المحور الثاني: مشكلة النقل

تعتبر مشكلة النقل حالة خاصة من البرمجة الخطية والتي يمكن حلها بطريقة بطريقة "simplex"[1] ولكن نظرا لصعوبة تكوين البرنامج الخطي لمشكلة النقل وكذلك طبيعة الجدول الكبير والمعقد الممثل للمشكلة النقل، يصعب التعامل مع الأرقام الموجودة فيه، فعادة ما تستعمل طرق أخرى أكثر سهولة، ولكن تسير بنفس مبادئ طريقة "simplex"، أي إيجاد حل قاعدي أو ابتدائي، ثم محاولة تحسين الحل الابتدائي حتى الوصول للحل الأمثل.

في ما يخص بالمرحلة الأولى (مرحلة إيجاد الحل القاعدي) هناك ثلاث طرق مختلفة من حيث السهولة وقربها من الحل الأمثل يمكن اعتمادها في هذه المرحلة هي:

- طريقة الزاوية الشمالية الغربية؛
- الحل بطريقة أقل التكاليف؛
- طريقة الفروقات الكبرى (طريقة "فوجل" "R.W.Vogel").

أما في ما يخص بالمرحلة الثانية (مرحلة إيجاد الحل الأمثل) فهناك طريقتين هما:

- طريقة التجريب.
- طريقة التحويل.

ورغبة منا في تقديم أفضل الطرق التي يمكن أن توصلنا إلى الحل الأمثل، سنعتمد حسب رأينا على طريقة (الفروقات الكبرى) في المرحلة الأولى، وطريقة (التحويل) في المرحلة الثانية.

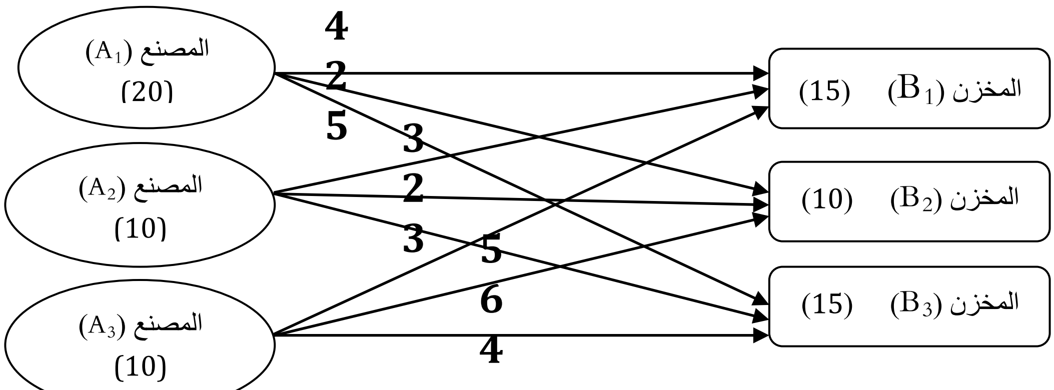
أولا: مشكلة النقل في حالة تساوي العرض مع الطلب.

يمكن توضيح الخصائص العامة لهذه المشكلة من خلال المثال التالي:

مثال (1): نفرض أن مشروعا معينا في مدينة ما، يمتلك ثلاث مصانع (A_1،A_2،A_3) تنتج نوع من الثلاجات، وأن الطاقة الإنتاجية لهذه المصانع الثلاثة هي على التوالي:(20،10،10)، ونفرض أيضا أن هذا الإنتاج (الثلاجات) يتم نقله إلى ثلاث مخازن (B_1،B_2،B_3) في أماكن مختلفة طاقتها التخزينية هي على التوالي:(15،10،15)، ويتم نقل هذه الثلاجات من المصنع (A_1) إلى المخازن (B_1،B_2،B_3) بتكلفة (4،2،5)ون للثلاجة الواحدة على التوالي، كما يتم نقل الثلاجات من المصنع (A_2) إلى المخازن الثلاثة بتكلفة (3،2،3)ون على التوالي، كذلك يتم نقل الثلاجات من المصنع (A_3) إلى المخازن (B_1،B_2،B_3) بتكلفة (5،6،4)ون للثلاجة الواحدة على التوالي.

الان يمكن توضيح هذه المشكلة بيانيا بحيث تتضح فيها المصانع الثلاثة والمخازن الثلاثة، مصحوبة بالطاقات الإنتاجية، كما تمثل الأسهم خطوط النقل من المصانع إلى المخازن مع تكلفة نقل كل وحدة.

[1] لطريقة (semplex): راجع مقياس رياضيات المؤسسة (سنة ثانية ليسانس).



المطلوب: تحديد أحسن شبكة لنقل الثلاجات إلى المخازن بأقل تكلفة ممكنة.

- ❖ إذا رمزنا للكمية من الثلاجات التي يجب نقلها من كل المصنع (Ai) إلى كل المخزن (Bj) بـ (X_{ij}).

i: رقم المصنع j: رقم المخزن

مثلا: الكمية التي يجب نقلها من المصنع (A_2) إلى كل المخزن (B_1) هي: (X_{21})

- ❖ إذا رمزنا لتكلفة نقل الثلاجات من كل المصنع إلى كل المخزن بـ (C_{ij}).

مثلا: تكلفة نقل ثلاجة واحدة من المصنع (A_2) إلى كل المخزن (B_1) هي: ($C_{21}=3$)

ومنه التكلفة الكلية التي يجب تخفيضها لنقل كل الوحدات من الثلاجات تكون على النحو التالي:

$$Min\ Z = \sum_{i=1}^{n:\text{عدد المصانع}} \sum_{j=1}^{m:\text{عدد المخازن}} C_{ij} * X_{ij}.$$

- ❖ إذا فرضنا أن الكميات المتاحة التي ينتجها كل مصنع تنقل كلها إلى المخازن (العرض40=الطلب40).
- ❖ إذا رمزنا للطاقة الإنتاجية للمصانع بـ (a_i) والطاقة التخزينية بـ (b_j) فإن القيود المشكلة سوف تكون على النحو التالي:

الطاقة الإنتاجية

$$\begin{cases} X_{11} + X_{12} + X_{13} = a_1 = 20. \\ X_{21} + X_{22} + X_{23} = a_2 = 10. \\ X_{31} + X_{32} + X_{33} = a_3 = 10. \end{cases}$$

… … … … … … … … … … … ….

