فهرس محتويات الفصل

الفصل 8 نظرية التقدير 2

مفاهيم أساسية 2

تعريف وخصائص المقدر 2

مفاهيم حول التقدير بمجال.. 3

كيفية التقدير بمجال 5

مجال الثقة لمتوسط مجتمع 5

مجال الثقة للنسبة في مجتمع 8

مجال الثقة للتباين وللانحراف المعياري لمجتمع طبيعي 9

مجالات الثقة لنسبة تبايني مجتمعين.. 11

خلاصة 11

ملحق. مجالات الثقة للفروق والمجاميع 13

طرق تأسيس المقدر 14

طريقة العزوم 14

طريقة المعقولية العظمى (طريقة الاحتمال الأكبر) 14

الفصل 8 نظرية التقدير

مفاهيم أساسية - طرق التقدير بمجال - طرق تأسيس المقدر

في الفصل السابق درسنا من خلال مجموعة من النظريات العلاقة الرياضية بين معالم العينة والمعالم المناظرة لها في المجتمع مثل المتوسط، التباين، النسبة...كما درسنا العلاقة بين شكل توزيع المجتمع وشكل التوزيع الاحتمالي لمعالم العينة. تظهر هذه العلاقات كتوصيف لخصائص العينة ومعالمها ولكنها تستخدم أكثر لتقدير خصائص ومعالم المجتمع محل الدراسة، وهذا ما سنتعرف عليه في هذا الفصل.

1-8 مفاهيم أساسية

تعريف و خصائص المقدر
مفاهيم التقدير النقطي، التقدير بمجال

1-1-8 تعريف وخصائص المقدر : التحيز، الفعالية و التقارب

في الفصل السابق عرفنا الإحصائية بأنها دالة في متغيرات العينة، قد تستخدم الإحصائية لتقدير لمعلمة θ من معالم مجتمع وتسمى في هذه الحالة "مقدر" (estimateur) ونرمز لها ب $\hat{\theta}$. اختيار الإحصائية المناسبة يكون حسب خصائصها.

1-1-1-8 المقدر غير المتحيز

نقول عن إحصائية ما بأنها مقدر غير متحيز (sans biais) لمعلمة المجتمع إذا كان متوسطها أو توقعها الرياضي مساويا لمعلمة المجتمع. $E(\hat{\theta}) = \theta$

مثال:

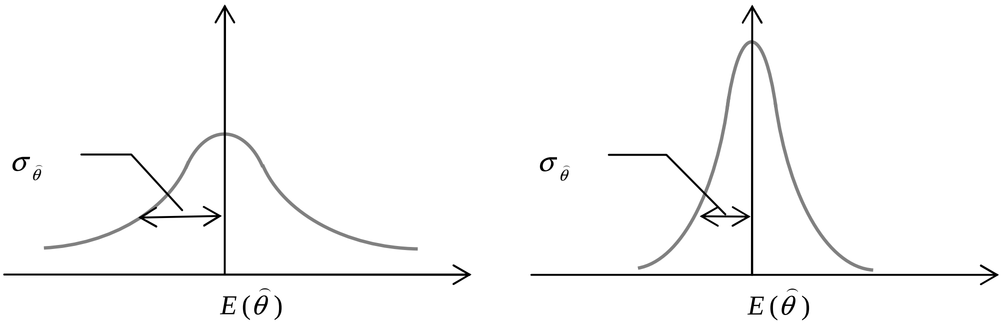
- نقول عن متوسط العينة M أنه مقدر غير متحيز لمتوسط المجتمع μ لأن $E(M) = \mu$.
- نقول عن الإحصائية S^2 (تباين العينة) في معاينة بالإرجاع أنها مقدر متحيز ل σ^2 لأن:
$$E(S^2) = \sigma^2 (n-1)/n \neq \sigma^2$$
- نقول عن الإحصائية $\hat{S}^2 = S^2 n/(n-1)$ في معاينة بالإرجاع أنها مقدر غير متحيز لأن: $E(\hat{S}^2) = \sigma^2$

2-1-1-8 الفعالية

المقدر الأكثر فعالية (efficacité) هو المقدر الأقل تباينا.

مثال: كل من متوسط العينة والوسيط في العينة هو مقدر غير متحيز ل μ، لكن تعتبر M مقدرا أكثر فعاليـــة مـــن الوسيط لأن لها خطأ معاينة أقلي:

$$\sigma^2_{méd} = (\sigma^2/n)(\pi/2) > \sigma^2_m = \sigma^2/n.$$



رسم توضيحي 9- 1 فعالية المقدر تتأثر عكسيا بخطأ المعاينة

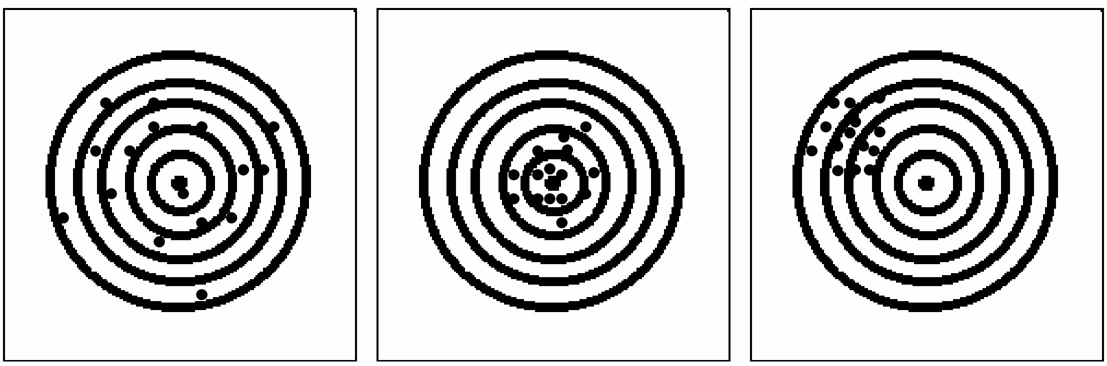
3-1-1-8 التقارب

المقدر المتقارب (convergeant) هو الذي يؤول إلى قيمة المعلمة المقدرة عندما يؤول حجم العينة إلى ما لا نهاية. يتحقق ذلك مثلا بأن يؤول تباينه إلى الصفر.

