الفصل الثاني : المتتاليات العددية (les Suites)

1. الاعداد الحقيقية
2. تعريف المتتالية العددية
3. دراسة اتجاه تغير المتتاليات
4. البرهان بالتراجع
5. دراسة تقارب متتالية عددية

1. تعريف المتتالية العددية : (Suite Réelle)

متتالية عددية حقيقية uهي عبارة عن دالة ترفق بكل عدد طبيعي n , اكبر من او يساوي عدد طبيعي n_0 معطى .

نرمز لمتتالية عادة بالرمز $(U_n)_{n\geq n_0}$ او اختصارا ب (U_n) اذا كانت مجموعة تعريفها واضحة .

1.1 دراسة اتجاه تغير متتالية عددية: (sens de variation d'une suite réelle)

1.1 متتالية متزايدة : (suite croissante)

تكون متتالية $(U_n)_{n\geq n_0}$ متزايدة او (متزايدة تماما) اذا وفقط اذا كان من اجل كل عدد طبيعي n اكبر من او يساوي n_0 اي $(n \geq n_0)$:

$$(U_n \leq U_{n+1}) \bigvee (U_n < U_{n+1})$$

نظرية : (théorèmes)

اذا كان : $U_n = f(n)$ و كانت الدالة المرفقة f متزايدة على المجال $[n_0;\ +\infty[$في هاذه الحالة نستطيع القول بان المتتالية U_n المعرفة بالحد الاول n_0 متزايدة.

$$(\boldsymbol{U_n} \leq \boldsymbol{U_{n+1}}) \Leftrightarrow \boldsymbol{U_n} \nearrow$$

ملاحظة1 :

لدراسة اتجاه تغير المتتالية العددية U_n ندرس اشارة الفرق $(\boldsymbol{U_{n+1}} - \boldsymbol{U_n})$ ونقارنه بالنسبة لصفر :

$$\boldsymbol{0 \leq (U_{n+1} - U_n)}$$

او ندرس قسمة $\left(\frac{U_{n+1}}{U_n}\right)$ و نقارنه بالنسبة لواحد :

$$\boldsymbol{1 \leq \left(\frac{U_{n+1}}{U_n}\right) \ \ / \ \ U_n > 0}$$

ملاحظة2 :

الامر مختلف في حالة متتالية معرفة بعلاقة تراجعية

تطبيق :

بين انه من اجل كل : $\forall n \in \mathbb{N}^* :\ \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

لدينا المتتالية $(U_{n\in\mathbb{N}^*})$ معرفة كما يلي :

$$U_n = \sum_{n=1}^{n} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . . \frac{1}{n(n+1)}$$

ادرس اتجاه تغير المتتالية $(U_{n\in\mathbb{N}^*})$.

الحل :

$$\begin{aligned} U_n = \textstyle\sum_{n=1}^{n} \frac{1}{n(n+1)} &= \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \cdots \ldots\ldots\ldots . \ldots . . \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \end{aligned}$$

$$U_n = \sum_{n=1}^{n} \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

اذن العبارة المختصرة لمتتالية $(U_{n\in\mathbb{N}^*})$:

$$U_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

لدراسة اتجاه تغير المتتالية نقوم بدراسة اشارة الفرق $U_{n+1} - U_n$:

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= 1 - \frac{1}{n+2} - 1 + \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{-n - 1 + n + 2}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0 \end{aligned}$$

اذن المتتالية متزايدة.

مثال2 :

لتكن المتتالية $(U_{n\in\mathbb{N}})$ معرفة كما يلي :

$$U_n = 2^{n+2} \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

في هذه الحالة لدراسة اتجاه تغير المتتالية $(U_{n\in\mathbb{N}})$ نلاحظ ان جميع حدود المتتالية موجبة $\forall n \in$ $\mathbb{N} \Rightarrow U_n > 0$ وعليه نقارن نسبة $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ بالنسبة ل1

اذن :

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{2^{n+3}}{2^{n+2}} = 2 > 1$$

ومنه المتتالية متزايدة

1.2. متتالية متناقصة :(suites décroissante)

تكون متتالية $(U_n)_{n\geq n_0}$ متناقصة او (متناقصة تماما) اذا وفقط اذا كان من اجل كل عدد طبيعي n اكبر من او يساوي n_0 اي $(n \geq n_0)$:

$$(U_n \geq U_{n+1}) \bigvee (U_n > U_{n+1})$$

نظرية : (théorèmes)

اذا كان : $U_n = f(n)$ و كانت الدالة المرفقة f متناقصة على المجال $]n_0;\ +\infty[$في هاذه الحالة نستطيع القول بان المتتالية U_n المعرفة بالحد الاول n_0 متناقصة.

$$(\boldsymbol{U_{n+1} \leq U_n}) \Leftrightarrow \boldsymbol{U_n} \searrow$$

ملاحظة1 :