الطاقة التخزينية

$$\begin{cases} X_{11} + X_{21} + X_{31} = b_1 = 15. \\ X_{12} + X_{22} + X_{32} = b_2 = 10. \\ X_{13} + X_{23} + X_{33} = b_3 = 15. \end{cases}$$

$$X_{ij} \geq 0.$$

من أجل حل مشكلة النقل أعلاه يمكن استعمال طريقة "simplex"، ولكن نظرا لصعوبة حلها تستعمل طرق أخرى أكثر سهولة، منها طريقة (فوجل) لإيجاد الحل الابتدائي، وطريقة (التحويل) لإيجاد الحل الأمثل.

1- المرحلة الأولى: إيجاد الحل الابتدائي (طريقة الفروقات الكبرى "طريقة فوجل"): تسمح لنا هذه الطريقة بإيجاد جدول الحل الابتدائي عادة ما يكون قريب من جدول الحل الأمثل مقارنة بالطرق الأخرى، ويمكن تلخيص خطوات إيجاد التكلفة القاعدية حسب هذه الطريقة في النقاط التالية:

❖ رسم جدول التكاليف الأحادية كما هو موضح في ما يلي:

المصانع / المخازن	B1	B2	B3	b_j
A1	4	2	5	15
A2	3	2	3	10
A3	5	6	4	15
a_i	20	10	10	40

❖ نقوم بتحديد أقل تكلفتين في كل صف وعمود من الجدول، ثم نحسب الفرق بينهما في كل صف ونسجلهم على يسار الجدول، وفي كل عمود ونسجلهم أعلى الجدول، ثم نحدد العمود أو الصف الذي يقابل اكبر فرق.

	المصانع / المخازن	B1	B2	B3	b_j
		4-3=1	6-2=4	4-3=1	
4-2=2	A1	4	2	5	15
3-2=1	A2	3	2	3	10
5-4=1	A3	5	6	4	15
	a_i	20	10	10	40

ملاحظة (1): في حالة وجود عدة فروق كبرى متساوية، يجب أن نختار ذلك الفرق الذي يقابل العمود أو الصف الذي توجد فيه أصغر تكلفة نقل (C_{ij})، وإذا كانت الخانات ذات التكلفة الأصغر أيضا متساوية (متعددة)، فنختار تلك التي يكون مجموع الفروق المقالة لها في الصف والعمود هو الأكبر.

ملاحظة (2): إذا كانت تكلفتان صغيرتان أو أكثر في العمود أو الصف متساويتان، فنحسب الفرق بين إحدى هاتين المتكلفتين والتكلفة الأكبر منها مباشرة.

❖ من العمود المحدد في الخطوة السابقة، نحدد أقل تكلفة منه، ثم نملؤها بأقل قيمة من (a_i و b_j) المقابلتان لها.

		1	4	1	
	المصانع / المخازن	B1	B2	B3	b_j
2	A1	4	2 10	5	15
1	A2	3	2	3	10
1	A3	5	6	4	15
	a_i	20	10	10	40

❖ بعد هذا نشطب الصف أو العمود الذي تشبع تماما ونعيد حساب الفروقات الجديدة.

		1	-	1	
	المصانع / المخازن	B1	B2	B3	b_j
1	A1	4	2 10	5	5
1	A2	3	2 /	3	10
1	A3	5	6 /	4	15
	a_i	20	0	10	40

❖ نعيد العمليات السابقة من جديد حتى تستهلك كل الكميات المتاحة لدى المصانع وتشبع كل المخازن لنحصل في كل مرحلة على الجداول التالية:

نلاحظ من الجدول السابق وجود عدة فروقات كبرى متساوية ذات القيمة (1) (العمود الأول والثالث والصف الأول والثاني والثالث) ، وحسب الملاحظة (1) سنختار الصف أو العمود الذي يحتوي على اقل تكلفة (الصف الثاني أو العمود الأول والثالث) ونلاحظ كذلك وجود عدة تكاليف متساوية ذات القيمة (3)، وعند حساب مجموع الفروق المقابلة لكل قيمة سنجدها ايضا متساوية:

(فرق العمود الأول مع فرق الصف الثاني 1+1=2)

(فرق العمود الثالث مع فرق الصف الثاني 1+1=2)

(فرق الصف الثاني مع فرق العمود الأول 1+1=2)

(فرق الصف الثاني مع فرق العمود الثالث 1+1=2)

في هذه الحالة نختار عشوائيا الصف الثاني لأن كل الحالات ستعطينا نفس النتائج وليكن الصف الثاني.

	المصانع / المخازن	B1	B2	B3	b_j
		1	-	1	
1	A1	4	2 10	5	5
-	A2	3 10	2 /	3 /	0
1	A3	5	6 /	4	51
	a_i	10	0	10	40

	المصانع / المخازن	B1	B2	B3	b_j
		1	-	-	
1	A1	4	2 10	5 /	5
-	A2	3 10	2 /	3 /	0
1	A3	5	6 /	4 10	5
	a_i	10	0	0	40

	المصانع / المخازن	B1	B2	B3	b_j
		4	-	-	
4	A1	4	2 10	5 /	5
-	A2	3 10	2 /	3 /	0
5	A3	5 5	6 /	4 10	0
	a_i	5	0	0	40

		-	-	-	
	المصانع / المخازن	B1	B2	B3	b_j
-	A1	4 / 5	2 / 10	5 / /	0
-	A2	3 / 10	2 / /	3 / /	0
-	A3	5 / 5	6 / /	4 / 10	0
	a_i	0	0	0	40

شبكة النقل والكميات المنقولة في الحل الابتدائي حسب هذه الطريقة هي:

$A_1 \rightarrow B_3 = X_{13} = 0.$ $\quad A_1 \rightarrow B_2 = X_{12} = 10$ $\quad A_1 \rightarrow B_1 = X_{11} = 5$

$A_2 \rightarrow B_3 = X_{23} = 0.$ $\quad A_2 \rightarrow B_2 = X_{22} = 10$ $\quad A_2 \rightarrow B_1 = X_{21} = 10$

$A_3 \rightarrow B_3 = X_{33} = 10.$ $\quad A_3 \rightarrow B_2 = X_{32} = 0$ $\quad A_3 \rightarrow B_1 = X_{31} = 5$

التكلفة الإجمالية للحل الابتدائي:

$$(5*4)+(10*2)+(0*5)+(10*3)+(0*2)+(0*3)+(5*5)+(0*6)+(10*4)=135.$$

ولاختبار قبول هذا الحل نقوم بحساب عدد طرق نقل المستعملة ونقارنها اذا مساوية للقيمة (m+n-1):

عدد الطرق المستعملة =m+n-1 / (m+n-1)=(3+3-1)=5 / عدد الطرق =5

جدول الحل الابتدائي هو حل مقبول، ويجب مواصلة الحل بالبحث عن حل أمثل باستخدام طريقة التحويل.

2- **المرحلة الثانية (طريقة التحويل): تنقسم هذه الطريقة إلى جزأين:**

الجزء الأول: دراسة إمكانية تحسين الحل: يمكن اختبار إمكانية تحسين أي حل بإتباع الخطوات التالية:

الخطوة الأولى: نكون أربعة جداول بنفس أبعاد جدول التكاليف الأحادية (m*n) حيث (n=3) عدد الصفوف و(m=3) عدد الأعمدة، بعد ذلك نشطب في الجدول (1) الخانات المقابلة للخانات غير المستعملة في شبكة النقل داخل جدول الحل الابتدائي (الخانات الفارغة)، وبالعكس نشطب في الجداول الثلاثة الباقية الخانات المقابلة للخانات المستعملة في شبكة النقل في الجدول الحل الابتدائي.

(1)

		–
	–	–
	–	

(2)

–	–	
–		
–		–

(3)

–	–	
–		
–		–

(4)

–	–	
–		
–		–

الخطوة الثانية: نكتب في الخانات الفارغة بعد الشطب في الجدول (1) والجدول (3) التكاليف الأحادية (C_{ij}).

(1)

4	2	–
3	–	–
5	–	4

(2)

–	–	
–		
–		

(3)

–	–	5
–	2	3
–	6	–

(4)

–	–	
–		
–		–

الخطوة الثالثة: نضيف عمود وصف على يمين وأسفل الجدول (1) و(2)، ثم نملأ قيمها حسب المعادلة التالية:

$$C_{ij} = f_i + s_j .$$

f_i: قيم العمود المضاف.

s_j: قيم الصف المضاف.

مع إعطاء دائما (f_1) أو (s_1) القيمة (0) لبدأ عملية الحساب.

(1)

				f_i
	4	2	-	4
	3	-	-	3
	5	-	4	5
S_J	0	-2	-1	

1.......$s_1=0$ 2.......$f_1=4-0=4$ 3.......$f_2=3-0=3$

4.......$f_3=5-0=5$ 5.......$s_2=2-4=-2$ 6.......$s_3=4-5=-1$

الخطوة الرابعة: نحول قيم (f_i) و(s_j) المحسوبة من الجدول (1) إلى الجدول (2) ونحسب قيم التكاليف الجديدة (p_{ij}) في الخانات غير المشطوبة حسب المعادلة التالية: $p_{ij} = f_i + s_j$

(2)

				f_i
	-	-	3	4
	-	1	2	3
	-	3	-	5
S_J	0	-2	-1	

1.......$p_{13}=4+(-1)=3$ 2.......$p_{22}=5+(-2)=3$

3.......$p_{24}=5+(-1)=4$ 4.......$p_{32}=5(-2)=3$

الخطوة الخامسة: نحسب الفرق بين قيم الجدول (3) وقيم الجدول (2) ونضعها في الجدول الرابع.

(2)

-	-	3
-	1	2
-	3	-

(1)

4	2	-
3	-	-
5	-	4

(4)

-	-	2
-	1	1
-	3	-

(3)

-	-	5
-	2	3
-	6	-

❖ إذا كانت كل قيم الجدول الرابع موجبة فإن الحل الابتدائي المحصل عليه يعتبر حلا أمثلا ولا يوجد إمكانية لتحسينه (135ون)، أما إذا كان الجدول الرابع يحتوي على الأقل قيمة واحدة سالبة، فهذا يعني أن جدول الحل الابتدائي لا يعتبر حلا أمثلا، مع وجود إمكانية تحسين هذا الحل، بإكمال الجزء الثاني من طريقة التحويل.

في هذا المثال تحقق الحل الأمثل في خطوة واحدة دون اللجوء للجزء الثاني من طريقة التحويل، وهذا لا يحصل في كل المسائل، ولنوضح ذلك في المثال التالي:

مثال2: ليكن لدينا جدول التكاليف الأحادية التالي:

الز ئن

مواقع البيع

	A	B	C	D	E	
I	10	5	9	18	11	150
II	13	19	6	12	14	270
III	3	2	4	4	5	300
IV	18	9	12	17	15	120
	320	100	180	140	100	840 / 840

المطلوب: تحديد أحسن شبكة لنقل البضائع إلى الزبائن بأقل تكلفة ممكنة.

