow وجدت النهاية $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

أي إذا وجد العدد المشتق عن اليمين $f'(x_0^+)$.

• ندرس اشتقاق الدالة g حيث:

$$g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$g(x)$ مستمرة عند الصفر لأن: $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$

بإمكان دراسة تغيرات الدالة الزوجية $g(x)$ على نصف المجال $[0, +\infty[$.

من $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(x)}{x - 0} = 0$ نستنتج أن $g(x)$ تقبل الاشتقاق عند 0. ولدنا: $g'(x) = \begin{cases} \frac{2e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

قضية إذا كانت الدالة f تقبل للاشتقاق عند النقطة a ، فإنها مستمرة عند a . العكس غير صحيح.

الدالة المشتقة f دالة عددية لمتغير حقيقي x من $\mathbb{R} \supset D$.

f تقبل الاشتقاق على D \Leftrightarrow f تقبل الاشتقاق عند أية قيمة x_0 من D .

عمليات على الدوال القابلة للاشتقاق إذا كانت f و g دالتين تقبلان الاشتقاق على مجال I ، فإن

- $f + g$ تقبل الاشتقاق على مجال I ، ولدنا: $\forall x \in I \quad (f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- $f \cdot g$ تقبل الاشتقاق على مجال I ، ولدنا: $\forall x \in I \quad (f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- من أجل كل λ من \mathbb{R} ، λf تقبل الاشتقاق على مجال I ، ولدنا: $\forall x \in I \quad (\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$

- إذا كان $g(x)$ لا ينعدم على I فإن $\frac{f}{g}$ تقبل الاشتقاق على مجال I ، ولدنيا :

$$\forall x \in I \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

الاشتقاق والرتابة f دالة تقبل الاشتقاق على المجال I .

- إذا كان من أجل كل x من I $0 \leq f'(x)$ ، فإن f تكون متزايدة على I .
- إذا كان من أجل كل x من I $0 < f'(x)$ ، فإن f تكون متزايدة تماما على I .
- إذا كان من أجل كل x من I $0 = f'(x)$ ، فإن f تكون ثابتة على I .
- إذا كانت الدالة f تقبل الاشتقاق عند x_0 ، وتبلغ أحد حديها عند x_0 فإن $f'(x_0) = 0$.
- إذا افترضنا أن $f(x_0) = \inf_{x \in I} f(x)$ فسيكون لدينا $\forall x \in I \quad f(x) - f(x_0) \geq 0$ وبما أن f تقبل الاشتقاق عند x_0 ، وبفرض $x - x_0 < 0$ فإن $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$.
- أما إذا كان $x - x_0 > 0$ فإن $f'(x_0) \geq 0$ وينتج في الأخير $f'(x_0) = 0$.
- إذا كان $f'(x_0) = 0$ و f' تغير إشارتها على جانبي x_0 ، فإن f تقبل قيمة حدية عند النقطة x_0 .
- إذا كان $f''(x_0) = 0$ و f'' تغير إشارتها على جانبي x_0 ، فإن f يقبل نقطة انعطاف عند النقطة x_0 .

قضية إذا كانت f تقبل الاشتقاق عند كل نقط المجال I و g تقبل الاشتقاق عند كل نقط المجال $f(I)$ فإن $g \circ f$

تقبل الاشتقاق عند كل نقط المجال I . ولدنيا: $\forall x \in I \quad (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\cos x)' = -\sin x \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (\sin x)' = \cos x \quad \text{أمثلة}$$

- مشتق $f(x) = x^n$ هو $f'(x) = nx^{n-1}$ من أجل كل عدد صحيح n .
- $\forall x \in \mathbb{R} \quad (e^x)' = e^x$ ومنه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{e^x - e^a}{x - a} = e^a \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{e^{x-a} - 1}{x - a} = e^a \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = e^a \cdot 1 = e^a$

• لتكن f دالة مستمرة على $[a, b]$ بحيث $a < f(a)$ و $f(b) < b$

بفرض أن $f(a) \leq g(a)$ ومن أجل كل x من $]a, b[$: $f'(x) \leq g'(x)$

نثبت أنه يوجد c من $]a, b[$ بحيث $f(c) = c$

من أجل ذلك نعتبر الدالة $g(x) = f(x) - x$. g مستمرة على $[a, b]$ ، ولدنيا :

$$a < f(a) \Leftrightarrow f(a) - a > 0 \Leftrightarrow g(a) > 0$$

$$f(b) < b \Leftrightarrow f(b) - b < 0 \Leftrightarrow g(b) < 0$$

ومنه يوجد c من $]a, b[$ بحيث $g(c) = 0$ أي $f(c) = c$

$$\bullet \text{ لتكن الدالة } g(x) \text{ المعرفة بالشكل: } g(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

بين أن $g(x)$ مستمرة وتقبل الاشتقاق على مجموعة تعريفها. ادرس وجود الخطوط المقاربة.

