a. نظرية القيم المتوسطة (théorème des valeurs intermédiaires):

لتكن الدالة f معرفة و مستمرة على مجال I .

لدينا $a\ et\ b$ عددين حقيقين من I $[(a;b) \in I]$

من اجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)\ et\ f(b)$, يوجد على الاقل عدد حقيقي c محصور بين $(a\ et\ b)$ $(a \leq c \leq b)$ بحيث : $f(c) = k$

b. نضرية رول (théorème de rolle):

f دالة معرفة على مجال $[a;b]$ من $\mathbb{R}$ $([a;b] \subset \mathbb{R})$: $f: [a;b] \to \mathbb{R}$.

تحقق الشروط التالية :

- f مستمرة على المجال $[a;b]$.
- f قابلة الاشتقاق على المجال $]a;b[$.
- $f(a) = f(b)$.

اذن يوجد على الاقل عدد حقيقي c ; $c \in]a;b[$. بحيث :

$$c \in]a;b[\ \Rightarrow\ f'(c) = 0$$

برهان :

مثال :

ادرس وحدانية c في الحالة التالية :

$$f(x) = |x^2 - 3x| \qquad x \in [0;3]$$

الدالة f مستمرة وقابلة لاشتقاق على المجال $[0;3]$

$$f(0) = f(3) = 0$$

اذن يمكننا تطبيق نضرية رول وعليه :

$$\exists c \in]0;3[\quad f'(c) = 0$$

$$f'(x) = -2x + 3$$

$$f'(c) = 0 \Leftrightarrow -2c + 3 = 0 \Leftrightarrow -2c = -3 \Leftrightarrow c = \frac{3}{2}$$

بما ان : $c = \frac{2}{3} \in [0;3]$

وعليه اثبتنا وحدانية القيمة c

ملاحضة 1:

نضرية رول لا تثبت وحدانية القيمة c

مثال :

طبق نضرية رول على الدالة التالية :

$$f(x) = x(x^2 - 4) \quad x \in [-2; 2]$$

الدالة f مستمرة وقابلة لاشتقاق على المجال $[-2; 2]$

$$f(-2) = f(2) = 0$$

اذن يمكننا تطبيق نضرية رول وعليه :

$$\exists c \in]-2; 2[\quad f'(c) = 0$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4$$

$$f'(c) = 0 \Leftrightarrow 3c^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow 3c^2 = 4 \Leftrightarrow c^2 = \frac{3}{4}$$

$$c_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \in [-2; 2]$$

$$c_2 = \frac{-\sqrt{3}}{2} \in [-2; 2]$$

و عليه يوجد قيمتين ل c التي من اجلهما تنعدم المشتقة .

ملاحضة 2 :

شروط نضرية رول كافية وغير لازمة.

مثال :

الدالة f المعرفة كما يلي :

$$f(x) = x^3 \quad \forall x \in [-1; 1]$$

نلاحض ان الدالة f مستمرة على المجال $[-1; 1]$ وقابلة للاشتقاق على المجال $]-1;\ 1[$

لدينا :

$$f'(0) = 0 \ \ 0 \in [-1; 1]$$

و لكن :

$$f(1) = 1 \neq f(-1) = -1$$

c. نضرية التزايدات المنتهية (théorème des accroissements finis) :

f دالة معرفة على مجال $\left[a\,;b\right]$ من $\mathbb{R}$ $\left(\left[a\,;b\right] \subset \mathbb{R}\right)$: $f: [a; b] \to \mathbb{R}$

تحقق الشروط التالية :

- f مستمرة على المجال $[a; b]$.

- f قابلة الاشتقاق على المجال $]a;b[$.