لدراسة اتجاه تغير المتتالية العددية U_n ندرس اشارة الفرق $(U_{n+1} - U_n)$ ونقارنه بالنسبة لصفر :

$$(U_{n+1} - U_n) \leq 0$$

او ندرس قسمة $\left(\frac{U_{n+1}}{U_n}\right)$ و نقارنه بالنسبة لواحد :

$$\left(\frac{U_{n+1}}{U_n}\right) \leq 1 \ \ / \ U_n > 0$$

ملاحظة2 :

الامر مختلف في حالة متتالية معرفة بعلاقة تراجعية

مثال*1* :

$$U_n = -2^n$$

$$U_{n+1} - U_n = -2^{n+1} + 2^n = 2^n(1-2) = -2^n$$

$$-2^n < 0 \ \Leftrightarrow U_n \searrow$$

مثال*2* :

$$U_n = 1 - \frac{1}{2^3} - \frac{1}{3^3} - \cdots \ldots \ldots . \frac{1}{n^3} \quad \forall n \geq 1$$

$$U_{n+1} - U_n =$$
$$\left(1 - \frac{1}{2^3} - \frac{1}{3^3} - \cdots \ldots \ldots . - \frac{1}{n^3} - \frac{1}{(n+1)^3}\right) - \left(1 - \frac{1}{2^3} - \frac{1}{3^3} - \cdots \ldots \ldots . - \frac{1}{n^3}\right)$$
$$= -\frac{1}{(n+1)^3} < 0 \iff U_n \searrow$$

.1.3 متتالية **ثابتة** **(suites constante):**

تكون متتالية $(U_n)_{n\geq n_0}$ ثابتة اذا وفقط اذا كان من اجل كل عدد طبيعي n اكبر من او يساوي n_0 اي

: $(n \geq n_0)$

$$\boldsymbol{(U_n = U_{n+1})}$$

ملاحظة 3 :

بعض المتتاليات لا هي متزايدة و لاهية متناقصة

مثال 4 :

$$\boldsymbol{U_n = (-1)^n 2^n}$$
$$\boldsymbol{U_0 = 1;\ \ U_1 = -2;\ U_2 = 4;\ U_3 = -8;\ U_4 = 16\ ;\ U_5 = -32;}$$

.2 البرهان بالتراجع (démonstration par récurrence):

$p(n)$ خاصية متعلقة بعدد طبيعي n

n_0 عدد طبيعي .

للبرهان على صحة الخاصية $p(n)$ من اجل كل عدد طبيعي n اكبر من او يساوي n_0 $n_0 \leq n$,

يكفي :

1. نتأكد من صحة الخاصية من اجل n_0 اي $p(n_0)$. (الخاصية الابتدائية propriété initiale)
2. نفرض ان الخاصية صحيحة من اجل كل عدد طبيعي n اكبر من او يساوي n_0

اي $p(n)$ (فرضية التراجع) و نبرهن صحة الخاصية من اجل $n+1$ اي $p(n+1)$.

(الخاصية الوراثية : propriété héréditaire).

ملاحظة :

التأكد من صحة الخاصية من اجل n_0 ضروري لانه يمكن ان تكون خاصية وراثية دون ان تكون صحيحة .

مثال :

بين بالتراجع ان :

$$\ln(n) \leq \ln(n-1) + \frac{1}{n-1} \quad ; \forall n \geq 2$$

من اجل : $p(2)$

$$p(2): \ln 2 \leq 1 \Leftrightarrow 0{,}69 \leq 1$$

$$p(2): vraie$$

فرضية التراجع :

نفرض ان : $p(n): ln(n) \leq ln(n-1) + \frac{1}{n-1}$ صحيحية

نتحقق من صحتها من اجل : $p(n+1)$

اذن :

$$p(n+1): \ln(1+n) \leq \ln n + \frac{1}{n}$$

لدينا :

$$\ln(n+1) \leq n$$

اذن :

$$\ln\left(\frac{1}{n}+1\right) \leq \frac{1}{n} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$$

$$\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \Leftrightarrow \ln(n+1) - \ln n \leq \frac{1}{n}$$

نتيجة :

$$p(n+1): \ln(1+n) \leq \ln n + \frac{1}{n}$$

$p(n+1)$ صحيحة

وعلية نعمم النتيجة

$$\ln(n) \leq \ln(n-1) + \frac{1}{n-1} \quad ; \forall n \geq 2$$

4. تقارب متتالية عددية : (convergence d'une suite réelle)

a. نهاية متتالية عددية: (limite d'une suite)

تعريف :

(U_n) متتاليه عددية و l عدد حقيقي.