• $g(x)$ مستمرة وتقبل الاشتقاق عند الصفر لأن: $g(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +1$

$$g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{e^x - 1} - 1}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - e^x + 1}{x(e^x - 1)} = -\frac{1}{2}$$

• $g(x)$ مستمرة وتقبل الاشتقاق على المجال \mathbb{R}^* ولدينا :

$$g'(x) = \begin{cases} \frac{-xe^x + e^x - 1}{(e^x - 1)^2}, & x \neq 0 \\ -\frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$$

ولدينا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} (g(x) - x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = -1$

المنحنى (Γ) يقبل خطا مقاربا مائلا معادلته : $y = -x$.

الدالة العكسية إذا كانت الدالة العددية f رتيبة تماما على المجال I ومستمرة على I فإن:

$f(I)$ هو مجال، واقتصار f على I تقابل، و f تقبل دالة عكسية f^{-1} مستمرة وبنفس تغير f .

• **ملاحظة** إذا أعطيت f بتمثيلها البياني في معلم متجانس، فإنه تمثيل f^{-1} يكون بالتناظر الذي محوره المستقيم $y = x$

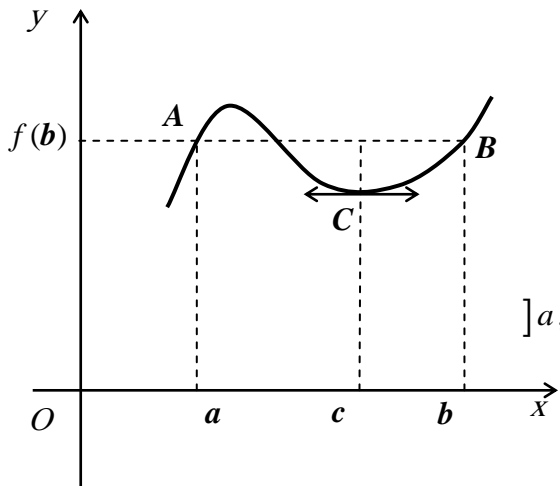
• إذا قبلت f الاشتقاق على I ، وكانت هذه المشتقة غير معدومة، فإن f^{-1} تقبل أيضا الاشتقاق على $f(I)$

$$\forall x \in I, f \circ f^{-1}(x) = x$$

ولدينا:

$$\forall x \in I, f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) = 1$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \quad f' \neq 0 \quad \text{ومنه}$$



مستمرة على $[a, b]$ ،

قابلة للاشتقاق على $]a, b[$

بحيث $f(a) = f(b)$

نظرية رول إذا كانت الدالة f

فإنه توجد على الأقل قيمة c من $]a, b[$ بحيث $f'(c) = 0$

يدل التمثيل الهندسي على وجود نقطة واحدة c على الأقل من القوس AB (A تختلف عن B) بحيث يكون المماس

عندها يوازي Ox . قد لا تكون هذه النقطة وحيدة .

نظرية لتكن f و g دالتين معرفتين ومستمرتين على $[a, b]$ وقابلتين للاشتقاق على $]a, b[$. بفرض أن الدالة المشتقة

g' لا تنعدم على $]a, b[$ ، عندئذ يوجد عدد α من المجال $]a, b[$ بحيث :

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}$$

قاعدة L'Hôpital لتكن $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ و $g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال $]a, b[$ ،

وليكن α من المجال $]a, b[$. إذا كانت النهاية $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ موجودة، فإن النهاية $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{g(x) - g(\alpha)}$ موجودة:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{g(x) - g(\alpha)} = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

ملاحظة . عندما يكون $f(\alpha) = g(\alpha) = 0$ ، فإن $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

• شروط رول تتحقق على $f(x) = x \cdot (x-2) \cdot (x+2)$ لدينا $f'(x) = 3x^2 - 4$. $f(-2) = f(0) = f(2)$

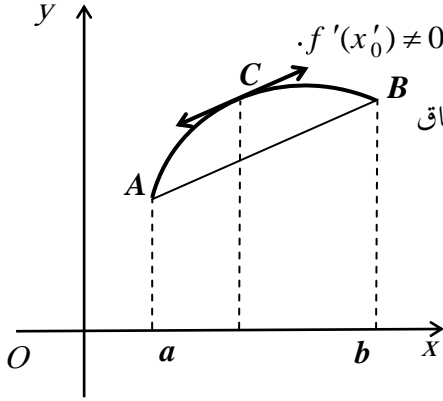
حسب رول فإن $f'(x)$ تنعدم عند $x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ من $]-2, 0[$ وتنعدم أيضا عند $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ من $]0, 2[$.