اذن يوجد عدد حقيقي c ; $c \in]a;b[$. بحيث :

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$$

مبرهنة :

نعتبر الدالة $\varphi(x)$ المعرفة على المجال $[a;b]$ بالعلاقة :

$$\varphi(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x)$$

- φمستمرة على المجال $[a;b]$. لان مستمرة
- φ قابلة الاشتقاق على المجال $]a;b[$. لان f مستمرة
- وتحقق الشرط :
- $$\varphi(a)=f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a)=\frac{bf(a)-af(a)-af(b)+af(a)}{b-a}=\frac{bf(a)-af(b)}{b-a}$$
$$\varphi(b)=f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b)=\frac{bf(b)-af(b)-bf(b)+bf(b)}{b-a}=\frac{bf(a)-af(b)}{b-a}$$
$$\varphi(a)=\varphi(b)$$
- اذن شروط رول محققة على الدالة φ ومنه :

$$\exists c \in]a;b[\ : \ \varphi'(c)=0$$

اذن :

$$\varphi'(x)=\left(f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x)\right)'=f'(x)-\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x)\right)'$$

$$=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\varphi'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$$

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

تطبيق :

ليكن : $(\alpha,\beta,\delta)\in\mathbb{R}\ avec\ \alpha\neq 0$

f دالة معرفة على مجال $[a;b]$ كما يلي :

$$f(x)=\alpha x^2+\beta x+\delta$$

طبق نضرية التزايدات المنتهية على الدالة f

الحل :

الدالة f دالة مستمرة على $\mathbb{R}$ اذن فها مستمرة على $[a;b]$

الدالة f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ اذن فها للاشتقاق على $[a;b]$

ومنه حسب نضرية التزايدات المنتهية :

$$\exists c \in]a;b[\ ; \ f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

اذن المشتقة من الرتبة $n = 1$ لدالة هي :

$$f'(x) = 2\alpha x + \beta$$
$$f'(c) = 2\alpha c + \beta$$
$$f(b) = \alpha b^2 + \beta b + \delta$$
$$f(a) = \alpha a^2 + \beta a + \delta$$

$$2\alpha c + \beta = \frac{\alpha b^2 + \beta b + \delta - \alpha a^2 - \beta a - \delta}{b-a} = \frac{\alpha(b^2-a^2)+\beta(b-a)}{b-a}$$
$$= \alpha(b-a) + \beta$$

$$2\alpha c + \beta = \alpha(b-a) + \beta$$
$$c = \frac{b+a}{2}$$

d. متباينة التزيدات المنتهية (théorème inégalités des accroissements finis):

تعريف :

لتكن الدالة f قابلة لاشتقاق على مجال مفتوح I من $\mathbb{R}$ اي $I \subset \mathbb{R}$ اذا وجد عددين حقيقين I $(m,M) \in I$ بحيث :

$$m \le f'(x) \le M$$

اذن من اجل كل عددين حقيقيين I $(a,b) \in I$ بحيث : $a < b$ اذن :

$$m(b-a) \le f(b) - f(a) \le M(b-a) \quad \forall x \in]a;b[$$

$$m \le \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \le M \quad \forall x \in]a;b[$$

مثال :

نضرية :

f دالة معرفة على مجال $[a\,;b]$ من $\mathbb{R}$ $\left([a\,;b] \subset \mathbb{R}\right)$: $f: [a;b] \to \mathbb{R}$

تحقق الشروط التالية :

- f مستمرة على المجال $[a;b]$.
- f *قابلة* الاشتقاق على المجال $]a;b[$.

اذا كان لدينا :

$$f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in \left]a;b\right[$$

اذن نقول ان الدالة رتيبة على المجال $[a;b]$

e. نضرية داربو (théorème de darboux) :

- لدينا الدالة f المعرفة على المجال $I:[a;b]$
- الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $I:[a;b]$
- $f'(a) \neq f'(b)$
- $\lambda \in R$ عدد حقيقي محصور تماما بين : $f'(a) < \lambda < f'(b)$ او $f'(b) < \lambda < f'(a)$.
- اذن يوجد $c \in [a;b]$ بحيث $f'(c) = \lambda$

1. الدالة الجزء الصحيح (la fonction partie entière):

تسمى الدالة الجزء الصحيح الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ و التي ترفق بكل عدد حقيقي x العدد الصحيح n حيث :

$$\forall n \in \mathbb{Z};\ \forall x \in [n;n+1[\Leftrightarrow n \leq x < n+1$$
$$E(x) = n$$
$$\forall x \in \mathbb{R};\ E(x) \leq x < E(x)+1$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, E(n+x) = E(x)+n$$