مثال: يعتبر متوسط العينة مقدرا متقاربا لمتوسط المجتمع لأن:

$$E(m) = \mu \quad , \quad V(m) = \frac{\sigma^2}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

لعله من المناسب توضيح مفاهيم التحيز و الفعالية في التقدير من خلال الرسم التالي لنتائج رمي على هدف ما. في الرسم الأول (إلى اليمين) الرميات متقاربة لكن مركزها منحرف عن الهدف، أما في الرسم الثالث فمركز الرميات ينطبق على الهدف لكن الرميات متباعدة. الحالة الأفضل هي أن يكون الرمي دقيقا ويكون مركزه منطبقا على الهدف وهو ما يعكسه الرسم الأوسط.



**رسم 8-1. تحيز.	عدم تحيز.	قلة دقة أو قلة فعالية .**

2-1-8 مفاهيم حول التقدير النقطي و التقدير بمجال.

1-2-1-8 التقدير النقطي

هو تقدير معلمة المجتمع بقيمة واحدة لإحصائية ما، فنكتب $\hat{\theta} = \theta$ و هذا إذا علمنا أنها مقدر غير متحيز للمعلمة: $E(\hat{\theta}) = \theta$. مثال ذلك E(M) = µ.

8-1-2-2 التقدير بمجال

تحديد مجال معين تنتمي إليه المعلمة المقدرة باحتمال ما، فنكتب: $\theta \in [l_1 \; ; \; l_2]$ ويسمى هذا المجال **مجال الثقة**، كأن نقدر الدخل الشهري للأسرة بأنه ينتمي إلى المجال : [16000 ; 24000] بمستوى ثقة 95%.

8-1-2-3 درجة التأكد أو مستوى الثقة

تحديد مجال الثقة للمعلمة يرفق بتحديد احتمال تحققه، أي باحتمال أن تنتمي المعلمة إلى المجال المذكور. يرمز لهذا الاحتمال ب $(1 - \alpha)$ ويسمى **درجة التأكد** أو **مستوى الثقة**. الاحتمال المعاكس α[1] يسمى **مستوى أو درجة المعنوية**. في الحقيقة يحسب مجال الثقة بناءا على مستوى ثقة محدد مسبقا.

ملاحظة:

- عادة يستخدم الإحصائيون مستوى ثقة 95% (أي مستوى معنوية 5%)، وأحيانا 90%، أو 99%.
- زيادة درجة التأكد تتطلب توسيع مجال الثقة (ما يعني دقة أقل) أو زيادة حجم العينة.

8-1-2-4 معاملات الثقة

معاملات الثقة هي القيم الجدولية للمتغيرة z أو t أو كا2 حسب الحالة.

مثلا بالنسبة للمتغيرة z نعلم أن:

$$P(-1.64 < Z < 1.64) = 0.90,\; P(-1.96 < Z < 1.96) = 0.95,\; P(-2.58 < Z < 2.58) = 0.99$$

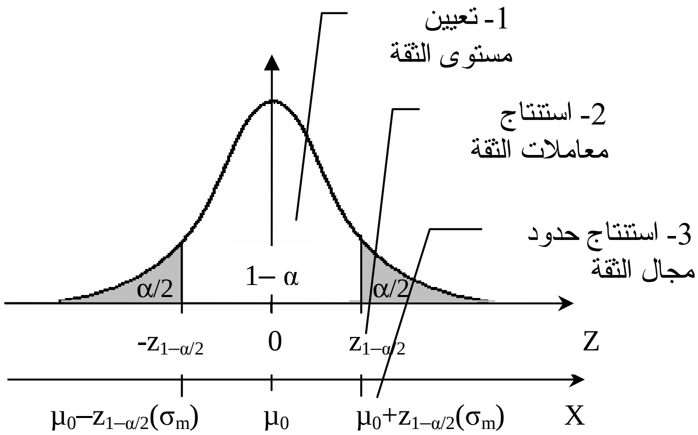
لذلك في حالة استخدام التوزيع الطبيعي للتقدير تكون معاملات الثقة هي :

القيمتين ± 1.64 من أجل مستوى ثقة 90%، ± 1.96 من أجل مستوى ثقة 95% و القيمتين ± 2.58 من أجل مستوى ثقة 99% .

مثال: ليكن μ_s و σ_s متوسط وانحراف معياري توزيع المعاينة لإحصائية ما s حيث $\mu_s = \mu$. إذا كان توزيع المعاينة ل s طبيعيا (كما هو الحال بالنسبة لأغلب الإحصائيات عندما $(n \geq 30)$) فإننا نقدر مثلا وبالنظر إلى توزيع s أن المتغيرة المعيارية ل μ أي z_μ تتراوح بين ± 1.96 باحتمال 95 % ومنه فالمتوسط μ ينتمي إلى المجال:

$$\mu_s \pm \mathbf{z_{1-(\alpha/2)}} \, . \, \sigma_s$$
$$\mu_s \pm \mathbf{1.96} \, . \, \sigma_s$$

[1] فضلنا هنا الاكتفاء بذكر α الذي هو في الحقيقة قيمة معطاة لمستوى المعنوية، هذا الأخير الذي يرمز له عادة ب p . استخدم مصطلح مستوى المعنوية (p-level) لأول مرة من قبل براونلي (Brownlee) في 1960، و يمثل مؤشرا عكسيا لقوة النتيجة الإحصائية (fiabilité du résultat) فمثلا مستوى معنوية أكبر من $p = 0.05$ (20/1) يعني أنه لو كررنا المعاينة 20 مرة لتحققت المشاهدة (مصادفة) مرة واحدة على الأقل.



