

## Chapitre II

### Le comportement élastique

#### 2.1 Introduction

L'expérience montre que la manière dont un corps continu déformable réagit aux changements des actions dépend de sa constitution interne. Pour cette raison, afin de prévoir son processus de déformation, nous devons présenter des équations décrivant la réponse du matériau, appelée les *équations constitutives ou lois de comportement*.

Le domaine d'élasticité est donc souvent représenté par une relation de proportionnalité entre la contrainte et la déformation (loi de Hooke).

Une telle hypothèse implique que le travail fournit lors du processus de déformation est entièrement récupérée quand les actions de perturbation cessent, qui signifie que le processus est complètement réversible.

Il est cependant important de savoir que ceci n'est qu'une schématisation plus ou moins réaliste du comportement réel du matériau. En effet, le comportement élastique d'un matériau n'est jamais strictement linéaire.

#### 2.2 Déformation élastique

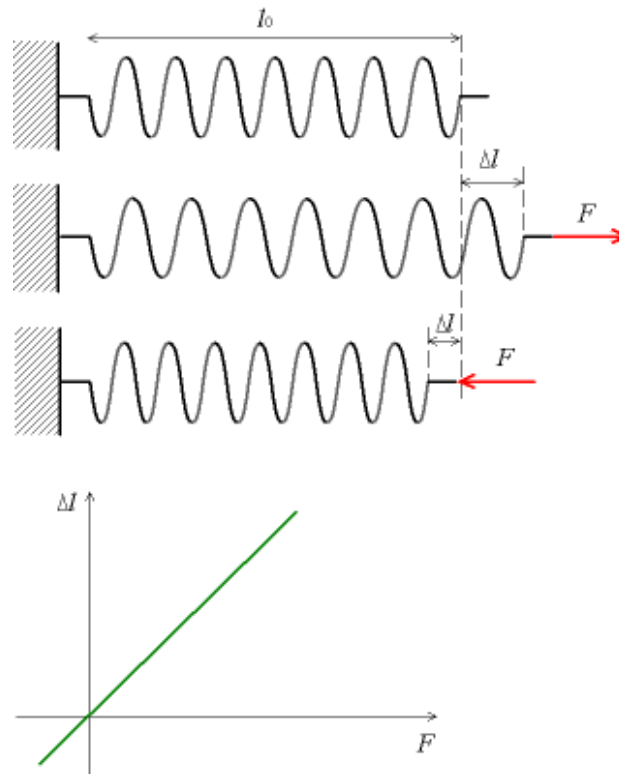
En physique, l'**élasticité** est la propriété d'un matériau solide à retrouver sa forme d'origine après avoir été déformé. La **déformation élastique** est une **déformation réversible**.

Un matériau solide se déforme lorsque des forces lui sont appliquées. Un matériau élastique retrouve sa forme et sa taille initiales quand ces forces ne s'exercent plus, jusqu'à une certaine limite de la valeur de ces forces.

##### 2.2.1 Elasticité linéaire

L'élasticité **linéaire** concerne les *petites* déformations proportionnelles à la sollicitation. Dans cette gamme, l'allongement est proportionnel à la force dans le cas d'un étirement, selon le module de Young, et l'angle est proportionnel au couple dans le cas d'une torsion, selon le module de Coulomb.

$$F = k \cdot \Delta l$$



**Figure 2.1-** Elasticité linéaire

Si l'on se ramène à valeurs indépendantes des dimensions de la pièce, on obtient la loi de Hooke :

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (2.1)$$

$\sigma$  est la contrainte, force divisée par la section de la pièce sur laquelle s'exerce la force.

$E$  est le module de *Young*, homogène à  $[F]/[L]^2$  (exprimé en général en gigapascal, GPa), caractéristique de la matière (c'est l'équivalent de  $k$ );

$\varepsilon$  est la déformation ou «allongement relatif»  $\Delta l/l_0$ .

Le caractère élastique d'un matériau n'est vrai que dans une plage de contrainte appliquée, qui n'est généralement qu'une fraction, très variable suivant le matériau, de la plage totale des contraintes qu'il faut mobiliser pour atteindre la rupture.

### 2.2.2 Elasticité non linéaire

L'élasticité non-linéaire représente le comportement réversible du matériau lorsque la proportionnalité entre les contraintes et les déformations ne peut plus être respectée ; cette non-linéarité est typiquement accompagnée de grandes déformations du matériau.