• المعادلة $e^{-x} = x$ تقبل حلا وحيدا x_0 من المجال $I =]0, 1[$.

بوضع $f(x) = x - e^{-x}$ ، يكون لدينا: f مستمرة على I و $f(0) = -1 < 0$ و $f(1) = 1 - \frac{1}{e} > 0$.

وحسب نتيجة سابقة، توجد قيمة x_0 من المجال المفتوح $]0, 1[$ بحيث $f(x_0) = 0$ ،

x_0 وحيد. لأنه لو كان معه x_1 من $]0, 1[$ بحيث $f(x_1) = 0$ ، لكان $f(x_0) = f(x_1) = 0$ الأمر الذي يتطلب،



حسب رول، وجود x'_0 من $]x_0, x_1[$ بحيث $f'(x'_0) = 0$. وهذا مجال لأن $f'(x'_0) \neq 0$.

صيغة التزايد المنتهية إذا كانت دالة f مستمرة على $[a, b]$ وتقبل الاشتقاق

على $]a, b[$ ، فإنه توجد على الأقل قيمة c من $]a, b[$ بحيث :

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$$

أي يوجد على الأقل θ من $]0; 1[$ ، بحيث

$$(2) \quad f(b) - f(a) = (b-a)f'(a + \theta(b-a))$$

• الدالة $f(x) = \ln x$ تحقق شروط تطبيق نظرية التزايد المنتهية على $]0; x[$ ، $0 < x$

$$\text{ومنه } \exists \theta \in]0; 1[\quad \ln(x+1) - \ln(x) = \frac{1}{x+\theta} \quad \text{أو} \quad \exists c \in]x; x+1[\quad \ln(x+1) - \ln(x) = \frac{1}{c}$$

• طبق نظرية التزايد المنتهية على الدالة $f(x) = e^x$ ، على $]0; x[$ ، $0 < x$ ، بعد التحقق من شروطها .

مجموعة التعريف f هي $D_f =]0; +\infty[$ ، و f تقبل الاشتقاق على $D =]0; +\infty[$

$$\left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{\sqrt{x}} = +\infty \right) \text{ لأن } 0 \text{ لا تقبل الاشتقاق عند } 0 \text{ و } f'(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$$

التمثيل الهندسي : يدل التمثيل الهندسي على وجود نقطة أو أكثر من القوس AB بحيث يكون المماس للمنحنى يوازي

الوتر AB . (معامل توجيه المستقيم AB هو $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

نتيجة لتكن f دالة معرفة ومستمرة على المجال $[a, b]$ ، وقابلة للاشتقاق على المفتوح $]a, b[$. نفرض وجود ثابتين موجبين

$$m \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq M \quad \text{بحيث يكون} \quad \forall x \in]a, b[: m \leq f'(x) \leq M$$

• نثبت من أجل كل $0 < x$: $\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}$

نعتبر الدالة $f(x) = \ln(x)$ المعرفة على \mathbb{R}_+^* . لدينا $f'(x) = \frac{1}{x}$. وحسب نظرية التزايد المنتهية :

$$\exists c \in]x, x+1[, f(x+1) - f(x) = (x+1-x)f'(c) = \frac{1}{c}$$

وبما أن $0 < x < c < x+1$ فإن $\frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$ أي $\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}$

الدوال اللوغاريتمية والأسية

نسمي الدالة اللوغاريتمية النيبيرية، الدالة الأصلية على المجال $]0, +\infty[$ للدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ والتي تنعدم من أجل القيمة 1

للمتغير x . ورمزها هو \ln . ومجموعة تعريفها هي \mathbb{R}_+^* . ولدينا بالتعريف: $\forall x > 0, \ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}$

النهايات : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

• خواص على المجال $]0, +\infty[$: $f(x) = \ln |ax| \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$ حيث $a \in \mathbb{R}^*$

• $\ln(u \cdot v) = \ln u + \ln v, \ln \frac{u}{v} = \ln u - \ln v, x > 0, n \in \mathbb{Q} \ln x^n = n \ln x$

• إذا كانت الدالة $u(x)$ تقبل الاشتقاق وتحافظ على إشارتها في مجال I ، فإن الدالة $f : x \mapsto \ln |u(x)|$ تقبل