❖ إيجاد الحل الابتدائي: يمكن تلخيص كل مراحل طريقة الفروقات الكبرى في جدول واحد على النحو التالي:

					A	B	C	D	E	
					~~5~~				~~1~~	
					~~3~~	~~4~~	~~3~~		~~3~~	
					~~7~~	~~3~~	~~2~~	~~8~~	~~6~~	
	~~1~~	~~5~~	~~4~~	4	10 150	5	9	18	11	~~150~~ ~~0~~
~~14~~	~~1~~	1	~~7~~	~~6~~	13 10	19	6 180	12	14 80	~~270~~ ~~90~~ ~~80~~
			~~1~~	1	3 160	2	4	4 140	5	~~300~~ ~~160~~ 0
~~15~~	~~3~~	~~6~~	~~3~~	3	18	9 100	12	17	15 20	~~120~~ ~~20~~ 0
					~~320~~ ~~160~~ ~~10~~ 0	~~100~~ 0	~~180~~ 0	~~140~~ 0	~~100~~ 0	840

كمية البضاعة المنقولة إلى الزبائن من مواقع البيع حسب الحل الابتدائي هي:

$$X_{11} = 150 \quad X_{12} = 0 \quad X_{13} = 0 \quad X_{14} = 0 \quad X_{15} = 0 .$$
$$X_{21} = 10 \quad X_{22} = 0 \quad X_{23} = 180 \quad X_{24} = 0 \quad X_{25} = 80.$$
$$X_{31} = 160 \quad X_{32} = 0 \quad X_{33} = 0 \quad X_{34} = 140 \quad X_{35} = 0.$$
$$X_{41} = 0 \quad X_{42} = 100 \quad X_{43} = 0 \quad X_{44} = 0 \quad X_{45} = 20.$$

التكلفة الإجمالية للحل الابتدائي:

$$(150 * 10) + (10 * 13) + (180 * 6) + (80 * 14) + (160 * 3) + (140 * 4) + (100 * 9) + (20 * 15) = 6070.$$

❖ اختبار القبول الحل الابتدائي:

عدد طرق النقل =8 / (m+n-1)=(5+4-1)=8 / عدد الطرق المستعملة = m+n-1

جدول الحل الابتدائي مقبول، لذا سندرس إمكانية تحسين هذا الحل بالذهاب للمرحلة الثانية (طريقة التحويل).

❖ اختبار إمكانية تحسين الحل الابتدائي:

(1)

10	-	-	-	-	10
13	-	6	-	14	13
3	-	-	4	-	3
-	9	-	-	15	14
0	-5	7-	1	1	f_i / S_j

(2)

-	5	3	11	11	10
-	8	-	14	-	13
-	-2	4-	-	4	3
14	-	7	15	-	14
0	-5	7-	1	1	

(3)

-	5	9	18	11
-	19	-	12	-
-	2	4	-	5
18	-	12	17	-

(4)

-	0	6	7	0
-	11	-	2-	-
-	4	8	-	1
4	-	5	2	-

يوجد قيمة واحدة سالبة في الجدول الرابع، هذا يعني أن جدول الحل الابتدائي لا يعتبر حلا أمثلا، مع وجود إمكانية تحسين هذا الحل، وذلك بالانتقال إلى الجزء الثاني من طريقة التحويل (مرحلة تكوين حلقة التحويل).

الجزء الثاني: مرحلة تكوين حلقة التحويل (تحسين الحل): إن عملية تحسين أي حل والبحث عن الحل الأمثل حسب هذه المرحلة تتطلب أن الخانة (طريق النقل) التي تحتوي على أصغر قيمة سالبة من الجدول الرابع، يجب أن تتلقى كمية من البضائع أو المنتوج الناقص، والتي تحول إليها من الخانات المجاورة وفق دورة أو حلقة تحويل، وذلك حسب الخطوات التالية:

➢ نضع على رؤوس زوايا الحلقة إشارات (+) و(-) بالتناوب، بحيث نبدأ بوضع الإشارة (+) على رأس الزاوية الموجودة في الخانة التي نريد ملؤها (أصغر قيمة سالبة)، وهذا يعني أننا نريد أن نضيف طريق نقل، حيث تنقل كمياته من

الخانات (الطرق) المجاورة والتي تشكل معه حلقة التحويل، بمعنى آخر أن الخانات التي عليها علامة (+) سنضيف إليها كميات من البضائع من الخانات التي عليها علامة (-).

➢ الكمية المنقولة عبر الحلقة هي أصغر قيمة موجودة على رؤوس زوايا الحلقة، والتي خانتها تحتوي على إشارة (-)، وبذلك تصبح قيمة هذه الخانة تساوي (0)، وقيمة الخانة المراد ملؤها مساوية للقيمة المنقولة، مع طرح أو جمع نفس القيمة حسب الإشارة (-) أو (+) الموجودة داخل خانات رؤوس زوايا الحلقة.

عند تشكيل الحلقة يجب الأخذ بعين الاعتبار القواعد التالية:

✓ حلقة التحويل يجب أن تكون حسب دورة مشكلة من خطوط منكسرة مغلق، رؤوسها هي زوايا قائمة، كل خانة من خانات جدول النقل التي تشكل جزء من هذه الحلقة وتساهم في عملية التحويل يجب أن تشكل زاوية لهذه الحلقة.

✓ التنقل داخل هذه الحلقة يجب أن يكون عموديا أو أفقيا فقط.

✓ كل رأس من رؤوس هذه الحلقة يجب أن يكون ناتجا من التقاء خطين فقط من خطوط الحلقة (واحد أفقي والآخر عمودي)، لهذا لا يجب أن يكون هناك ثلاث رؤوس متتالية على نفس الخط المشكل لهذه الحلقة.

✓ الخطوط المشكلة لهذه الحلقة يمكن أن تقطع بعضها البعض ولكن نقاط التقاطع لا يمكن اعتبارها رؤوسا لهذه الحلقة.

✓ الخانات الفارغة لا يمكن أن اعتبارها رأسا من رؤوس هذه الحلقة ماعدا تلك التي نريد ملأها.

✓ في كل حلقة تحويل عدد الرؤوس يجب أن يكون دائما عددا زوجيا.

✓ في كل محاولة تحسين الحل هناك دائما دورة تحويل واحدة فقط صحيحة.

❖ تحسين الحل الابتدائي: مما سبق يمكن تشكيل حلقة التحويل الأولى لمثالنا السابق على النحو التالي:

- **تحسين حل (المحاولة الأولى) :**

جدول المحاولة (1)

150				
-10		180	+	80
+160			-140	
	100			20

جدول المحاولة (2)

150				
		180	10	80
170			130	
	100			20

$$(150 * 10) + (180 * 6) + (80 * 14) + (10 * 12) + (170 * 3) + (130 * 4) + (100 * 9) + (20 * 15) = 6070.$$

❖ اختبار قبول حل المحاولة الثانية:

عدد الطرق =8 / (m+n-1)=(5+4-1)=8 / عدد الطرق المستعملة = m+n-1

جدول المحاولة الثانية مقبول.