Aux plus grandes déformations, l'élasticité devient non linéaire pour certains matériaux. Pour d'autres, la fracture ou le fluage interviennent.

## 2.3 Elasticité

En adoptant l'hypothèse de l'isotropie, c-à-d qu'en un point donné les constantes élastiques sont indépendantes du choix des axes de référence, la loi constitutive peut être écrite comme :

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (2.2)$$

$\lambda$  et  $\mu$  sont les constantes de Lamé (1829).

Sous forme inverse :

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} \quad (2.3)$$

Où  $E$  est le module de Young (1807) et  $\nu$  le coefficient de Poisson (1829).

### ✚ Généralisation 3D

En élasticité linéaire, homogène et isotrope, la relation  $\sigma$ - $\varepsilon$  se généralise en 3D sous la forme suivante (Loi de Hooke)

$$\sigma = 2\mu \varepsilon + \lambda \operatorname{tr}(\varepsilon) I \quad (2.4)$$

Où  $\lambda$  et  $\mu$  sont des constantes matérielles (coefficients de Lamé),  $\mu$  s'interprète facilement dans un essai de cisaillement simple : c'est le rapport de la contrainte de cisaillement à l'angle de glissement engendré. On l'appelle pour cette raison le *module de cisaillement*.

On peut aussi inverser cette relation en introduisant deux autres constantes, le module de Young et le coefficient de Poisson.

$$\varepsilon = \frac{1+\nu}{E} \sigma - \frac{\nu}{E} \operatorname{tr}(\sigma) I \quad (2.5)$$

Cependant, il est habituellement plus approprié de se rapporter à des constantes alternatives : le module de cisaillement  $G$  (décrivant le changement de la forme au volume constant) et le module de compressibilité  $K$  (décrivant le changement du volume),

Ceci est dû au fait que, si nous présentons la définition de la contrainte déviatorique  $S_{ij}$  et déformation déviatorique  $e_{ij}$ :

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - p \delta_{ij} \quad (2.6)$$

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_v \delta_{ij} \quad (2.7)$$

La loi de comportement mène aux formes particulièrement significatives :

$$p = K\varepsilon_v \quad (2.8)$$

$$s_{ij} = 2Ge_{ij} \quad (2.9)$$

Ces formes montrent la réponse découplée d'un matériel isotrope : les incréments des déformations de cisaillement dépendent seulement des incréments du déviateur de contrainte correspondant ( $\mathbf{s}_{ij}$ ) et les changements de volume dépendent seulement des incréments de la composante sphérique ( $\mathbf{p}$ ) correspondante du tenseur de contrainte.

Comme seulement deux constantes sont vraiment indépendantes, on peut donner les relations suivantes :

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.10)$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (2.11)$$

$$K = \lambda + \frac{2}{3}G = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (2.12)$$

$$E = \frac{G(3\lambda + 2G)}{\lambda + G} \quad (2.13)$$

Le tableau 2.1 résume les propriétés élastiques de quelques matériaux (module de Young E et le coefficient de Poisson  $\nu$ ) :

**Tableau 2.1-** Exemples de caractéristiques élastiques

matériau	température (degré C)	module d'Young (GPa)	coefficient de Poisson
Alliage d'aluminium AU4G	20	72	0,32
	200	66	0,325
	500	50	0,35
Alliage de titane Ti 4Al 4Mn	20	315	0,34
	200	115	0,34
Acier XC10	20	216	0,29
	200	205	0,30
	600	170	0,315
Fonte grise	20	100	0,29
Acier inoxydable austénitique 316	20	196	0,3
	200	170	
	700	131	
Aluminium (A5)	20	68	0,33
Bronze	20	130	0,34
	180	61	
Plexiglass	20	2,9	0,4
Araldite	20	3	0,4
Caoutchouc	20	0,002	0,5
verre-epoxy (sens long)	20	19	0,3
carbone-epoxy (sens long)	20	87,6	0,32
Béton	20	30	0,2
Granit	20	60	0,27
Pin sylvestre (sens long)	20	17	0,45
Pin sylvestre (sens trans.)	20	1	

Ces constantes élastiques ne peuvent pas prendre n'importe quelles valeurs, mais il y a des conditions qu'elles doivent satisfaire. Pour montrer ceci rappelons-nous que l'énergie de déformation stockée est une fonction  $\sigma_{ij}$  et  $\varepsilon_{ij}$ , définie positive.