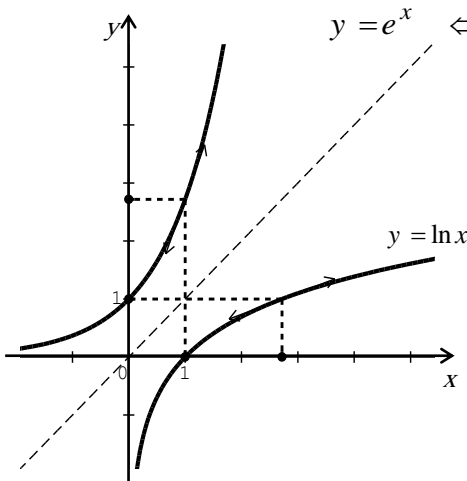
الاشتقاق على I ، بحيث : $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$

العدد e : الدالة اللوغاريتمية النيبيرية، تنعدم من أجل $x = 1$ ، وهي مستمرة ومنتزادة تماما على \mathbb{R}_+^* .

توجد قيمة لـ x : $\ln x = 1$ ، وهي العدد e الذي نسميه الأساس النيبيري، يحقق هذه المعادلة، $2,718\dots$ قيمة تقريبية له

x	0	1	e	$+\infty$
$(\ln x)'$	+	0	+	+
$\ln x$	$-\infty$	0	1	$+\infty$

الدالة الأسية النيبيرية الدالة الأسية ذات الأساس النيبيري e ، التي نرمز لها بـ $x \mapsto e^x$ ، هي الدالة العكسية للدالة \ln ،



فهي مستمرة ومنتزادة تماما من \mathbb{R}_+^* في \mathbb{R} . ولدينا : $x = \ln x, x > 0 \Leftrightarrow y = e^x$

خواص ونهايات : $\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}, e^x \cdot e^y = e^{x+y}, (e^x)^y = e^{x \cdot y}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty, \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot e^x = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

إذا كانت الدالة $u(x)$ تقبل على مجال I ، فإن الدالة $x \mapsto e^{u(x)}$

تقبل الاشتقاق على I : $(e^{u(x)})' = u'(x) \cdot e^{u(x)}$

تمارين محلولة:

• $f(x) = \begin{cases} (\ln x)^2 - \ln x, & 1 \geq x > 0 \\ (\ln x)^2, & x > 1 \end{cases}$ دالة مستمرة على \mathbb{R}_+^* حيث :

1. عين الصور $f(5), f(e), f(2), f(1), f(\frac{1}{2}), f(\frac{1}{e}), f(\frac{1}{5})$.

2. أدرس قابلية اشتقاق f عند $x_0 = 1$.

3. ادرس تغيرات f على \mathbb{R}_+^* ، واستنتج بأن اقتصار f على $[1, +\infty[$ هو تطبيق تقابلي. عين التطبيق f^{-1} .
4. أنشئ منحنيي الدالتين f و f^{-1} في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (2 سم على المحورين).
- هل يمكن تطبيق نظرية التزايد المتناهية على الدالة $f(x)$ في المجال $[0.5; 2]$ ؟

$$1. f\left(\frac{1}{5}\right) \approx 4.20, f\left(\frac{1}{e}\right) = 2, f\left(\frac{1}{2}\right) \approx 1.17, f(1) = 0, f(5) \approx 2.60, f(e) = 1, f(2) \approx 0.48$$

$$2. \bullet \text{ الدالة } f \text{ تقبل الاشتقاق على } \mathbb{R}_+^* - \{1\} : f(x) = \begin{cases} \frac{2\ln x - 1}{x}, & 1 > x > 0 \\ \frac{2\ln x}{x}, & x > 1 \end{cases}$$

$$\bullet \text{ الاشتقاق عند } x_0 = 1. \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(\ln x)^2 - \ln x - 1}{x - 1} = -1$$

$$\bullet \text{ ومنه } f \text{ لا تقبل الاشتقاق عند } x_0 = 1. \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(\ln x)^2 - 1}{x - 1} = 0$$

$$3. \bullet \text{ لدينا } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \text{ ومنه منحنى } f \text{ يقبل فرعا لا نهائيا باتجاه محور الفواصل.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \text{ (منحنى } f \text{ يقبل محور الترتيب كخط مقارب). كما نلاحظ بأن منحنى } f \text{ يقبل نقطة انعطاف}$$

عند النقطة التي فاصلتها $x_0 = e$. (لأن الدالة المشتقة الثانية f'' تنعدم عند $x_0 = e$ ومغيرة إشارتها).