رسم 9- 2 خطوات استنتاج مجال الثقة

في حالة التوزيع الطبيعي يرمز لمعاملات الثقة ب Z_c أو $Z_{1-\alpha/2}$ (أنظر الرسم)، وفي حالة استخدام توزيع ستيودنت يرمز لمعاملات الثقة ب: t_c أو $t_{1-\alpha/2}$ ونكتب: $\mu_s \pm \mathbf{t}_{1-(\alpha/2)} \cdot \sigma_s$

2-8 طرق التقدير بمجال

كيفية تعيين مجال الثقة لمتوسط مجتمع
مجال الثقة للنسبة في المجتمع
مجال الثقة لتباين مجتمع
مجال الثقة لنسبة تبايني مجتمعين

1-2-8 مجال الثقة لمتوسط مجتمع

يقدر متوسط المجتمع μ من خلال متوسط العينة M، حيث نعلم من نظريات توزيع المعاينة أن: $E(M) = \mu_m = \mu$.
و بحسب مستوى الثقة $(1-\alpha)$ تتحدد معاملات الثقة التي تحسب إما باستخدام التوزيع الطبيعي أو توزيع ستيودنت.

1-1-2-8 تقدير متوسط مجتمع μ باستخدام التوزيع الطبيعي

مبدئيا نستخدم التوزيع الطبيعي لتقدير متوسط المجتمع بمجال إذا علمنا أن المجتمع الذي سحبت منه العينة يتبع التوزيع الطبيعي (أنظر نظرية 4 من فصل توزيع المعاينة).

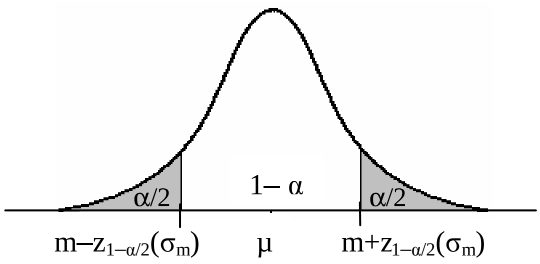
$$X \to N(\mu,\sigma) \Rightarrow M \sim N(\mu, \sigma_m) \Rightarrow z_m = \frac{m-\mu}{\sigma_m} \sim N(0,1) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} 1-\alpha &= P\left(-z_c \le \frac{m-\mu}{\sigma_m} \le +z_c\right) \\ &= P\left(-z_c\sigma_m \le m-\mu \le +z_c\sigma_m\right) \\ &= P\left(-m-z_c\sigma_m \le -\mu \le -m+z_c\sigma_m\right) \\ &= P\left(m-z_c\sigma_m \le \mu \le m+z_c\sigma_m\right) \end{aligned}$$

و لدينا $\sigma_m = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ إذن: $1-\alpha = P\left(m - z_c\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le m + z_c\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

فتصبح حدود مجال الثقة هي: $m \pm z_c \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

و نكتب: $\mu \in \left(m - z_c \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \; ; \; m + z_c \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$ بمستوى ثقة $1 - \alpha$.



رسم 9- 2 مجال الثقة

يمكن أيضا، استنادا إلى قانون النهاية المركزية[1]، استخدام التوزيع الطبيعي لتقدير M حتى إذا كان المجتمع مجهول التوزيع بشرط أن تكون العينة ممتدة ($n \geq 30$) (أنظر النظرية 5 من الفصل السابق).

إذا كان الانحراف المعياري للمجتمع σ معلوما لكن المجتمع محدود (ذا حجم N) والمعاينة نفادية نكتب حدود مجال الثقة لمتوسط المجتمع μ كما يلي: $m \pm z_c \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\dfrac{N-n}{N-1}}$

الجدول الآتي يبين قيم معاملات الثقة z_c (حدود مجال الثقة) بحسب مستوى الثقة:

جدول 8 - 1 معاملات الثقة في حالة استخدام التوزيع الطبيعي في التقدير

مستوى الثقة $1-\alpha$	0.99	0.98	0.95	0.90	0.8	0.5
مستوى المعنوية α	0.01	0.02	0.05	0.10	0.2	0.5
$1-\alpha/2$	0.995	0.99	0.975	0.95	0.9	0.75
$Z_{1-\alpha/2}$	**2.58**	**2.326**	**1.96**	**1.645**	**1.282**	**0.674**

مثال : نقدر أن μ يوجد داخل المجال $m \pm 1.96\sigma_m$ بمستوى ثقة 95 % (0.95) أي بمستوى معنوية 5 % (0.05)، وداخل المجال $m \pm 2.58\sigma_m$ بمستوى ثقة 99 % أي بمستوى معنوية 0.01…

2-1-2-8 **تقدير متوسط المجتمع μ باستخدام التوزيع t**

يستخدم توزيع ستيودنت لتحديد مجال الثقة للمتوسط إذا كان المجتمع طبيعيا (أو على الأقل جرسي الشكل) والعينة صغيرة ($n < 30$) و σ مجهول (وفي الغالب يكون كذلك). يمكن إثبات ذلك كما يلي: بما أن المجتمع طبيعي فإن متوسط العينة هو الآخر طبيعي ومنه $\dfrac{m-\mu}{\sigma_m} \sim N(0,1)$ وكذلك $nS^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{(n-1)}$. بالتعويض في تعريف المتغيرة $t = \dfrac{Y}{\sqrt{Z/\nu}}$ نجد:

[1] التي تخص في الحقيقة توزيع مجموع قيم العينة -في حالة كون العينة كبيرة بما فيه الكفاية- وليس المتوسط.

$$\frac{\dfrac{m-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\dfrac{nS^2}{\sigma^2}\ /\ (n-1)}} \sim t_{n-1} => \frac{m-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\cdot\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}\cdot S/\sigma} = \frac{\sqrt{n}(m-\mu)}{\sigma}\cdot\frac{\sigma\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}\cdot S} \sim t_{n-1} =>$$

$$\boxed{\frac{(m-\mu)}{S/\sqrt{n-1}} \sim t_{n-1}}$$

و منه يمكن استخدام توزيع ستيودنت لتقدير μ بمجال فنكتب حدود مجال الثقة كما يلي:

$$\mu \in \left[m - t_{1-\alpha/2;n-1}\frac{S}{\sqrt{n-1}}\ ;\ m + t_{1-\alpha/2;n-1}\frac{S}{\sqrt{n-1}} \right]$$

ملاحظة: في حالة استخدام الانحراف المعياري المعدل نكتب $\frac{m-\mu}{\hat{S}/\sqrt{n}} \to t_{n-1}$ ونكتب مجال الثقة كما يلي:

$$\mu \in \left[m - t_{1-\alpha/2;n-1}\frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}\ ;\ m + t_{1-\alpha/2;n-1}\frac{\hat{S}}{\sqrt{n}} \right]$$

مثال2. نريد تقدير متوسط مجتمع طبيعي، بمستوى ثقة 0.95، انطلاقا من عينة حجمها 10 متوسطها 15 و انحرافها المعياري 27.

لدينا $\frac{(m-\mu)}{S/\sqrt{n-1}} \sim t_{n-1}$ إذن:

$$\mu \in \left[m - t_{1-\alpha/2,n-1}\frac{S}{\sqrt{n-1}}\ ;\ m - t_{1-\alpha/2,n-1}\frac{S}{\sqrt{n-1}} \right] \Rightarrow$$

$$\mu \in \left[15 - t_{0.975,10-1}\frac{27}{\sqrt{10-1}}\ ;\ 15 + t_{0.975,10-1}\frac{27}{\sqrt{10-1}} \right] \Rightarrow$$

$$\mu \in [15-2,262(3)\ ;\ 15+2,262(3)\ ] \Rightarrow \mu \in [8.214\ ;\ 21.687]$$

ملاحظة:

في حالة العينة الممتدة (أكبر من 30) يؤول توزيع ستيودنت إلى التوزيع الطبيعي المعياري لذلك نستخدم هذا الأخير في هذه الحالة أيضا و نكتب بالتالي حدود مجال الثقة كما يلي:

$$m\ \pm\ z_c\cdot\frac{S}{\sqrt{n-1}} \text{ أو } m \pm z_c\frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}$$

و نكتب بالتالي مجال الثقة كما يلي: $\mu \in \left[m - z_c\frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}\ ;\ m + z_c\frac{\hat{S}}{\sqrt{n}} \right]$

3-1-2-8 تعيين حجم العينة المناسب لدقة معينة.

قد نرغب في تحديد حجم العينة اللازم لتحقيق **مقدار دقة** و مستوى ثقة معينين. يقصد بمقدار الدقة m – μ. في حالة استخدام التوزيع الطبيعي في التقدير نستنتج حجم العينة بدلالة **مقدار دقة** و مستوى ثقة كما يلي:

$$m = \mu + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow m-\mu = z\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \frac{(m-\mu)}{\sigma(z)} = 1/\sqrt{n} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{\sigma(z)}{m-\mu} \Rightarrow n = \left(\frac{z\sigma}{m-\mu}\right)^2$$

2-2-8 مجال الثقة للنسبة في مجتمع

1-2-2-8 حالة المجتمع غير المحدود أو كون المعاينة غير نفادية

لتكن p' تمثل نسبة "نجاحات" في عينة ذات حجم $n \geq 30$ مستخرجة من مجتمع طبيعي، حيث p هي نسبة النجاحات في المجتمع. نعلم من نظرية توزيع المعاينة أن $p' \sim N(p, \sigma_{p'})$. بنفس الطريقة المستخدمة بالنسبة للمعلمة μ أعلاه نستنتج أن p تنتمي إلى المجال ذي الحدود $p' \pm z_c\sigma_{p'}$. في حالة المعاينة غير النفادية نعلم أن $\sigma_{p'} = \sqrt{\dfrac{pq}{n}}$

ومنه يحدد مجال الثقة ل p بالحدود:

$$p' \pm z_c \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

لكن p مجهولة لذلك نعوض p ب p' و نكتب بالتالي مجال الثقة للنسبة كما يلي:

$$p \in \left[p' - z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p'q'}{n}} \ ; \ \ p' \pm z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p'q'}{n}} \right]$$

في حالة كون المجتمع محدود ذا حجم N والمعاينة نفادية نستخدم معامل الإرجاع عند حساب $\sigma_{p'}$:

$$\sigma_{p'} = \sqrt{\frac{p'(1-p')}{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

مثال. سحبنا عينة حجمها 31 من علامات الطلبة في امتحان الإحصاء الرياضي لدفعة 2008 و عددها 300 فكانت كالتالي:

3، 18.5، 10.5، 19.5، 11.5، 14، 11، 16.5، 18، 7.5، 3.5، 2.5، 2.5، 8.5، 10.5، 8.5، 2، 5، 12، 1.5، 5.5، 8.5، 6، 15، 6، 6، 10، 2.5، 1، 2.5، 3.