❖ اختبار إمكانية تحسين حل المحاولة الثانية:

(1)

10	-	-	-	-	10
-	-	6	12	14	11
3	-	-	4	-	3
-	9	-	-	15	12
0	3-	5-	1	3	f_i / S_j

(2)

-	7	5	11	13	10
11	8	-	-	-	11
-	0	2-	-	6	3
12	-	7	13	-	12
0	3-	5-	1	3	

(3)

-	5	9	18	11
13	19	-	-	-
-	2	4	-	5
18	-	12	17	-

(4)

-	2-	4	7	2-
2	11	-	-	-
-	2	6	-	-1
6	-	5	4	-

نلاحظ أنه يوجد ثلاث قيم سالبة كل قيم الجدول الرابع للمحاولة الثانية، لذا يمكنا القول أن جدول المحاولة الثانية هو ليس جدول الحل الأمثل، نقوم بعملية التحويل باختيار أقل قيمة سالبة، فلاحظ انه يوجد قيمة متساويتين (-2)، فنقوم باختيار واحدة من القيمتين عشوائيا.

جدول المحاولة (2)

-150	+			
		180	+10	-80
+170			-130	
	-100			+20

70	80			
		180	90	
250			50	
	20			100

جدول المحاولة (3)

$$(70*10)+(80*5)+(180*6)+(90*12)+(50*4)+(250*3)+(20*9)+(100*15)=5890.$$

❖ اختبار قبول حل المحاولة الثانية:

عدد الطرق =8 / 8=(5+4-1)=(m+n-1) / عدد الطرق المستعملة = m+n-1

جدول المحاولة الثانية مقبول.

❖ اختبار إمكانية تحسين حل المحاولة الثانية:

(1)

10	5	–	–	–	10
–	–	6	12	–	11
3	–	–	4	–	3
–	9	–	–	15	14
0	5-	5-	1	1	f_i / S_j

(2)

–	–	5	11	11	10
11	6	–	–	12	11
–	2-	2-	–	4	3
14	–	9	15	–	14
0	5-	5-	1	1	

(3)

–	–	9	18	11
13	19	–	–	14
–	2	4	–	5
18	–	12	17	–

(4)

–	–	4	7	0
2	13	–	–	2
–	4	6	–	
4	–	3	2	–

نلاحظ أنه كل قيم الجدول الرابع للمحاولة الثالثة غير سالبة(موجبة أو مساوية للصفر)، لذا يمكنا القول أن جدول المحاولة الثالثة هو جدول الحل الأمثل، الشبكة النقل المثلى هي كالتالي:

$\mathrm{I} \rightarrow A = 70$ $\mathrm{I} \rightarrow B = 80$ $\mathrm{I} \rightarrow C = 0$ $\mathrm{I} \rightarrow D = 0$ $\mathrm{I} \rightarrow E = 0.$

$\mathrm{II} \rightarrow A = 0$ $\mathrm{II} \rightarrow B = 0$ $\mathrm{II} \rightarrow C = 180$ $\mathrm{II} \rightarrow D = 90$ $\mathrm{II} \rightarrow E = 0.$

$\mathrm{III} \rightarrow A = 250$ $\mathrm{III} \rightarrow B = 0$ $\mathrm{III} \rightarrow C = 0$ $\mathrm{III} \rightarrow D = 50$ $\mathrm{III} \rightarrow E = 0.$

$\mathrm{IV} \rightarrow A = 0$ $\mathrm{IV} \rightarrow B = 20$ $\mathrm{IV} \rightarrow C = 0$ $\mathrm{IV} \rightarrow D = 50$ $\mathrm{IV} \rightarrow E = 100.$

مثال3 (حالة تعظيم): ليكن لدينا أربعة منافذ للتوزيع إلى ثلاث مراكز للبيع، الجدول أسفله يوضح الربح الوحدوي المحقق من كل طريق نقل والطاقة الإنتاجية لكل منفذ توزيع، والطاقة التخزينية لكل مركز، والمطلوب تحديد شبكة النقل المثلى التي تحقق لهذه المنافذ اكبر ربح ممكن؟

	B1	B2	B3	
A1	6	4	7	320
A2	4	6	2	370
A3	3	5	3	280
A4	5	3	5	520
	540	450	500	1490

كما رأينا في هذا المثال فالهدف في بعض الأحيان يكون البحث عن أعلى ربح ممكن، في هذه الحالة نتبع كل الإجراءات التي اتبعناها في حالة التدنية (تخفيض التكاليف)، ما عدا الاختلاف يكون في النقاط التالية:

- الاختلاف يكون في كيفية الاختيار للقيمة من الخانات التي تقابل أكبر فرق من الفروقات المحسوبة، ففي حالة أقل التكاليف كانت القيمة التي يجب اختيارها تمثل أقل قيمة من العمود أو الصف الذي يقابل أكبر فرق، لكن في حالة أكبر ربح يجب اختيار أكبر قيمة.
- كذلك يكون الاختلاف في كيفية الاختيار للقيمة من الخانات التي لم تستغل، ففي حالة أقل التكاليف كانت القيمة التي يجب اختيارها تمثل أقل قيمة سالبة، لكن في حالة أكبر ربح يجب اختيار القيمة التي تمثل أقل قيمة موجبة، والتي تعني أن هذه القيمة سوف ترفع الأرباح بوحدة واحدة.
- طريقة تحديد الجدول النهائي الذي يمثل الحل الأمثل، ففي حالة أقل التكاليف يحدد الجدول النهائي بأنه هو الحل الأمثل عن طريق ملاحظة القيم الموجودة في الجدول الرابع من الجداول الأربعة المكونة لاختبار الامثلية، والتي يجب أن تكون كلها أكبر آو مساوية للصفر (غير سالبة)، بينما في حالة تعظيم الأرباح تكون هذه القيم كلها اصغر أو مساوية للصفر (غير موجبة) لتحديد جدول الحل الأمثل والنهائي.