Si nous écrivons l'énergie stockée comme somme de deux parties, une associée à la déformation volumétrique et l'autre à la distorsion (changement en forme) :

$$U = U_v + U_d \quad (2.14)$$

Alors la condition pour que l'énergie de déformation soit positive implique :

$$\begin{aligned} U(\mathbf{e}) &= \frac{1}{2} \lambda e_{jj} e_{kk} + \mu e_{ij} e_{ij} \\ &= \frac{1}{2} \lambda (e_x + e_y + e_z)^2 + \mu \left( e_x^2 + e_y^2 + e_z^2 + \frac{1}{2} \gamma_{xy}^2 + \frac{1}{2} \gamma_{yz}^2 + \frac{1}{2} \gamma_{zx}^2 \right) \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} U(\boldsymbol{\sigma}) &= \frac{1+\nu}{2E} \sigma_{ij} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{2E} \sigma_{jj} \sigma_{kk} \\ &= \frac{1+\nu}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + 2\tau_{xy}^2 + 2\tau_{yz}^2 + 2\tau_{zx}^2) - \frac{\nu}{2E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 \end{aligned} \quad (2.16)$$

Dans des applications particulières, il convient de décomposer le tenseur des déformations en deux parties nommées :

- Tenseur de déformation **sphérique**, définie par ( $e = \varepsilon$ ):

$$\tilde{e}_{ij} = \frac{1}{3} e_{kk} \delta_{ij} = \frac{1}{3} \vartheta \delta_{ij} \quad (2.17)$$

- Tenseur de déformations **déviatorique**, définie par :

$$\hat{e}_{ij} = e_{ij} - \frac{1}{3} e_{kk} \delta_{ij} \quad (2.18)$$

Notez que la déformation totale est la somme des deux types de déformations :

$$e_{ij} = \tilde{e}_{ij} + \hat{e}_{ij} \quad (2.19)$$

Le tenseur de déformation **sphérique** représente la déformation volumétrique seulement et c'est un tenseur isotropique, étant le même dans tous les systèmes de coordonnées.

Le tenseur de déformation **déviatorique** tient en compte des changements de forme des éléments des matériaux. Il peut être remarqué que les principales directions des déformations déviatoriques sont les mêmes que celles du tenseur des déformations.

- Le développement de cette décomposition est accompli en utilisant les définitions des tenseurs sphérique et déviatoriques de déformation et de contraintes.

Pour des matériaux isotropes, la contrainte sphérique produit une déformation volumique seulement, tandis que la contrainte déviatorique cause des changements de distorsion seulement.

L'énergie de la contrainte volumique est trouvée en considérant les composantes sphériques ou hydrostatiques de contrainte et déformation.

$$U_v = \frac{1}{2} \tilde{\sigma}_{ij} \tilde{e}_{ij} = \frac{1}{6} \sigma_{jj} e_{kk} = \frac{1-2\nu}{6E} \sigma_{jj} \sigma_{kk} = \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 \quad (2.20)$$

L'énergie de déformation de distorsion résulte des composantes déviatoriques ou peut être facilement déterminés en utilisant la relation suivante :

$$U_d = \frac{1}{12\mu} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)] \quad (2.21)$$

## 2.4 Limites des constantes élastiques

Les concepts d'énergie de déformation nous permettent de générer des limites particulières sur les constantes élastiques. Pour le cas isotrope, on considère les trois cas détaillés dans les sections suivantes.