نقول ان المتتالية (U_n) تقبل l كنهاية اذا وفقط اذا كان من اجل كل مجال مفتوح يشمل l يشمل ايضا كل حدود المتتالية (U_n) ابتداءا من رتبة معينة و نكتب :

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = l \quad ou\ bien\ ; \ \lim_{n\to-\infty} U_n = l$$

ملاحظة :

- لا يمكن حساب نهاية المتتالية (U_n) الا عند $+\infty$.
- اذا وجد العدد الحقيقي l كنهاية للمتتالية (U_n)بجوار $+\infty$ نقول ان المتتالية (U_n) متقاربة

ملاحظة :

اذا كانت المتتالية (U_n) معرفة بالشكل $U_n = f(n)$ بحيث f دالة معرفة على المجال $]\beta;\ +\infty[$ حيث β عدد حقيقي اذن :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l\ ;\ alors\ \lim_{n\to+\infty} U_n = l$$

ملاحظة :

- العكس غير صحيح

مثال :

لتكن الدالة $f(x)$ المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي :

$$f(x) = \frac{x\cos(2\pi x)}{x+1}$$

الدالة المرفقة بالمتتالية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$(U_n) = \frac{n}{n+1}$$

$$(U_n) = f(n) = \frac{n}{n+1} \quad or;\ \cos(2\pi n) = 1;\ \forall n \in \mathbb{N}\ / \cos(0) = 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = 1\ ; sachant\ que\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = \text{غير موجودة}$$

5. متتالية محدودة : (suite bornée)

(U_n) متتالية عددية المعرفة على $\mathbb{N}$.

- القول ان المتتالية (U_n) محدودة من الاعلى يعني وجود عدد حقيقي A حيث من اجل كل عدد طبيعي n :

$U_n \leq A$ ونقول ان A عنصر حاد من الاعلى (la borne supérieure)

$$sup(U_n) = A$$

- القول ان المتتالية (U_n) محدودة من الاسفل يعني وجود عدد حقيقي B حيث من اجل كل عدد طبيعي n:

$B \leq U_n$ ونقول ان B عنصر حاد من الاسفل (la borne inférieure)

$$inf(U_n) = B$$

- القول ان المتتالية (U_n) محدودة يعني انها محدودة من الاسفل و محدودة من الاعلى.

خاصية 1 :

- اذا كانت المتتالية (U_n) متزايدة ومحدودة من الاعلى فانها متقاربة

خاصية 2 :

- اذا كانت المتتالية (U_n) متناقصة ومحدودة من الاسفل فانها متقاربة

نظرية :

كل متتالية عددية متقاربة هي متتالية محدودة ; و العكس غير صحيح .

مثال :

لتكن المتتالية العددية المعرفة كما يلي :

$$U_n = (-1)^n$$
$$-1 \leq U_n = (-1)^n \leq 1$$

واضحة ان المتتالية محدودة ولكن غير متقاربة

كيف نثبت ان متتالية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$محدودة من الاسفل بعدد حقيقي B او محدودة من الاعلى بعدد حقيقي A؟

- نستعمل البرهان بالتراجع لاثبات انه من اجل كل عدد طبيعي n:

$$\boxed{\begin{array}{l} \bullet\ B \leq U_n \\ \bullet\ U_n \leq A \end{array}}$$

- المقارنة بين U_n و B او $\left(U_n \text{ و } A\right)$ بدراسة اشارة الفرق بين $U_n - B$ او $(U_n - A)$.
- اذا كانت $U_n = f(n)$ ندرس تغيرات الدالة على المجال $[0; +\infty[$:

مثال :

لتكن $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$المتتالية معرفة بالعلاقة :

$$U_{n+1} = \frac{U_n}{2} + \frac{(U_n)^2}{4}$$

بين ان :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ U_n > 0$$
$$\forall n \in \mathbb{N}\ U_n \leq 1$$

من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم .

تطبيق :

بين ان المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة كما يلي انها محدودة :

$$U_n = \frac{3-\sin n^2}{\cos\sqrt{n}+3} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

لدينا : $-1 \leq \sin x \leq 1 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$

اذن :

$$-1 \leq \sin n^2 \leq 1 \ \ \forall n \in \mathbb{N}, n^2 \in \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$$
$$-1 \leq -sin\, n^2 \leq 1$$
$$-2 \leq 3 - sin\, n^2 \leq 4$$
$$-1 \leq \cos\sqrt{n} \leq 1$$
$$2 \leq 3 + cos\sqrt{n} \leq 4$$
$$\frac{1}{4} \leq \frac{1}{cos\sqrt{n}} \leq \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{2} \leq \frac{3-sin\, n^2}{cos\sqrt{n}} \leq 2$$

6. المتتاليات التدريجية : (suites récurrente)

نتحدث عن متتالية تدريجية اذا كان تعريفها يعطي حدها من الرتبة n بدلالة حد او عدة حدود من رتبة اقل من n .