❖ إيجاد الحل الابتدائي.

				~~4~~	
			~~6~~	4	
		~~4~~	~~1~~	~~1~~	
		4	~~3~~	1	
	~~6~~	9 320	2	8	~~320~~ 0
~~4~~	~~3~~	6	7 370	3	~~370~~ 0
~~2~~	~~2~~	2	6 80	4 200	~~280~~ ~~200~~ 0
~~4~~	~~2~~	7 220	5	9 300	~~520~~ ~~300~~ 0
		~~540~~ ~~220~~ 0	~~450~~ ~~80~~ 0	~~500~~ ~~200~~ 0	1490

❖ اختبار قبول حل الابتدائي:

عدد الطرق =6 / (m+n-1)=(4+3-1)=6 / عدد الطرق المستعملة = m+n-1

جدول الحل الابتدائي مقبول.

شبكة النقل حسب جدول الحل الابتدائي:

$A_1 \rightarrow B_1 = X_{11} = 320$ $\quad A_1 \rightarrow B_2 = X_{12} = 0$ $\quad A_1 \rightarrow B_3 = X_{13} = 0.$

$A_2 \rightarrow B_1 = X_{21} = 0$ $\quad A_2 \rightarrow B_2 = X_{22} = 370$ $\quad A_2 \rightarrow B_3 = X_{23} = 0.$

$A_3 \rightarrow B_1 = X_{31} = 0$ $\quad A_3 \rightarrow B_2 = X_{32} = 80$ $\quad A_3 \rightarrow B_3 = X_{33} = 200.$

$A_4 \rightarrow B_1 = X_{31} = 220$ $\quad A_4 \rightarrow B_2 = X_{32} = 0$ $\quad A_4 \rightarrow B_3 = X_{33} = 300.$

الربح الإجمالي للحل الابتدائي:

$$(320*9)+(370*7)+(80*6)+(200*4)+(220*7)+(300*9) = 10990.$$

❖ اختبار إمكانية تحسين الحل الابتدائي:

(1)

9	-	-	9
-	7	-	3
-	6	4	2
7	-	9	7
0	4	2	

(2)

-	13	11	9
3	-	5	3
2	-	-	2
-	11	-	7
0	4	2	

(3)

-	2	8
6	-	3
2	-	-
-	5	-

(4)

-	11-	3-
3	-	2-
0	-	-
-	6-	-

نلاحظ وجود قيمة موجبة في الجدول الرابع (3)، ما يدفعنا للقول أن جدول الحل الابتدائي لا يمثل جدول الحل الأمثل، مع إمكانية تحسين هذا الحل.

❖ تحسن حل الجدول الابتدائي:

320		
+	-370	
	+80	-200
-220		+300

جدول المحاولة الاولى

320		
200	170	
	280	
20		500

الربح الإجمالي المحقق بعد المحاولة الأولى:

$$(320*9)+(200*6)+(170*7)+(280*6)+(20*7)+(500*9)=11590.$$

تحسن الربح من (10990) إلى (11590).

❖ اختبار قبول حل المحاولة الأولى:

عدد الطرق =6 / (m+n-1)=(4+3-1)=6 / عدد الطرق المستعملة = m+n-1

جدول المحاولة الأولى مقبول.

❖ اختبار إمكانية تحسين جدول المحاولة الأولى:

(1)

9	-	-	9
6	7	-	6
-	6	-	5
7	-	9	7
0	1	2	

(2)

-	10	11	9
-	-	8	6
5	-	7	5
-	8	-	7
0	1	2	

(3)

-	2	8
-	-	3
2	-	4
-	5	-

(4)

-	8-	-3
-	-	5-
3-	-	3-
-	3-	-

نلاحظ عدم وجود قيم موجبة في الجدول الرابع، ما يدفعنا للقول أن جدول المحاولة الأولى يمثل جدول الحل الأمثل.

3- مشكلة التحلل: مشكلة التحلل تحدث عندما تقوم بإجراءات أو خطوات الحل لمشكلة معينة، فيتضح من أحد الجداول أن التوزيع الجديد ترتب عليه انخفاض في عدد الخلايا المستغلة (عدد الطرق المستعملة أقل من القيمة (m+n-1))، مما يصبح معه من المستحيل إيجاد قيمة بعض الخلايا، ولتوضيح أكثر هذه الحالة سنستعين بالمثال التالي:

مثال 1: ليكن لدينا جدول الحل الابتدائي التالي:

4 300	2	6	5
3 50	7 200	2	6
3	3 150	5 200	4 250

❖ اختبار قبول الحل الابتدائي:

عدد الطرق =6 / (m+n-1)=(4+3-1)=6 / عدد الطرق المستعملة = m+n-1

جدول الحل الابتدائي مقبول.

❖ اختبار إمكانية تحسين الحل الابتدائي:

(1)

4	-	-	-	4
3	7	-	-	3
-	3	5	4	1-
0	4	6	5	

(2)

-	8	10	9	4
-	-	9	8	3
1-	-	-	-	1-
0	4	6	5	

(3)

-	2	6	5
-	-	2	6
3	-	-	-

(4)

-	6-	4-	4-
-	-	7-	2-
4	-	-	-

❖ تحسن حل الجدول الإبتدائي:

جدول الحل الابتدائي

300			
50	-200	+	
	+150	-200	250

جدول المحاولة الاولى

300			
50		200	
	350		250

❖ اختبار قبول حل المحاولة الأولى:

عدد الطرق =5 / (m+n-1)=(4+3-1)=6 / عدد الطرق المستعملة ≠ m+n-1

جدول المحاولة الأولى غير مقبول (مشكلة تحلل عدد الطرق المستعملة من 6 إلى 5).

