قسم: علوم التسيير
السنة الثالثة
ادارة الاعمال
ادارة الموارد البشرية

التطبيقات الاولية لتحليل المعطيات

اساتذة المقياس:

د. صدقاوي صورية / د. بوعبدلي زهرة

قسم: علوم التسيير
السنة الثالثة
ادارة الاعمال
ادارة الموارد البشرية

الفصل الثاني: التذكير بالجبر الخطي والمصفوفات

- تمهيد
- العمليات على المصفوفات
- القيم الذاتية والاشعة الذاتية

تمهيد (1/8)

لنفرض أن لدينا أربعة طلبة **A**، **B** ، **C** و **D**: والذين تحصلوا على العلامات التالية في ثلاث مقاييس:

المقياس 1: **10** ، **8** ، **10** ، **9**

المقياس 2: **10** ، **10**، **9** ، **9**

المقياس 3: **7** ، **8** ، **10** ، **9**

يمكن تنظيم هذه المعلومات في جدول يتكون من ثلاثة صفوف وأربعة أعمدة كما يلي :

تمهيد (2/8)

D	C	B	A	
9	10	8	10	المقياس 1
9	9	10	10	المقياس 2
9	10	8	7	المقياس3

يعبر هذا الجدول عن المصفوفة

عدد عناصر المصفوفة = عدد الصفوف X عدد الأعمدة .

تمهيد (3/8)

تعريف المصفوفة:

المصفوفة عبارة عن تنظيم عددي (مجموعة من الأعداد
الحقيقية) مؤلف من : m . n عنصراً ، مرتبة في جدول مكون من m صفاً ، n عموداً ،
حيث m ، n عددان طبيعيان
ومحصورة بين قوسين من الشكل [ ].

ذا كانت المصفوفة تحتوي صفوفاً عددها m وأعمدة عددها n نقول عنها إنها مصفوفة من الرتبة m X n

تمهيد (4/8)

أمثلة:

المصفوفة	رتبتها	عدد عناصرها
$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & -7 \end{bmatrix}$	2×3	$2 \times 3 = 6$
$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$	3×2	$3 \times 2 = 6$
$C = [3]$	1×1	$1 \times 1 = 1$

تمهيد (5/8)

والشكل العام للمصفوفة هو:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

تمهيد (6/8)

انواع المصفوفات

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 1 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$$

أ. مصفوفة مستطيلة

(مصفوفة من النوع $m \times n$ حيث $m \neq n$)

مصفوفة الصف

$$\begin{bmatrix} 5- & 0 & 11 & 6 \end{bmatrix}$$

مصفوفة العمود

$$\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

تمهيد (7/8)

انواع المصفوفات

ب. المصفوفة المربعة

هي المصفوفة من النوع $n \times n$ أي أن عدد صفوفها يساوي عدد أعمدة

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

المصفوفة القطرية

(جميع عناصرها أصفار ما عدا العناصر الواقعة على القطر الاساسي فيكون أحدها على الأقل مغايراً للصفر)

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

مصفوفة الوحدة

(هي مصفوفة قطرية يكون فيها كل من العناصر الواقعة على القطر مساوياً الواحد)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

تمهيد (8/8)

انواع المصفوفات

ج. مصفوفة صفرية

(المصفوفة $n \times m$ وجميع عناصرها أصفار)

مصفوفة صفرية مستطيلة

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

مصفوفة صفرية مربعة

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

العمليات على المصفوفات (1/8)

1. جمع (طرح) مصفوفتين:

إذا كانت A و B مصفوفتان فانه يمكننا حساب A+B (أو A–B)، اذا تحقق الشروط التالية: لهما نفس الرتبة / نجمع (نطرح) المدخلات المتناظرة كما في المثال التالي:

الجمع

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A + B = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boxed{1} & 3 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{1+1} & 2+3 \\ 0+2 & 1+1 \\ 1+0 & 0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{2} & 5 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