قدر نقطيا و بمستوى ثقة 0.90 نسبة الطلبة الحاصلين على العلامة عشرة أو أكثر في الكلية.

لدينا 12 نقطة أكبر أو تساوي العشرة $(n_a = 12)$ إذن: $p' = 12/31 = 0.387$ و نكتب:

$$\hat{p} = p' = 0.387 = 38.7\%$$

بالنظر لحجم العينة يمكن استخدام التوزيع الطبيعي في التقدير. بما أن المجتمع محدود والعينة نفادية (الأصل أن تكـــون كذلك) نستخدم معامل الإرجاع والذي لا يمكن إهماله في هذه الحالة لأن $n > 0.05N$.

مجال الثقة يكتب كما يلي:

$$p \in \left[p' - z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma_{p'} \ ; \ \ p' + z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma_{p'} \right]$$

$$\sigma_{p'} = \sigma_{p'} \sqrt{\frac{p'q'}{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \sqrt{\frac{0.387(1-0.387)}{31}} \sqrt{\frac{300-31}{300-1}} = 0.0048$$

$$z_{1-\alpha/2} = z_{1-0.1/2} = z_{0.95} = 1.64$$

$$p \in \left[0.387 - 1.64(0.0048) \ ; \ 0.387 + 1.64(0.0048) \ \right] \Rightarrow p \in \left[0.379 \ ; \ 0.395\right]$$

مثال2. بتفحص الملفات الطبية لعينة من 100 مدخن تبين أن 40 منهم أصيبوا بمرض معين. كيف يمكن تقدير نسبة الإصابة بالمرض لدى المدخنين بمستوى ثقة 90 بالمائة.

الحل: العينة كبيرة إذن يمكن استخدام التوزيع الطبيعي في التقدير. نفترض أن N كبير (عدد المدخنين) بحيـــث : $n/N < 0.05$

$$p \in \left[p' - z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma_{p'} \; ; \; p' + z_{1-\alpha/2} \cdot \sigma_{p'}\right]$$

$$\sigma_{p'} = \sqrt{\frac{p'q'}{n}} = \sqrt{\frac{0.4(1-0.4)}{100}} = 0.049$$

$$z_{1-\alpha/2} = z_{1-0.1/2} = z_{0.95} = 1.64$$

$$p \in [0.4 - 1.64(0.049) \; ; \; 0.4 + 1.64(0.049)] \Rightarrow p \in [0.32 \; ; \; 0.48]$$

2-2-2-8 تحديد حجم العينة وفقا لخطأ المعاينة.

نعلم أن خطأ المعاينة مرتبط بحجم العينة، لذلك يمكن تحديد حجم العينة الموافق لقيمة معينة لتباين المقدر p' ويكون ذلك حسب استخدام معامل الإرجاع أو لا.

- في حالة عدم استخدام معامل الإرجاع أي $\sigma^2_{p'} = \frac{p'q'}{n}$ نحسب حجم العينة المناسب كما يلي:

$$\sigma^2_{p'} = \frac{p'q'}{n} \Rightarrow n = \frac{p'q'}{\sigma^2_{p'}}$$

- أما إذا توجب استخدام معامل الإرجاع فإن استنتاج حجم العينة المناسب يكون كالتالي:

$$\sigma^2_{p'} = \frac{p'q'}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right) = \frac{p'q'N - p'q'n}{n(N-1)} = \frac{p'q'N}{n(N-1)} - \frac{p'q'}{N-1} = \frac{p'q'}{N-1}\left(\frac{N}{n} - 1\right)$$

$$\Rightarrow \sigma^2_{p'} \frac{N-1}{p'q'} + 1 = \frac{N}{n} \Rightarrow \frac{1}{n} = \frac{1}{N}\left(\sigma^2_{p'} \frac{N-1}{p'q'} + 1\right)$$

$$\Rightarrow n = N \Big/ \left(\sigma^2_{p'} \frac{N-1}{p'q'} + 1\right)$$

3-2-8 مجال الثقة للتباين وللانحراف المعياري لمجتمع طبيعي

ليكن لدينا مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي $N(\mu, \sigma)$ بتباين مجهول. نريد تقدير هذا التباين. تختلف طريقة التقدير حسب كون متوسط المجتمع μ معلوما أو لا.

1-3-2-8 في حالة كون متوسط المجتمع μ معلوما

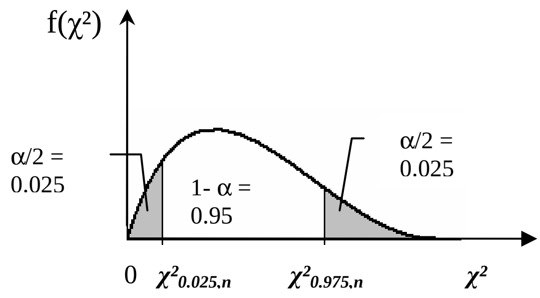
نعلم من نظرية المعاينة أن $\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_n$ حيث $\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_i (x_i - \mu)^2}{n}$ و x_i مفردات عينة عشوائية بسيطة من المجتمع.