x	0	1	e	$+\infty$
$f'(x)$	-	-1	0	+
$f(x)$	$+\infty$	0	1	$+\infty$

• الدالة $f(x)$ مستمرة ومتزايدة تماما على $[1, +\infty[$ ، وتأخذ قيمها في $[0, +\infty[$ فهي تقابل. دالتها العكسية

$f^{-1}(x)$ مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[0, +\infty[$ في $[1, +\infty[$. منحنيها f و f^{-1} يكونان في المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$

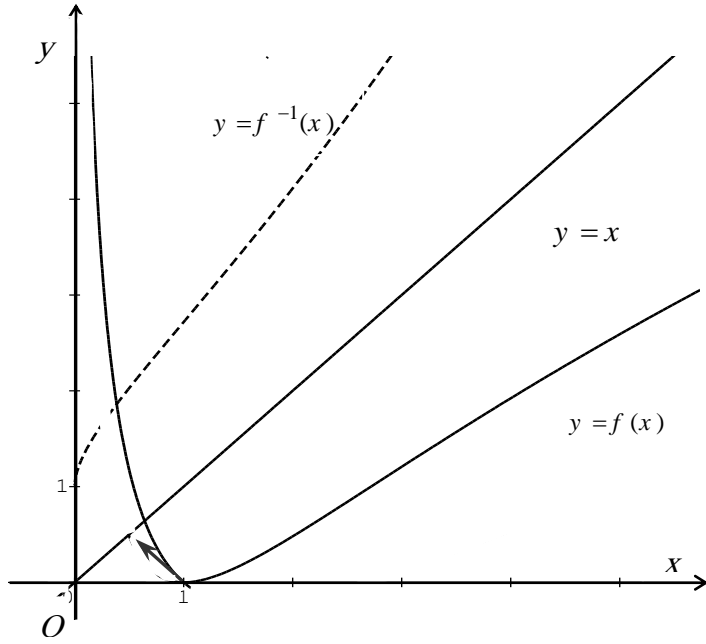
متناظرين بالنسبة لـ $y = x$. بوضع $x \geq 1$ ، $y = f(x) = (\ln x)^2$ ، نحصل على $y \geq 0$ ، $x = e^{\sqrt{y}}$

$$\text{ومنه : } \boxed{f^{-1}(x) = e^{\sqrt{x}} \quad (x \geq 0)}$$

f مستمرة على $[0, 2]$ لكنها لا تقبل الاشتقاق

عند $x_0 = 1$ ، وبالتالي لا يمكن تطبيق نظرية التزايد

المنتهاية في هذه الحالة.



• الدالة المستمرة على \mathbb{R} :

$$f(x) = \begin{cases} e^{x-1} + 1 & , x \geq 1 \\ x e^{x-1} + 1 & , x < 1 \end{cases}$$

ندرس تغيرات f على \mathbb{R} ، ونستنتج بأن اقتصر f على $[1, +\infty[$ هو تطبيق تقابلي. ثم نعين التطبيق العكسي f^{-1} .

• الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R} - \{1\}$:

$$f'(x) = \begin{cases} e^{x-1} & , x > 1 \\ (x+1)e^{x-1} & , x < 1 \end{cases}$$

• دراسة الاشتقاق عند $x_0 = 1$ بحساب النهايتين: $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x e^{x-1} + 1 - 2}{x - 1} = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^{x-1} + 1 - 2}{x - 1} = 1$$

ينتج أن f لا تقبل الاشتقاق عند $x_0 = 1$. ومنحنى f يقبل نصفي مماسين عند $x_0 = 1$.

لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ ومنحنى f يقبل فرعاً لا نهائياً باتجاه محور الترتيب.

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$. منحنى f يقبل أيضاً خطاً مقارباً (معادلته $y = 1$).

x	$+\infty$	-1	$+1$	$+\infty$
$f'(x)$		$2+$	0	$-$ 1 $+$
$f(x)$	1		$1 - e^{-3}$	2 → $+\infty$

منحنى f يقبل نقطة انعطاف عند النقطة التي فاصلتها $x = -2$. (الدالة f'' تنعدم عند $x_0 = 1$ مغيرة إشارتها).

• الدالة $f(x)$ مستمرة و متزايدة تماماً على $[1, +\infty[$ ، وتأخذ قيمها في $[1, +\infty[$ فهي تقابل. دالتها العكسية

$f^{-1}(x)$ مستمرة و متزايدة تماماً على المجال $[1, +\infty[$ في $[1, +\infty[$.

• بوضع: $y = f(x) = e^{x-1} + 1, x \geq 1$ نحصل على $x = \ln(y - 1) + 1, y \geq 2$

$$(x \geq 2) \quad f^{-1}(x) = \ln(x - 1) + 1$$

ومنه