الطرح

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A - B = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boxed{1} & 3 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{1-1} & 2-3 \\ 0-2 & 1-1 \\ 1-0 & 0-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{0} & -1 \\ -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

العمليات على المصفوفات (2/8)

2. جداء مصفوفتين:

قبل اجراء عملية ضرب مصفوفتين علينا التحقق من الشرط التالي:

عدد الاعمدة في المصفوفة الاولى تساوي عدد الصفوف في المصفوفة الثانية

المصفوفة الاولى	المصفوفة ثانية
$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 7 & 5 & 9 \end{bmatrix}$	$B = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$
3 اعمدة	3 صفوف

العمليات على المصفوفات (3/8)

2. جداء مصفوفتين:

رتبة المصفوفة **A.B** يتحدد تماماً من : **عدد صفوف A وعدد أعمدة B**

$$A.B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 7 & 5 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 48 \end{bmatrix}$$

صفين X 3 اعمدة — 3 صفوف X 1 عمود — صفين X 1 عمود

2 x 3 ⟷ 3 x 1 — 2 x 1

العمليات على المصفوفات (4/8)

2. جداء مصفوفتين:

ونحصل على النتيجة اذا ضربنا عناصر المصفوفة **A** في العناصر المناظرة لها من المصفوفة **B** وجمعنا نواتج الضرب.

$$A.B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 7 & 5 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.(-1) + 1.2 + 4.5 \\ 7.(1) + 5.2 + 9.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 48 \end{bmatrix}$$

العمليات على المصفوفات (5/8)

3. جداء مصفوفة في ثابت

حاصل ضرب مصفوفة بعدد حقيقي هو مصفوفة من النوع نفسه، ولكن العناصر تغيرت حيث ضربت كل منها بالعدد الثايت.

مثال

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ و } \alpha = 2 ; \quad \alpha . A = 2 . \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.1 & 2.(-1) \\ 2.0 & 2.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

ملاحظة : قسمة المصفوفة على عدد حقيقي نفس مفهوم ضربها بعدد حقيقي

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ و } \alpha = 2 ; \quad \frac{A}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} . \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 0/2 & 2/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

العمليات على المصفوفات (6/8)

4. حساب المحدد

تعريف: يمكن تعريف المحدد على أنه تطبيق خطي معرف من الفضاء الشعاعي $\mathcal{M}_n(K)$ نحو **K**
نرمز لمحدد المصفوفة بالرمز **| A |** أو **det (A)**

امثلة:

$$|3| \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

محدد من الدرجة: الاولى الثانية الثالثة

مثال :لتكن المصفوفة المربعة من الدرجة الثانية المعرفة بالشكل التالي: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

نحسب محدد المصفوفة كما يلي:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = (1*5) - ((-1)*2) = 5-(-2)= 5+2 = 7$$

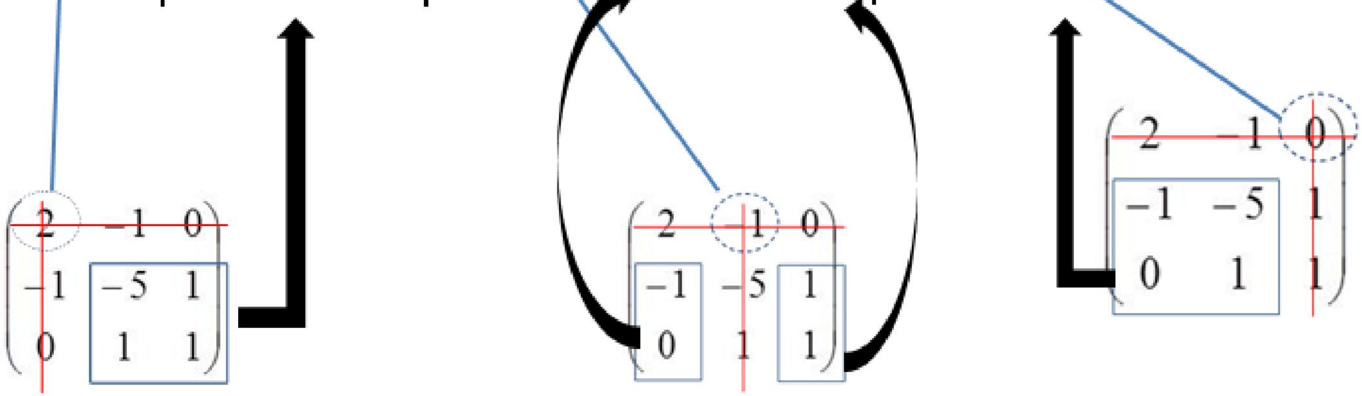
العمليات على المصفوفات (7/8)