نستنتج أنه من أجل أي مستوى ثقة $1 - \alpha$:

$$P\left(\chi^2_{\alpha/2;n} \le \frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \le \chi^2_{1-\alpha/2;n}\right) = 1 - \alpha$$

مثال: الاحتمال $1\text{-}\alpha = 0.95$ لمجال الإحصائية $\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}$ يكتب كما يلي:

$$P\left(\chi^2_{0.025;n} \le \frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \le \chi^2_{0.975;n}\right) = 0.95$$



رسم 8 -1 حدود مجال لمتغيرة تتبع توزيع ك2

من الصيغة العامة لمجال الإحصائية $P\left(\chi^2_{\alpha/2;n} \le \frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \le \chi^2_{1-\alpha/2;n}\right) = 1-\alpha$ نستنتج مجال الثقة للتباين كما يلي:

$$\Rightarrow P\left(\frac{\chi^2_{\alpha/2;n}}{n\hat{\sigma}^2} \le \frac{1}{\sigma^2} \le \frac{\chi^2_{1-\alpha/2;n}}{n\hat{\sigma}^2}\right) = 1-\alpha \Rightarrow P\left(\frac{n\hat{\sigma}^2}{\chi^2_{1-\alpha/2;n}} \le \sigma^2 \le \frac{n\hat{\sigma}^2}{\chi^2_{\alpha/2;n}}\right) = 1-\alpha$$

ومنه:

$$\sigma^2 \in \left(\frac{n\hat{\sigma}^2}{\chi^2_{1-\alpha/2;n}} \; , \; \frac{n\hat{\sigma}^2}{\chi^2_{\alpha/2;n}}\right)$$

2-3-2-8 في حالة كون متوسط المجتمع μ غير معلوم

نستعمل المتوسط الحسابي للعينة M كمقدر ل μ:

$$\hat{S}^2 = \frac{\sum_i (x_i - m)^2}{n-1}$$

من الخاصية: $\frac{nS^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)\hat{S}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$، نستنتج أنه من أجل أي مستوى ثقة $1-\alpha$:

$$P\left(\chi^2_{\alpha/2;n-1} \le \frac{nS^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)\hat{S}^2}{\sigma^2} \le \chi^2_{1-\alpha/2;n-1}\right) = 1-\alpha \Rightarrow$$

$$P\left(\frac{1}{\chi^2_{1-\alpha/2;n-1}} \le \frac{\sigma^2}{nS^2} = \frac{\sigma^2}{(n-1)\hat{S}^2} \le \frac{1}{\chi^2_{\alpha/2;n-1}}\right) = 1-\alpha \Rightarrow$$

$$P\left(\frac{nS^2}{\chi^2_{1-\alpha/2;n-1}} \le \sigma^2 \le \frac{nS^2}{\chi^2_{\alpha/2;n-1}}\right) = P\left(\frac{(n-1)\hat{S}^2}{\chi^2_{1-\alpha/2;n-1}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)\hat{S}^2}{\chi^2_{\alpha/2;n-1}}\right) = 1-\alpha$$

ومنه نستنتج مجال الثقة لتباين المجتمع:

$$\sigma^2 \in \left(\frac{(n-1)\hat{S}^2}{\chi^2_{1-\alpha/2;n-1}} \; , \; \frac{(n-1)\hat{S}^2}{\chi^2_{\alpha/2;n-1}}\right) \quad \text{أو} \quad \sigma^2 \in \left(\frac{nS^2}{\chi^2_{1-\alpha/2;n-1}} \; , \; \frac{nS^2}{\chi^2_{\alpha/2;n-1}}\right)$$

وكذا **مجال الثقة ل σ** كما يلي:

$$\sigma \in \left(\frac{\hat{S}\sqrt{n-1}}{\sqrt{\chi^2_{1-\alpha/2;n-1}}} \; , \; \frac{\hat{S}\sqrt{n-1}}{\sqrt{\chi^2_{\alpha/2;n-1}}}\right) \quad \text{أو} \quad \sigma \in \left(\frac{S\sqrt{n}}{\sqrt{\chi^2_{1-\alpha/2;n-1}}} \; , \; \frac{S\sqrt{n}}{\sqrt{\chi^2_{\alpha/2;n-1}}}\right)$$

نظرا لأن توزيع ك2 غير متماثل فإن المجال أعلاه ليس الأمثل، إذ توجد طريقة لتضييق مجال الثقة أكثر إذا لم نشأ أن تكون أطراف المنحنى متساوية، وهذا بخلاف التوزيعات المتماثلة كالطبيعي وستيودنت.

4-2-8 مجالات الثقة لنسبة تبايني مجتمعين

رأينا سابقا (فصل توزيع المعاينة) أنه إذا كان لدينا مجتمعان طبيعيان تبايناهما σ^2_1 , σ^2_2 وسحبنا منهما عينتان عشوائيتان حجميهما على التوالي n_1 , n_2 فإن :

$$\frac{\hat{S}_1^2 / \sigma_1^2}{\hat{S}_2^2 / \sigma_2^2} \to F_{n_1-1;\ n_2-1}$$

$$\Rightarrow P\left(F_{\alpha/2, n_1-1, n_2-1} \le \frac{\hat{S}_1^2 / \sigma_1^2}{\hat{S}_2^2 / \sigma_2^2} \le F_{1-\alpha/2, n_1-1, n_2-1} \right) = 1-\alpha$$

ومنه يمكن كتابة مجال الثقة عند مستوى ثقة $(1-\alpha)$ لنسبة تباين المجتمع الأول إلى تباين المجتمع الثاني كما يلي:

$$\frac{\hat{S}_1^2 / \hat{S}_2^2}{F_{1-\alpha/2, n_1-1, n_2-1}} \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le \frac{\hat{S}_1^2 / \hat{S}_2^2}{F_{\alpha/2, n_1-1, n_2-1}}$$

مثلا عند مستوى ثقة 0.98 نكتب:

$$\frac{\hat{S}_1^2}{\hat{S}_2^2} / F_{0.99, n_1-1, n_2-1} \le \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le \frac{\hat{S}_1^2}{\hat{S}_2^2} / F_{0.01, n_1-1, n_2-1}$$

5-2-8 خلاصة

لتقدير إحصائية مجتمع نستخدم نظريات توزيع المعاينة. تتناول هذه النظريات خصائص إحصائيات العينة من متوسط العينة، النسبة في العينة، ... وعلاقتها بالإحصائيات المناظرة لها في المجتمع.