### 2.4.1 Traction uniaxiale

Réalisons une expérience où l'état de contrainte est uniaxial (traction suivant Ox par exemple). La matrice du tenseur des contraintes et celle du tenseur des déformations sont donc de la forme :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

En appliquant la loi de Hooke, on a en particulier :

$$\sigma_{xx} = E\epsilon_{xx} \quad \epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} = -\nu\epsilon_{xx} \quad (2.22)$$

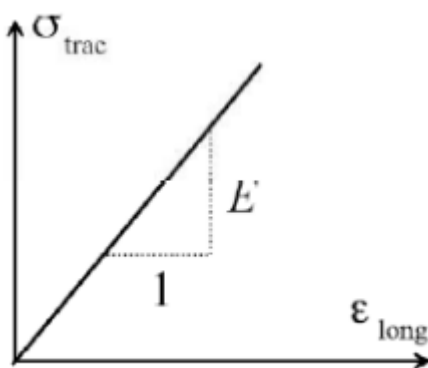
Dans un essai où l'état de contrainte est uniaxiale,

- Le module de Young E est la pente de la courbe :

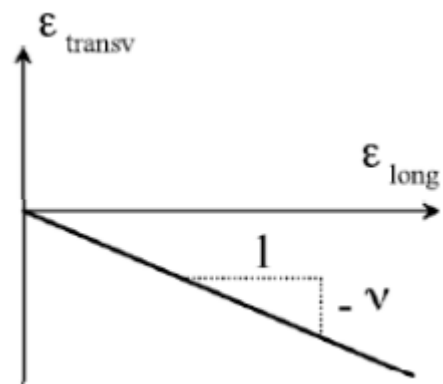
$$\sigma_{trac.} = f(\epsilon_{long.})$$

- Le coefficient de Poisson  $\nu$  est la pente de la courbe :

$$\epsilon_{transv.} = -f(\epsilon_{long.})$$



(a)



(b)

**Figure 2.2-** Essai de traction uniaxiale sur un matériau élastique : (a) courbe contrainte-déformation ; (b) courbe déformation longitudinale-déformation transversale

L'énergie de déformation se réduit à :

$$U = \frac{1+\nu}{2E}\sigma^2 - \frac{\nu}{2E}\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{2E} \quad (2.23)$$

Puisque l'énergie de déformation est définie positive, la relation précédente implique que le module d'élasticité doit être positif :  $E > 0$

### 2.4.2 Cisaillement simple

Considérons le cas du cisaillement simple uniforme défini par le tenseur des contraintes

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

L'énergie de déformation devient :

$$U = \frac{1+\nu}{2E}(2\tau^2) = \frac{\tau^2}{E}(1+\nu) \quad (2.24)$$

A nouveau, en invoquant la propriété définie positive de l'énergie de déformation et en utilisant le résultat précédent de  $E > 0$  donne :

$$1 + \nu > 0 \Rightarrow \nu > -1$$

### 2.4.3 Compression hydrostatique

Le dernier exemple est choisi comme une compression hydrostatique uniforme spécifiée par :

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}$$

Notez que la tension hydrostatique doit aussi être utilisée pour cet exemple, évaluons les limites de l'énergie de déformation :

$$U = \frac{1+\nu}{2E}3p^2 - \frac{\nu}{2E}(-3p)^2 = \frac{3p^2}{2E}(1-2\nu) \quad (2.25)$$

En utilisant la propriété définie positive avec  $E > 0$  donne le résultat :

$$1 - 2\nu > 0 \Rightarrow \nu < \frac{1}{2}$$

En combinant les deux relations, nous aurons les limites du coefficient de Poisson :

$$-1 < \nu < \frac{1}{2}$$



En utilisant les relations entre les constantes élastiques citées auparavant, le résultat précédent implique aussi que :

$$k > 0, \mu > 0$$

La preuve expérimentale indique que la plupart des matériaux réels ont des rapports de Poisson positives, et ainsi,

$$0 < \nu < 1/2.$$

Cela implique en outre que

$$\lambda > 0.$$

## 2.5 Le matériau élastique et les essais élémentaires

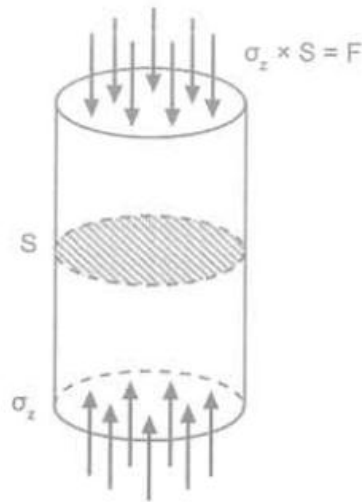
Le matériau élastique est celui qui permet le mieux de représenter ce qu'est un module de déformation. Le corps parfaitement élastique, à comportement linéaire et isotrope, est le plus simple, ayant des propriétés identiques dans toutes les directions de l'espace. Ce n'est pas toujours le cas, puisque le bois, par exemple, du fait de sa croissance, ne possède pas les mêmes propriétés verticalement et horizontalement. Il en est de même d'autres matériaux industriels du fait de leur mode d'élaboration.