يمكن علاج هذه المشكلة عن طريق إضافة خلية أخرى للخلايا المستعملة حتى نتمكن من رفع عدد الطرق إلى القيمة (m+n-1)، وللحفاظ على شرط توازن العرض مع الطلب لا يمكن إضافة أي قيمة غير القيمة (0)، ونضعها في الخانة ذات أقل تكلفة، ونتعامل معها كأي قيمة أخرى.

في مثالنا أقل تكلفة من الخانات غير المستغلة هي القيمة (2)، نضع فيها الكمية (0)، ليتحقق شرط عدم التحلل (عدد الطرق المستعملة = m+n-1)، ويصبح جدول المحاولة الأولى على النحو التالي:

300	0		
50		200	
	350		250

❖ اختبار إمكانية تحسين جدول المحاولة الأولى:

(1)

4	2	–	–	4
3	–	2	–	3
–	3	–	4	5
0	2–	−1	1–	

(2)

–	–	3	3	4
–	1	–	2	3
5	–	4	–	5
0	2–	1–	1–	

(3)

–	–	6	5
–	7	–	6
3	–	5	–

(4)

–	–	3	2
–	6	–	4
2–	–	1	–

❖ تحسن حل جدول المحاولة الأولى:

جدول المحاولة الاولى

-300	+0		
50		200	
+	-350		250

جدول المحاولة الثانية

	300		
50		200	
300	50		250

❖ اختبار إمكانية تحسين جدول المحاولة الثانية:

(1)

–	2	–	–	2
3	–	2	–	3
3	3	–	4	3
0	0	1–	1	

(2)

2	–	1	3	2
–	3	–	4	3
–	–	2	–	3
0	0	1–	1	

(3)

4	–	6	5
–	7	–	6
–	–	5	–

(4)

2	–	5	2
–	4	–	4
–	–	3	–

كل القيم موجبة، جدول المحاولة الثانية هو جدول الحل الأمثل.

ثانيا: مشكلة النقل في حالة عدم تساوي العرض مع الطلب.

في بعض الحالات نجد أن عدد الوحدات المعروضة لا تتساوى مع عدد الوحدات المطلوبة، أو عكس، فيحدث ما يسمى بعدم التوازن بين العرض والطلب، ولإيجاد أقل تكلفة لمشكلة النقل في حالة النموذج غير المتوازن لابد من موازنته، ثم بعد ذلك يمكن استخدام الطرق المذكورة سابقا وبنفس الخطوات، ولفهم أكثر لهذه الحالة سنقوم بحل مثالين حسب الحالات الممكنة لمشكلة عدم توازن البرنامج:

المثال (1) (العرض اكبر من الطلب): الجدول التكاليف الأحادية التالي يمثل حالة عدم توازن الطلب مع العرض، والمطلوب تحديد شبكة نقل المنتجات بأقل تكلفة؟

	A	B	C	D	E	
F	10	15	8	12	11	500
G	15	16	12	10	19	450
K	13	15	10	10	9	300
	350	200	180	250	100	1250 / 1080

نلاحظ من الجدول أعلاه أن مجموع عرض (K،G،F) (1250وحدة) اكبر من طلب (E،D،C،B،A) (1080وحدة) بقيمة (170وحدة)، ولموازنة هذا النموذج لابد من إضافة عمود وهمي (جديد)، تكون فيه قيمة الطلب مساوية لقيمة الفرق (170) وتكلفة النقل فيه من كل مصادر العرض (K،G،F) مساوي لـ(0)، ليصبح الجدول أعلاه على النحو التالي:

	A	B	C	D	E	L	
F	10	15	8	12	11	0	500
G	15	16	12	10	19	0	450
K	13	15	10	11	9	0	300
	350	200	180	250	100	170	1250 / 1250

بعد عملية الموازنة يمكن استخدام الخطوات السابقة في الحل لإيجاد تكلفة النقل، مع اعتبار التكاليف الصفرية (قيم (0)) المضافة كغيرها من القيم الأخرى، هذا يعني:

- تكاليف الصف أو العمود الوهمي تعتبر التكاليف الدنيا في الصف أو العمود الذي توجد فيه.
- حساب الفرق بين أقل تكلفتين في كل صف وفي كل عمود يجب أن يأخذ بعين الاعتبار التكلفة الصفرية.

❖ إيجاد الحل الابتدائي.

	~~3~~	~~1~~	~~2~~	~~1~~	~~10~~ ~~2~~	~~0~~	
3 ~~2~~ ~~8~~	10 350	15	8 150	12	11	0	~~500~~ ~~150~~ 0
4 ~~2~~ ~~10~~	15	16 30	12	10 250	19	0 170	~~450~~ ~~280~~ ~~30~~ 0
5 ~~1~~ ~~9~~	13	15 170	10 30	11	9 100	0	~~300~~ ~~200~~ ~~170~~ 0
	~~350~~ 0	~~200~~ ~~170~~ 0	~~180~~ ~~30~~ 0	~~250~~ 0	~~100~~ 0	~~170~~ 0	

❖ اختبار قبول حل المحاولة الأولى:

عدد الطرق =8 / (m+n-1)=(3+6-1)=8 / عدد الطرق المستعملة = m+n-1

❖ اختبار إمكانية تحسين جدول الحل الابتدائي:

(1)

10	–	8	–	–	–	10
–	16	–	10	–	0	13
–	15	10	–	9	–	12
0	3	-2	-3	-3	-13	

(2)

–	13	–	7	7	-3	10
13	–	11	–	10	–	13
12	–	–	9	–	-1	12
0	3	-2	-3	-3	-13	

(3)

–	15	–	12	11	0
15	–	12	–	19	–
13	–	–	11	–	0

(4)

–	2	–	5	4	3
2	–	1	–	9	–
1	–	–	2	–	1

جدول الحل الابتدائي هو جدول حل الأمثل، والتكلفة الإجمالية تساوي:

$(350 * 10) + (150 * 8) + (30 * 16) + (250 * 10) + (170 * 0) + (170 * 15) + (30 * 10) + (100 * 9) = 11430.$