لتكوين مجال ثقة لمعلمة ما θ للمجتمع بمستوى ثقة ما نتبع الخطوات التالية:

- نحدد مقدر $\hat{\theta}$ ل θ من خلال عينة عشوائية بسيطة.
- نحدد القانون الاحتمالي للمقدر $\hat{\theta}$ (M مثلا قد تتبع ت ط أو ستيودنت) أو لمتغيرة مرتبطة به (بالنسبة ل σ^2 نعلم أن $nS^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-1}$).
- نحدد صيغة حدود مجال الثقة l_1 وl_2 بحيث نحصل على العبارة: $P(l_1 \le \theta \le l_2) = 1-\alpha$
- نحدد معاملات الثقة ($\pm z_{1-\alpha/2}$ في حالة التوزيع الطبيعي، $\pm t_{1-\alpha/2}$ في حالة التوزيع T...) ثم احسب l_1 وl_2.

جدول 8- 2 توزيع المعاينة للمتوسط حسب طبيعة توزيع المجتمع، معلومية التباين وحجم العينة.

المعلمة المقدرة	قانون المجتمع	تباين المجتمع (σ^2)	n	خطأ المعاينة σ_m	قانون M
متوسط المجتمع μ	طبيعي	معلوم	$n < 30$ أو $n \geq 30$	$\sigma_m = \sigma/\sqrt{n}$	$M \sim N(\mu\ ; \sigma/\sqrt{n})$
		غير معلوم	$n < 30$	$\hat{\sigma}_m = \dfrac{\hat{S}}{\sqrt{n}} = \dfrac{S}{\sqrt{n-1}}$	$\dfrac{m-\mu}{S/\sqrt{n-1}} = \dfrac{m-\mu}{\hat{S}/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$
			$n \geq 30$		$M \approx N(\mu\ ; \hat{S}/\sqrt{n})$
	غير معلوم	معلوم	$n \geq 30$	$\sigma_m = \sigma/\sqrt{n}$	$M \approx N(\mu\ ; \sigma/\sqrt{n})$
		غير معلوم	$n \geq 100$	$\hat{\sigma}_m = \dfrac{\hat{S}}{\sqrt{n}} = \dfrac{S}{\sqrt{n-1}}$	$M \approx N(\mu\ ; \hat{S}/\sqrt{n})$

جدول 8- 3 تحديد مجال الثقة للنسبة، للتباين وللنسبة بين تباينين

المعلمة المقدرة	المجتمع	التوزيع الاحتمالي المستخدم	حدود مجال الثقة
النسبة في المجتمع p	مجتمع غير محدود أو عينة غير نفادية و ممتدة (n≥30)	$p' \approx N(p, \sigma_{p'})$	$p' \pm z_c \cdot \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$
	مجتمع محدود معاينة نفادية		$p' \pm z_c \cdot \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}} \cdot \sqrt{\dfrac{N-n}{N-1}}$
تباين المجتمع σ^2	مجتمع طبيعي بمتوسط معلوم	$\dfrac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_n$	$\sigma^2 \in \left(\dfrac{n\hat{\sigma}^2}{\chi^2_{1-\alpha/2;n}} , \dfrac{n\hat{\sigma}^2}{\chi^2_{\alpha/2;n}} \right)$
	مجتمع طبيعي بمتوسط غير معلوم	$\dfrac{nS^2}{\sigma^2} = \dfrac{(n-1)\hat{S}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$	$\sigma^2 \in \left(\dfrac{(n-1)\hat{S}^2}{\chi^2_{1-\alpha/2;n-1}} , \dfrac{(n-1)\hat{S}^2}{\chi^2_{\alpha/2;n-1}} \right)$
نسبة تبايني مجتمعين	عينتين ع من مجتمعين طبيعيين أو من مجتمع طبيعي واحد.	$: \dfrac{\hat{S}_1^2 / \sigma_1^2}{\hat{S}_2^2 / \sigma_2^2} \to F_{n_1-1;\ n_2-1}$	$\dfrac{\hat{S}_1^2 / \hat{S}_2^2}{F_{1-\alpha/2, n_1-1, n_2-1}} \le \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \le \dfrac{\hat{S}_1^2 / \hat{S}_2^2}{F_{\alpha/2, n_1-1, n_2-1}}$

6-2-8 ملحق. مجالات الثقة للفروق والمجاميع

إذا كانت s_1 وs_2 إحصائيتا معاينة لها توزيع يقترب من التوزيع الطبيعي، والعينتان مستقلتان، تكتب حدود الثقة للفروق بين المعالم التي تمثلها الإحصائيتين كما يلي:

$$S_1 - S_2 \ \pm\ z_c \cdot \sigma_{S_1 - S_2} = S_1 - S_2 \ \pm\ z_c \cdot \sqrt{\sigma^2{}_{S_1} + \sigma^2{}_{S_2}}$$

في حالة المجموع :

$$S_1 + S_2 \ \pm\ z_c \cdot \sigma_{S_1 - S_2} = S_1 + S_2 \ \pm\ z_c \cdot \sqrt{\sigma^2{}_{S_1} + \sigma^2{}_{S_2}}$$