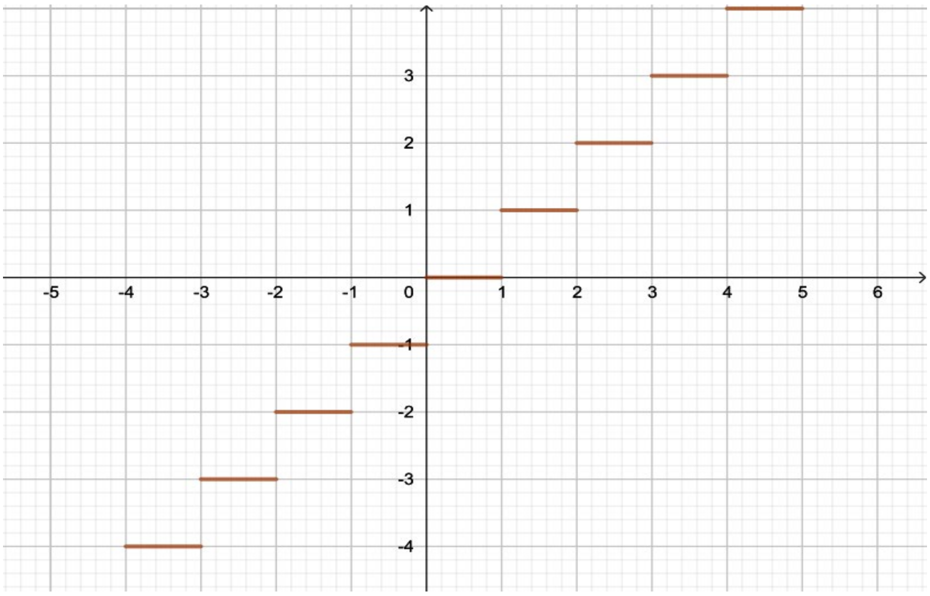
$$\mathbb{R} \to \mathbb{Z}$$
$$x \to E(x)$$

امثلة :

$$E(0{,}25) = 0: \qquad 0 \leq 0{,}25 < 1$$
$$E(-0{,}25) = -1: \quad -1 \leq -0{,}25 < 0$$
$$E(3{,}25) = 3: \qquad 3 \leq 3{,}25 < 4$$
$$E(-3{,}25) = -4: \quad -4 \leq -3{,}25 < -3$$
$$E(0) = 0: \qquad 0 \leq 0 < 1$$
$$E(-5) = -5: \quad -5 \leq -5 < -4$$

منحنى الدالة الجزء الصحيح (courbe représentative) :

$$\boldsymbol{f(x) = E[x]}$$



المصدر : من تاليف الكاتب يالاعتماد على Geogebra

تطبيق :

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[-1;2[$ ب :

$$f(x) = xE(x) + 1$$

عين عبارة $f(x)$ على المجالات التالية :

$$x \in [-1;0[$$
$$x \in [0;\ 1[$$
$$x \in [1;2[$$

ارسم منحنى الدالة $f(x)$

هل الدالة $f(x)$ مستمرة على المجال $[-1;2[$

الحل :

$$x \in [-1;0[\quad E(x) = -1; \quad f(x) = -x + 1$$
$$x \in [0;\ 1[\quad E(x) = 0; \quad f(x) = 1$$
$$x \in [1;2[\quad E(x) = 1; \quad f(x) = x + 1$$

لكي تكون الدالة مستمرة على المجال $[-1;2[$ يجب ان تكون مستمرة عند القيمة $x_0 = 0$ و $x_0 = 1$

دراسة استمرارية الدالة f عند القيمة $x_0 = 0$:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x <}} (-x + 1) = 1$$
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \geq}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \geq}} (1) = 1$$

اذن الدالة f مستمرة عند القيمة $x_0 = 0$

دراسة استمرارية الدالة f عند القيمة $x_0 = 1$:

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x <}} (1) = 1$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x \geq}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x \geq}} (x+1) = 2$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x <}} (1) = 1 \neq \lim_{\substack{x \to 1 \\ x \geq}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x \geq}} (x+1) = 2$$

اذن الدالة f غير مستمرة عند القيمة $x_0 = 1$

نتيجة :

اذن الدالة $f(x)$ غير مستمرة على المجال $]-1; 2[$