وتعرف المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بالعلاقة :

$$\begin{cases} U_0 = \alpha \\ U_{n+1} = f(U_n)\,; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

نضرية :

اذا كان f متزايدة فان $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ رتيبة :

- متزايدة اذا كان $f(U_0) \geq U_0$
- متناقصة اذا كان $f(U_0) \leq U_0$

اذا كان f متناقصة فان $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ليست رتيبة

تطبيق :

لتكن $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$المتتالية معرفة بالعلاقة :

$$U_{n+1}=\frac{3}{4}+\frac{(U_n)^2}{4}$$

بين ان :

$$\forall n\in\mathbb{N}\ U_n>1$$
$$\forall n\in\mathbb{N}\ U_n\leq 2$$

ادرس اتجاه تغير المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ؟ هل هي متقاربة؟

الحل :

$$\frac{U_{n+1}}{U_n}=\frac{\frac{3}{4}+\frac{(U_n)^2}{4}}{U_n}=\frac{3}{4U_n}+\frac{U_n}{4}$$

لمقارنة النسبة $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ نرفق المتتالية بالدالة $f:]1;2]\to\mathbb{R}$ المعرفة كما يلي :

$$f(x)=\frac{3}{4x}+\frac{x}{4}$$

$$f'(x)=\frac{-3}{4x^2}+\frac{1}{4}=\frac{-3+x^2}{4x^2}$$

x	1	$\sqrt{3}$	2
$f'(x)$	-		+
$f(x)$	1 ↘	$\frac{3}{2\sqrt{3}}$	↗ $\frac{7}{8}$

من خلال جدول تغيرات الدالة f نلاحض ان :

$$\forall U_n\in\,]1;2]\ \ f(U_n)<1$$
$$\forall n\in\mathbb{N}\qquad \frac{U_{n+1}}{U_n}<1$$

اذن المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$متناقصة

نفرض ان المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تؤول الى النهاية l بحيث :

$$l=\frac{3}{4}+\frac{l^2}{4}\Leftrightarrow l-\frac{3}{4}-\frac{l^2}{4}=0\Leftrightarrow\frac{-l^2+4l-3}{4}=0\ \begin{cases}l=1\\ l=3\end{cases}$$

ومنه $l=1$

اذن المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة

7. المتتالية الحسابية و المتتالية الهندسية :

a. المتتالية الحسابية (suite arithmétiques):

نقول +ان المتتالية (U_n) حسابية حدها الاول U_0 و اساسها r (عددحقيقي r) اذا كان لدينا :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ U_{n+1} - U_n = r$$

عبارة الحد العام المتتالية الحسابية :

$$U_n = U_p + (n-p)r$$

مجموعة حددود متتابعة من متتالية حسابية :

$$S = U_0 + U_1 + \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots U_{n-1} + U_n = (n+1)\left(\frac{U_0 + U_n}{2}\right)$$

$$S = U_p + U_{p+1} + \cdots \ldots \ldots \ldots U_{n-1} + U_n = (n-p+1)\left(\frac{U_p + U_n}{2}\right)$$

b. المتتالية الهندسية (suite géométrique):

نقول ان المتتالية (U_n) هندسية حدها الاول U_0 و اساسها q (عددحقيقي q) اذا كان لدينا :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \frac{U_{n+1}}{U_n} = q$$

عبارة الحد العام المتتالية الهندسية :

$$U_n = U_p q^{n-p}$$

مجموعة حدود متتابعة من متتاليةهندسية :

$$S = U_0 + U_1 + \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots U_{n-1} + U_n = (U_0)\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$$

$$S = U_0 + U_1 + \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots U_{n-1} + U_n = (U_p)\left(\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}\right)$$

نهاية متتالية هندسية :

- اذا كان $q > 1$ و $U_0 > 0$ فان $\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$
- اذا كان $q > 1$ و $U_0 < 0$ فان $\lim_{n\to+\infty} U_n = -\infty$
- اذا كان $-1 < q < 1$ فان $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$
- اذا كان $q \leq -1$ فان $\lim_{n\to+\infty} U_n$ غير موجودة

تطبيق :

ليكن $(U_0, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}$ لدينا المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ معرفة كما يلي :

$$U_{n+1} = \alpha U_n + \beta$$

ما هي طبيعة المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ اذا كان :

$$\alpha = 1$$
$$\beta = 0$$

في حالة $\alpha = 1$ نلاحض ان عبارة المتتالية :

$$U_{n+1} - U_n = \beta$$

اذن المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ عبارة عن متتالية حسابية

في حالة $\beta = 0$ نلاحض ان عبارة المتتالية :

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \alpha$$

اذن المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ عبارة عن متتالية هندسية