وزارة التعليـــم العـــالي والبحـــث العلمــــي

جامعـــة الجيلالي بونعامة خميـــس مليانـــة

كليــة العلوم الاقتصادية، التجاريـة وعلــوم التسيير

قسـم العلــوم التجاريــة

سنـة ثانيـة شعبة العلوم التجاريـــة أعمــال موجهــة مقياس: إحصــاء 3

تماريـن محلولـــة

حول

نظرية المعاينـــة

Sampling Theory

التمرين الأول:

إذا كان لدينا مجتمع يتكون من المفردات التالية: 1.2.3.4.5 وسحبنا جميع العينات العشوائية البسيطة من الحجم 2 التي يمكن سحبها من هذا المجتمع في الحالتين مع أو بدون إرجاع.

- **أوجد توزيع المعاينة للوسط الحسابي وأحسبه في الحالتين مع أو بدون إرجاع.**

حـــل التمرين الأول:

الوسط الحسابي للمجتمع هو: $\mu_x = \frac{\sum X_i}{N} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = 3$

الحالـــة الأولى: توزيع المعاينة للوسط الحسابي وحسابه في حالة السحب مع الارجاع

عدد العينات الممكنة سحبها إذا كان السحب بإرجاع هي :

$$N^n = 5^2 = 25$$

نوجد أولاً جميع العينات الممكنة في هذه الحالة، ثم نحسب الوسط الحسابي لكل عينة كما يلي:

العينة	$\bar{X}$	العينة	$\bar{X}$	العينة	$\bar{X}$	العينة	$\bar{X}$	العينة	$\bar{X}$
(1.1)	**1**	(2.1)	**1.5**	(3.1)	**2**	(4.1)	**2.5**	(5.1)	**3**
(1.2)	**1.5**	(2.2)	**2**	(3.2)	**2.5**	(4.2)	**3**	(5.2)	**3.5**
(1.3)	**2**	(2.3)	**2.5**	(3.3)	**3**	(4.3)	**3.5**	(5.3)	**4**
(1.4)	**2.5**	(2.4)	**3**	(3.4)	**3.5**	(4.4)	**4**	(5.4)	**4.5**
(1.5)	**3**	(2.5)	**3.5**	(3.5)	**4**	(4.5)	**4.5**	(5.5)	**5**

توزيع المعاينة للوسط الحسابي للعينات $\bar{X}$ هو

$\bar{X}$	**1**	**1.5**	**2**	**2.5**	**3**	**3.5**	**4**	**4.5**	**5**
$f(\bar{x})$	1/25	2/25	3/25	4/25	5/25	4/25	3/25	2/25	1/25

متوسط التوزيع العيني لـ $\bar{X}$:

$$\mu_{\bar{X}} = \sum \bar{x} f(\bar{x}) = (1*\frac{1}{25}) + (1.5*\frac{2}{25}) + ... + (4.5*\frac{2}{25}) + (5*\frac{1}{25}) = 3 = \mu_x$$

وهو يساوي نفس قيمة μ_x كما يجب أن يكون.

الحالـة الثانية: توزيع المعاينة للوسط الحسابي وحسابه في حالة السحب بدون الارجاع

عدد العينات الممكنة سحبها إذا كان السحب بإرجاع هي:

$$C_N^n = \frac{N!}{n!(N-n)!} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{20}{2} = 10$$

نوجد أولاً جميع العينات الممكنة في هذه الحالة، ثم نحسب الوسط الحسابي لكل عينة كما يلي:

العينة	$\bar{X}$	العينة	$\bar{X}$	العينة	$\bar{X}$	العينة	$\bar{X}$	العينة	$\bar{X}$
(1.2)	**1.5**	(1.4)	**2.5**	(2.3)	**2.5**	(2.5)	**3.5**	(3.5)	**4**
(1.3)	**2**	(1.5)	**3**	(2.4)	**3**	(3.4)	**3.5**	(4.5)	**4.5**

توزيع المعاينة للوسط الحسابي للعينات $\bar{X}$ هو:

$\bar{X}$	**1.5**	**2**	**2.5**	**3**	**3.5**	**4**	**4.5**
$f(\bar{x})$	1/10	1/10	2/10	2/10	2/10	1/10	1/10

متوسط التوزيع العيني لـ $\bar{X}$:

$$\mu_{\bar{X}} = \sum \bar{x} f(\bar{x}) = (1.5*\frac{1}{10}) + (2*\frac{1}{10}) + (2.5*\frac{2}{10}) + (3*\frac{2}{10}) + (3.5*\frac{2}{10}) + (4*\frac{1}{10}) + (4.5*\frac{1}{10}) = \frac{30}{10} = 3 = \mu_x$$

التمرين الثاني:

(نفس المثال السابق) إذا كان لدينا مجتمع يتكون من المفردات التالية: 1.2.3.4.5 وسحبنا جميع العينات العشوائية البسيطة من الحجم 2 التي يمكن سحبها من هذا المجتمع في الحالتين مع أو بدون إرجاع.

- **أحسب تباين توزيع المعاينة للوسط الحسابي في الحالتين مع أو بدون إرجاع مع التحقق.**

حــل التمرين الثاني:

تباين المجتمع يحسب كما يلي:

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{5}\left((1-3)^2 + (2-3)^2 + (3-3)^2 + (4-3)^2 + (5-3)^2\right) = \frac{10}{5} = 2$$

الحالة الأولى: تباين الوسط الحسابي للعينات في حالة السحب مع الارجاع

من خلال جدول العينات الممكنة نحسب تباين الوسط الحسابي لكل عينة كما يلي:

$\bar{X}$	$(\bar{X}-\mu_{\bar{X}})^2$	$\bar{X}$	$(\bar{X}-\mu_{\bar{X}})^2$	$\bar{X}$	$(\bar{X}-\mu_{\bar{X}})^2$	$\bar{X}$	$(\bar{X}-\mu_{\bar{X}})^2$	$\bar{X}$	$(\bar{X}-\mu_{\bar{X}})^2$
1	$(1-3)^2=4$	1.5	2.25	2	1	2.5	0.25	3	0
1.5	2.25	2	1	2.5	0.25	3	0	3.5	0.25
2	1	2.5	0.25	3	0	3.5	0.25	4	1
2.5	0.25	3	0	3.5	0.25	4	1	4.5	2.25
3	0	3.5	0.25	4	1	4.5	2.25	5	4

جدول توزيع المعاينة لتباين الوسط الحسابي للعينات:

$\bar{X}$	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
$f(\bar{x})$	1/25	2/25	3/25	4/25	5/25	4/25	3/25	2/25	1/25
$(\bar{X}-\mu_{\bar{X}})^2$	$(1-3)^2=4$	2.25	1	0.25	0	0.25	1	2.25	4
$f(\bar{x})(\bar{X}-\mu_{\bar{X}})^2$	4/25	4.5/25	3/25	1/25	0	1/25	3/25	4.5/25	4/25

تباين التوزيع العيني لـ $\bar{X}$:

$$\sigma_{\bar{X}}^2=\sum(\bar{x}-\mu_{\bar{X}})^2 f(\bar{x})=(1-3)^2*(\frac{1}{25})+(1.5-3)^2*(\frac{2}{25})+..........+(5-3)^2*(\frac{1}{25})=\frac{25}{25}=1$$

وهي تساوي $\frac{\sigma_X^2}{n}$ **للتحـــــقق:** من خلال النظرية $\sigma_{\bar{X}}^2=\frac{\sigma_X^2}{n}=\frac{2}{2}=1$

الحالة الثانية: تباين الوسط الحسابي للعينات في حالة السحب بدون إرجاع

جدول توزيع المعاينة لتباين الوسط الحسابي للعينات:

$\bar{X}$	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5
$(\bar{X}-\mu_{\bar{X}})^2$	$(1.5-3)^2$ $=2.25$	1	0.25	0	0.25	1	2.25
$f(\bar{x})$	1/10	1/10	2/10	2/10	2/10	1/10	1/10
$f(\bar{x})(\bar{X}-\mu_{\bar{X}})^2$	2.25/10	1/10	0.25/10	0	0.25/10	1/10	2.25/10