مثال :لتكن المصفوفة المربعة من الدرجة الثالثة المعرفة بالشكل التالي:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

نحسب محدد المصفوفة كما يلي:

$$\det(A) = 2\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} -1 & -5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -13$$



العمليات على المصفوفات (8/8)

ملاحظة : هناك طريقة مختصرة لحساب محدد من الدرجة الثالثة و هذا تفصيلها:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2 & -1 \\ -1 & -5 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

نعيد كتابة السطر الاول والثاني على جانب المصفوفة ثم نقوم بضرب العناصر المتواجدة على نفس اتجاه السهم ثم نرفق تلك التي لها اللون الاحمر باشارة + أما تلك التي لها سهم أزرق نرفق لها اشارة – ثم نجمع الكل فنجد قيمة المحدد.

القيم الذاتية والاشعة الذاتية (1/4)

لايجاد القيمة الذاتية نستعمل الصيغة التالية:

$$|A - \lambda I| = 0 \qquad \text{أو} \qquad |\lambda I - A| = 0$$

لإيجاد الاشعة الذاتية نستعمل الصيغة التالية:

$$|A - \lambda I|x = 0$$

قسم: علوم التسيير
السنة الثالثة
ادارة الاعمال
ادارة الموارد البشرية

القيم الذاتية والاشعة الذاتية (2/4)

مثال: سوف نقوم بحساب القيم الذاتية للمصفوفة التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = 0 \rightarrow \left| \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -6 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right|$$

$$= \left| \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -6 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} 5-\lambda & -3-0 \\ -6-0 & 2-\lambda \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 \\ -6 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 \\ -6 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (5-\lambda)(2-\lambda) - (6)(3)$$

$$= 10 - 5\lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 18$$

$$= \lambda^2 - 7\lambda - 8$$

معادلة من الدرجة 2
حلها بحساب المميز

بحل المعادلة نجد: $\lambda = -1 \quad ; \quad \lambda = 8$

القيم الذاتية والاشعة الذاتية (3/4)

ايجاد الاشعة الذاتية: $|A - \lambda I|x = 0$

لما: $\lambda = -1$ (ناخذ القمة -1 لايجاد الاشعة الذاتية لهذه النقطة)

$$\begin{pmatrix} 5-\lambda & -3 \\ -6 & 2-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-(-1) & -3 \\ -6 & 2-(-1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

نقل $3x_2$ الى الطرف الثاني مع تغيير الاشارة

$$-6x_1 + 3x_2 = 0$$

نعوض في أحد المتغيرات x_1 بأي رقم ماعدا 0

$$-6x_1 = -3x_2$$

$$x_1 = 1$$

$$(-6)(1) = -3x_2$$

القيم الذاتية والاشعة الذاتية (4/4)

بقسمة الطرفين على 3-

$$\frac{-6}{-3} = \frac{-3x_2}{-3}$$

$$x_2 = 2$$

ومنه الشعاع الذاتي هو: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

بنفس الطريقة نحسب الشعاع الذاتي للقيمة الذاتية الاخرى $\lambda = 8$ ونجد:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$