المثال (2) (الطلب أكبر من العرض): الجدول الأرباح الحادية التالي يمثل حالة عدم توازن الطلب مع العرض، والمطلوب تحديد شبكة نقل المنتجات التي تعود على المورد بأكبر ربح ممكن؟

	A	B	C	
D	30	31.7	40	180
E	21.6	37.5	28.9	200
F	18.8	16.4	15	130
	250	160	160	510 / 570

نلاحظ من الجدول أعلاه أن مجموع الوحدات المطلوبة (570وحدة) أكبر من العرض (510وحدة) بقيمة (60وحدة)، ولموازنة هذا النموذج لابد من إضافة صف وهمي (جديد)، تكون فيه قيمة الطلب مساوية لقيمة الفرق (60) وتكلفة النقل فيه من كل مصادر العرض مساوي لـ(0)، ليصبح الجدول أعلاه على النحو التالي:

	A	B	C	
D	30	31.7	40	180
E	21.6	37.5	28.9	200
F	18.8	16.4	15	130
G	0	0	0	60
	250	160	160	510 / 570

بعد عملية الموازنة يمكن استخدام الخطوات السابقة في الحل لإيجاد أكبر ربح ممكن.

❖ إيجاد الحل الابتدائي:

	~~18.8~~	~~16.6~~	~~15~~	
~~1.7~~	30 180	31.7	40	~~180~~ 0
~~8.6~~ ~~7.3~~	21.6 70	37.5 130	28.9	~~200~~ ~~130~~ 0
~~15~~ ~~1.4~~	18.8	16.4 30	15 100	~~130~~ ~~100~~ 0
0	0	0	0 60	~~60~~ 0
	~~250~~ ~~70~~ 0	~~160~~ ~~30~~ 0	~~160~~ ~~60~~ 0	570

د. حايد مروان

❖ اختبار قبول حل الحل الابتدائي:

عدد الطرق =6 / (m+n-1)=(3+4-1)=6 / عدد الطرق المستعملة = m+n-1

الربح الإجمالي:

$$(180*30)+(70*21.6)+(130*37.5)+(30*16.4)+(100*15)+(60*0)=13779.$$

❖ اختبار إمكانية تحسين جدول الحل الابتدائي:

(1)

30	–	–	30
21.6	37.5	–	21.6
–	16.4	15	0.5
–	–	0	-14.5
0	15.9	14.5	

(2)

–	45.9	44.5	30
–	–	36.1	21.6
0.5	–	–	0.5
-14.5	1.4	–	-14.5
0	15.9	14.5	

(3)

–	31.7	40
–	–	28.9
18.8	–	–
0	0	–

(4)

–	-14.2	-4.5
–	–	-7.2
18.5	–	–
14.5	-1.4	–

❖ تحسين جدول الحل الابتدائي

180		
-70	+130	
+	-30	100
		60

جدول المحاولة الأولى

180		
40	160	
30		100
		60

❖ اختبار قبول حل المحاولة الأولى:

عدد الطرق =6 / (m+n-1)=(3+4-1)=6 / عدد الطرق المستعملة = m+n-1

الربح الإجمالي الجديد:

$$(180*30)+(40*21.6)+(160*37.5)+(30*18.8)+(100*15)+(60*0)=14328.$$

❖ اختبار إمكانية تحسين جدول المحاولة الأولى:

(1)

30	–	–	30
21.6	37.5	–	21.6
18.8	–	15	18.8
–	–	0	3.8
0	15.9	3.8-	

(2)

–	45.9	26.2	30
–	–	17.8	21.6
–	34.7	–	18.8
3.8	19.7	–	3.8
0	15.9	3.8-	

(3)

–	31.7	40
–	–	28.9
–	16.4	–
0	0	–

(4)

–	14.2-	13.8
–	–	11.1
–	18.3-	–
3.8-	19.7-	–

❖ تحسين جدول المحاولة الأولى:

-180		+
40	160	
+30		-100
		60

جدول المحاولة الثانية

80		100
40	160	
130		
		60

❖ اختبار قبول حل المحاولة الثانية:

عدد الطرق =6 / (m+n-1)=(3+4-1)=6 / عدد الطرق المستعملة = m+n-1

الربح الجمالي الجديد:

$$(80*30)+(40*21.6)+(160*37.5)+(130*18.8)+(100*40)+(60*0)=15708.$$

❖ اختبار إمكانية تحسين جدول المحاولة الثانية:

(1)

30	–	40	30
21.6	37.5	–	21.6
18.8	–	–	18.8
–	–	0	10-
0	15.9	10	

(2)

–	45.9	–	30
–	–	31.6	21.6
–	34.7	28.8	18.8
10-	5.9	–	10-
0	15.9	10	

(3)

–	31.7	–
–	–	28.9
–	16.4	15
0	0	–

(4)

–	14.2-	–
–	–	2.7-
–	18.3-	13.8-
10	5.9-	–

❖ تحسين جدول المحاولة الثانية:

-80		+100
40	160	
130		
+		-60

⇦

جدول المحاولة الثالثة

20		160
40	160	
130		
60		

❖ اختبار قبول حل المحاولة الثانية:

عدد الطرق =6 / (m+n-1)=(3+4-1)=6 / عدد الطرق المستعملة = m+n-1

الربح الجمالي الجديد:

$$(20*30)+(40*21.6)+(160*37.5)+(130*18.8)+(160*40)+(60*0)=16308.$$

❖ اختبار إمكانية تحسين جدول المحاولة الثالثة:

(1)

30	-	40	30
21.6	37.5	-	21.6
18.8	-	-	18.8
0	-	-	0
0	15.9	10	

(2)

-	45.9	-	30
-	-	31.6	21.6
-	34.7	28.8	18.8
-	5.9	10	0
0	15.9	10	

(3)

-	31.7	-
-	-	28.9
-	16.4	15
-	0	0

(4)

-	14.2-	-
-	-	2.7-
-	18.3-	13.8-
	5.9-	10-

نلاحظ أن كل القيم في الجدول الرابع سالبة (غير موجبة)، ومنه يمكن القول أن جدول المحاول الثالثة هو جدول الحل الأمثل، وأكبر ربح محقق هو (16308ون).