تباين التوزيع العيني لـ $\bar{X}$:

$$\sigma_{\bar{X}}^2=\sum(\bar{x}-\mu_{\bar{X}})^2 f(\bar{x})=(1.5-3)^2*(\frac{1}{10})+(2-3)^2*(\frac{1}{10})+..........+(4.5-3)^2*(\frac{1}{10})=\frac{7.5}{10}=0.75$$

وهي تساوي $\frac{\sigma_X^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$

للتحـــــقق: من خلال النظرية $\sigma_{\bar{X}}^2=\frac{\sigma_X^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)=\frac{2}{2}\left(\frac{5-2}{5-1}\right)=\frac{3}{4}=0.75$

التمرين الثالث:

(نفس المثال السابق) إذا كان لدينا مجتمع يتكون من المفردات التالية: 1.2.3.4.5 وسحبنا جميع العينات العشوائية البسيطة من الحجم 2 التي يمكن سحبها من هذا المجتمع في الحالتين مع أو بدون إرجاع.

- أحسب القيمة المتوقعة لتباين العينة من خلال متوسط تباينات العينات في الحالتين مع أو بدون إرجاع، ثم قارن بينه وبين تباين المجتمع.

حل التمرين الثالث:

الحالة الأولى: حساب متوسط تباينات العينات $E\left(S^2\right)$ في حالة السحب مع الارجاع

نوجد أولاً جميع العينات الممكنة في هذه الحالة، ثم نحسب التباين لكل عينة كما يلي:

العينة	(1.1)	(1.2)	(1.3)	(1.4)	(1.5)	(2.1)	(2.2)	(2.3)	(2.4)
$\bar{X}$	**1**	**1.5**	**2**	**2.5**	**3**	**1.5**	**2**	**2.5**	**3**
S^2	**0**	**0.25**	**1**	**2.25**	**4**	**0.25**	**0**	**0.25**	**1**
العينة	(2.5)	(3.1)	(3.2)	(3.3)	(3.4)	(3.5)	(4.1)	(4.2)	(4.3)
$\bar{X}$	**3.5**	**2**	**2.5**	**3**	**3.5**	**4**	**2.5**	**3**	**3.5**
S^2	**2.25**	**1**	**0.25**	**0**	**0.25**	**1**	**2.25**	**1**	**0.25**
العينة	(4.4)	(4.5)	(5.1)	(5.2)	(5.3)	(5.4)	(5.5)	$\sum$	**المتوسط**
$\bar{X}$	**4**	**4.5**	**3**	**3.5**	**4**	**4.5**	**5**	**75**	$75/25=3$
S^2	**0**	**0.25**	**4**	**2.25**	**1**	**0.25**	**0**	**25**	$25/25=1$

$$S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2=\frac{1}{2}\left((1.5-1)^2+(1.5-2)^2\right)=\frac{0.25+0.25}{2}=0.25$$

توزيع المعاينة لتباين العينات S^2 هو:

S^2	0	0.25	**1**	**2.25**	**4**
$f(s^2)$	5/25	8/25	6/25	4/25	2/25

متوسط التوزيع العيني لـ S^2 :

$$E\left(S^2\right)=\sum S^2 f(s^2)=(0*\frac{5}{25})+(0.25*\frac{8}{25})+(1*\frac{6}{25})+(2.25*\frac{4}{25})+(4*\frac{2}{25})=\frac{25}{25}=1$$

للتحقق: من خلال النظرية $E\left(S^2\right)=\sigma_X^2\left(\frac{n-1}{n}\right)=2\left(\frac{1}{2}\right)=1$

الحالــة الثانيــة: حساب متوسط تباينات العينات $E\left(S^2\right)$ في حالة السحب بدون إرجاع

نوجد أولاً جميع العينات الممكنة في هذه الحالة، ثم نحسب التباين لكل عينة كما يلي:

العينة	(1.2)	(1.3)	(1.4)	(1.5)	(2.3)	(2.4)	(2.5)	(3.4)	(3.5)	(4.5)
$\bar{X}$	**1.5**	**2**	**2.5**	**3**	**2.5**	**3**	**3.5**	**3.5**	**4**	**4.5**
S^2	**0.25**	**1**	**2.25**	**4**	**0.25**	**1**	**2.25**	**0.25**	**1**	**0.25**

توزيع المعاينة لتباين العينات S^2 هو:

S^2	0.25	**1**	**2.25**	**4**	$\sum$
$f\left(S^2\right)$	4/10	3/10	2/10	1/10	**1**

متوسط التوزيع العيني لـ S^2 :

$$E\left(S^2\right)=\sum S^2 f\left(s^2\right)=(0.25*\frac{4}{10})+(1*\frac{3}{10})+(2.25*\frac{2}{10})+(4*\frac{1}{10})=\frac{12.5}{10}=1.25$$

للتحـــقق: من خلال النظرية

$$E\left(S^2\right)=\sigma_X^2\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{N}{N-1}\right)=2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{5}{4}\right)=\frac{10}{8}=1.25$$

التمرين الرابع:

إذا كانت x_{25} ...... x_1,x_2 **تمثل قياسات عينة عشوائية مسحوبة من توزيع طبيعي** $N\left(\mu_1,25\right)$، **و تباينها** S_x^2، **فأوجد** c **حيث :** $P\left(S_x^2\le c\right)=0.90$

حــل التمرين الرابع:

$$P\left(S_x^2\le c\right)=P\left(nS_x^2/\sigma_X^2\le nc/\sigma_X^2\right)=P\left(\chi^2_{(24)}\le c\right)=0.90$$

و باستعمال الجدول الاحصائي لتوزيع مربع كاي نجد $c=33.196$

التمرين الخامس:

إذا كانت x_{16} ...... x_1,x_2 **تمثل قياسات عينة عشوائية مسحوبة من توزيع طبيعي** $N\left(\mu_X,\sigma_X^2\right)$ **تباينها** S_x^2، **و** y_{13} ...... y_1,y_2 **تمثل قياسات عينة عشوائية مسحوبة من توزيع طبيعي** $N\left(\mu_Y,\sigma_Y^2\right)$ **تباينها** S_y^2.

- أوجد c حيث : $P\left(\dfrac{S_x^2}{S_y^2}\geq c\right)=0.01$

حـل التمرين الخامس:

باستعمال الجدول الاحصائي لتوزيع فيشر الذي درجة حريته

$$F\left[(n_1-1),(n_2-1)\right]=\left[(16-1)\ (13-1)\right]=\left[(15)\ (12)\right]=4.01$$

نجد $c=4.01$

التمرين السادس:

ليكن المجتمعان X و Yسحبنا منهما العينتين $x:1.3.5.7$ و $y:2.4.6$

تحقق أن $\mu_{x+y}=\mu_x+\mu_y$ and $\mu_{x-y}=\mu_x-\mu_y$

حل التمرين السادس:

حالـة المجمـوع

المجمـوع		العينـــة x			
μ_{x+y}		1	3	5	7
العينـة	2	3	5	7	9
	4	5	7	9	11
y	6	7	9	11	13

$$\mu_y=\bar{y}=\frac{2+4+6}{3}=4 \quad ، \quad \mu_x=\bar{x}=\frac{1+3+5+7}{4}=4$$

$$\mu_{x+y}=\frac{3+5+7+.........+9+11+13}{12}=\frac{96}{12}=8$$

حالـة الفـــرق

الفـــرق		العينـــة x			
μ_{x-y}		1	3	5	7
العينـة	2	1-	1	3	5
	4	3-	1-	1	3
y	6	5-	3-	1-	1

$$\mu_{x-y}=\frac{(-1)+1+3+.........+(-3)+(-1)+1}{12}=\frac{0}{12}=0$$

التمرين السابع:

نفس المثال السابق ليكن المجتمعان X و Yسحبنا منهما العينتين x :1.3.5.7 و y :2.4.6

تحقق أن $\sigma^2_{x+y}=\sigma^2_x+\sigma^2_y$ and $\sigma^2_{x-y}=\sigma^2_x+\sigma^2_y$

حـل التمرين السابع:

حالـة المجمـــوع

المجمـــوع		العينـــة x			
μ_{x+y}		1	3	5	7
العينـة	2	3	5	7	9
	4	5	7	9	11
y	6	7	9	11	13

$$\sigma^2_x=\frac{(1-4)^2+(3-4)^2+(5-4)^2+(7-4)^2}{4}=\frac{20}{4}=5$$

$$\sigma^2_y=\frac{(2-4)^2+(4-4)^2+(6-4)^2}{3}=\frac{8}{3}$$

$$\sigma^2_{x+y}=\frac{(3-8)^2+(5-8)^2+(7-8)^2+........+(11-8)^2+(13-8)^2}{8}=\frac{92}{12}=\frac{23}{3}$$

حالـة الفـــرق

الفـــرق		العينـــة x			
μ_{x-y}		1	3	5	7
العينـة	2	1-	1	3	5
	4	3-	1-	1	3
y	6	5-	3-	1-	1

$$\sigma^2_{x-y}=\frac{((-1)-0)^2+(1-0)^2+(3-0)^2+........+((-1)-0)^2+(1-0)^2}{8}=\frac{92}{12}=\frac{23}{3}$$

التمرين الثامن:

إذا كانت أجور العمال اليومية في القطاع الفلاحي في بعض المستثمرات في ولاية عين الدفلى تتبع التوزيع الطبيعي $N\ (1350;900)$ وبالمقارنة فإن أجور العمال اليومية في القطاع الفلاحي في بعض المستثمرات في ولاية الوادي تتبع التوزيع الطبيعي $N\ (1190;700)$ وأخذت عينة من عمال ولاية عين الدفلى حجمها 25

عامل متوسط أجورهم اليومية $\bar{x}$ ، وعينة من عمال ولاية الوادي حجمها 20 عامل متوسط أجورهم اليومية هو $\bar{y}$.

المطلوب: أوجد $P\left(\bar{x}-\bar{y}\leq 150\right)$

حـل التمرين الثامن:

$$P\left(\bar{x}-\bar{y}\leq 150\right)=P\left(\frac{\left(\bar{x}-\bar{y}\right)-\left(1350-1190\right)}{\sqrt{\left(900/25\right)+\left(700/20\right)}}\leq\frac{150-\left(1350-1190\right)}{\sqrt{\left(36\right)+\left(35\right)}}\right)$$

التمرين

$$=P\left(Z\leq\frac{-10}{\sqrt{71}}\right)=P\left(Z\leq -1.186\right)=0.1190$$

التاسع:

في مستشفى الامراض القلبية المستعصية فإن احتمال نجاح العملية هو 0.6 وأخذت عينة من 25 مريض من المرضى، فأوجد احتمال أن يكون نسبة الشفاء أكبر من 0.65 .

حـل التمرين التاسـع:

نعلم أن:

$$E\left(P'\right)=\mu_{P'}=P=0.60$$

$$V\left(P'\right)=\sigma^2_{P'}=\frac{P\left(1-P\right)}{n}=\frac{0.6\times 0.6}{100}=\frac{0.36}{100}=0.0036$$

فإن:

$$P' \sim N\left(0.6\ ,\ 0.0036\right)$$

$$Z=\frac{\left(P'-E\left(P'\right)\right)}{\sqrt{V\left(P'\right)}}=\frac{\left(P'-0.6\right)}{\sqrt{0.0036}}\sim N\left(0,1\right)$$

$$Z=P\left(P'\geq 0.65\right)=P\left(\frac{\left(P'-0.60\right)}{\sqrt{0.0036}}\geq\frac{\left(0.65-0.60\right)}{\sqrt{0.0036}}\right)$$

$$P\left(Z\geq\frac{0.05}{0.06}\right)=1-P\left(Z\prec 0.833\right)=1-0.7967=0.2033$$