مثال: إذا كانت الإحصائيتان هما متوسطا عينتين مستقلتين، مسحوبتين من مجتمعين غير محدودين، نحدد مجال الثقة للفرق (و للمجموع) بين متوسطي المجتمعين $\mu_1 - \mu_2$ كما يلي :

$$m_1 - m_2 \ \pm\ z_c \cdot \sigma_{m_1 - m_2} = m_1 - m_2 \ \pm\ z_c \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

مثال 2: إذا كانت الإحصائيتان هما نسبتان في عينتين مستقلتين، مسحوبتان من مجتمعين غير محدودين :

$$p'_1 - p'_2 \ \pm\ z_c \cdot \sigma_{p'_1 - p'_2} = p'_1 - p'_2 \ \pm\ z_c \cdot \sqrt{\frac{pq_1}{n_1} + \frac{pq_2}{n_2}}$$

3-8 طرق تأسيس المقدر[1]

طريقة العزوم
طريقة المعقولية العظمى (الاحتمال الأكبر)

أحد الطرق لاختيار مقدر معلمة ما للمجتمع أن نأخذ مباشرة نظيرتها في العينة، وإذا كان هذا المقدر لا يتصف بالخصائص المطلوبة نجري عليه تعديلا (استخدام $\hat{S}^2$ بدلا من S^2 لتقدير σ^2). توجد طرق أخرى لتحديد المقدر الأنسب منها طريقة المعقولية العظمى والتي تدعى أيضا طريقة الاحتمال الأكبر والتي تنسب إلى العالم فيشر وكذا طريقة العزوم.

1-3-8 طريقة العزوم

ليكن المطلوب تقدير عدد K من معالم المجتمع : $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$. نكون جملة معادلات عددها K. تتضمن كل معادلة مساواة العزم المرتبط بالأصل من الدرجة k لمتغيرة المجتمع X : $\mu'_k = E(X^k)$، بنظيره لمتغيرة المعاينة x :

$$m'_k = (1/n)\sum_i x_i^k \qquad k = 1, 2, \quad , K$$

مثال: ليكن $X \sim B(20; p)$. تقدير p بطريقة العزوم انطلاقا من عينة يتم كما يلي:

لدينا عدد المعالم المراد تقديرها $K = 1$ إذا نحتاج إلى معادلة واحدة : $\mu = 20p$. ومنه $p = 20/\mu$، نأخذ إذا كمقدر لp القيمة: p' ونحسبها كما يلي : $p' = m/20$.

في حالة تقدير معلمتين للمجتمع نحتاج أن نستعمل جملة المعادلتين: $\mu = m \;,\; \mu'_2 = m'_2$

مثال2 : لتكن $X \sim N(\mu; \sigma^2)$. نسحب عينة ذات متوسط m، وتباين S^2. لتقدير μ وσ^2 نحتاج إلى حل جملة المعادلتين:

$$\begin{cases} \mu'_2 = m'_2 \\ \mu = m \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} \mu'_2 = \mu^2 + \sigma^2 \\ m'_2 = m^2 + S^2 \end{cases}$$

الحل هو:

$$\begin{cases} \hat{\mu} = m \\ \hat{\sigma}^2 = S^2 \end{cases}$$

هذه الطريقة قد تعطي مقدرات غير متحيزة كما في هذه الحالة.

2-3-8 طريقة المعقولية العظمى (طريقة الاحتمال الأكبر)

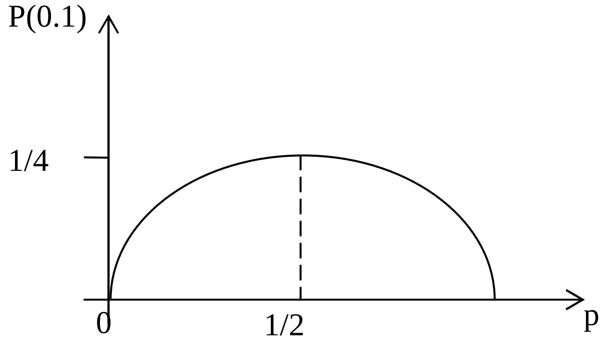
حالة كون متغيرة المجتمع متقطعة : نريد تقدير معلمة θ واحدة للمجتمع، ولدينا عينة غير نفادية (المتغيرا ت التي تمثل قيم المحصل عليها في العينة مستقلة) لها نفس التوزيع للمجتمع. من البديهي أن احتمال تحقق عينة بذاتها مرتبط ب قيمة المعلمة المجهولة : $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = L(\theta)$. هناك قيمة ل θ تعظم احتمال الحصول على العينة المحصل عليها، ونفترض أن تلك القيمة هي الصحيحة بما أن العينة حصلت بالفعل. تتمثل طريقة المعقولية العظمى في البحث عن هذه القيمة. أي البحث عن θ التي تعظم $L(\theta)$ ، حيث :

$$L(\theta) = f(x_1, \ldots, x_n ; \theta) = f(x_1) . f(x_2) \ldots f(x_n).$$

[1] دراوزبيك، 1997 ، ص.308 .

تعتمد طريقة المعقولية العظمى على تعظيم دالة الاحتمال المشتركة $L(\theta)$.

مثال: ليكن $X \sim B(p)$، حيث النجاح هو وجود الخاصية " أ " لدى فرد مسحوب عشوائيا من المجتمع. نرد تقدير p من خلال عينة حجمها 2. ما هي القيمة p' ل p التي تجعل النتيجة 1، 0 هي الأكثر احتمالا؟ أي ما هي p' التي تجعل $p(0.1) = pq$ أكبر ما يمكن؟



رسم 8 -2 أقصى قيمة ل P(0,1)

من الواضح أن أكبر قيمة ل$p(0.1)$ هي ¼ والقيمة التي تحققها هي $p' = 1/2$ ، وبهذا نجيب على التساؤل.