Pour le sol, dans le domaine limité des contraintes appliquées où l'on peut admettre que l'élasticité régit le comportement, il peut en être également de même ;

Ainsi pour des formations alluvionnaires, le mode de dépôt par couches horizontales a conduit le plus souvent à un état mécanique anisotrope ; ce n'est pas le cas, au contraire, de massifs ayant subi des forces tectoniques ou issus de coulées magmatiques et pour lesquels les propriétés sont encore plus anisotropes.

### 2.5.1 Essai de compression ou de traction, simple

La mesure considérée comme la plus simple, du caractère élastique et isotrope d'un solide, consiste à soumettre une éprouvette parallélépipédique ou cylindrique de section  $S$  à un essai de compression simple ou à un essai de traction simple, tel que représente la figure 2.3.



**Figure 2.3-** Essai de compression simple

L'extension de l'élément est alors donnée par :

$$\frac{\Delta L}{L} = \varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} \quad (2.26)$$

Et l'allongement par :

$$\Delta L = \frac{FL}{ES} \quad (2.27)$$

Par convention  $\sigma_z$  est négatif en cas de compression et positif dans le cas de traction. Cette extension longitudinale s'accompagne de déformations latérales qui s'expriment par :

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu \frac{\sigma_z}{E} \quad (2.28)$$

Où  $\nu$  est le coefficient de Poisson ; Ces trois relations conduisent à la variation de volume de l'éprouvette donnée par :

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} (1 - 2\nu) \quad (2.29)$$

Ceci montre qu'un dispositif permettant de mesurer la seule variation de volume  $\Delta V$  ne permet pas d'accéder directement au module ; pour  $\nu = 0,5$ , valeur maximale du coefficient de Poisson,  $\Delta V$  est nul, le sol est déformable mais est incompressible.

C'est donc la mesure simultanée de  $\varepsilon_z$ , et  $\varepsilon_x$  qu'il y a lieu d'envisager ; elle présente cependant quelques difficultés opératoires liées au fait que l'effort  $F$  est généralement appliqué par l'intermédiaire de plaques de contact, rigides, aux extrémités de l'éprouvette ; cela empêche, du fait du frottement, la libre

extension radiale à ce niveau et entraîne une déformation dite en (tonneau). L'utilisation de graisse, téflon, permet de pallier cette difficulté.

### 2.5.2 Essai triaxiale

Les études expérimentales à l'appareil triaxial constituent la base de la plupart des connaissances actuelles sur le comportement mécanique des sols (Fig. 2.4). De très nombreux types d'essais peuvent être réalisés dans une cellule triaxiale :

- des essais de cisaillement drainé ou non drainé, précédé ou non d'une consolidation de l'éprouvette sous un champ de **contraintes isotrope** ou **anisotrope** ;
- des essais de consolidation anisotrope ;
- des essais de fluage ;
- des essais de type  $K_0$  (à déformation latérale nulle) ;
- des essais drainés suivant des chemins de contraintes imposés.

En restant dans le cadre **strictement élastique**, sur un élément toujours parallélépipédique, le système de contraintes appliquées se réduit à  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  et  $\sigma_z$  ; l'application du principe de superposition, applicable à l'élasticité, conduit aux trois extensions suivantes :

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]\end{aligned}\quad (2.30)$$

Pour une éprouvette cylindrique  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z$  (contrainte radiale), ce qui simplifie les expressions ci-dessus. La variation de volume est :

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{1-2\nu}{E} (2\sigma_r + \sigma_z) \quad (2.31)$$

La mesure de deux grandeurs ( $\varepsilon_z$ , et  $\varepsilon_r$  par exemple) permet d'accéder aux deux caractéristiques élastiques  $E$  et  $\nu$ .

La déformation volumique  $\varepsilon_{vol}$  et la contrainte effective moyenne sont définies par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{vol} &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \\ p' &= \frac{\sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3}{3}\end{aligned}\quad (2.32)$$

où  $(\varepsilon_i)$  et  $(\sigma'_i)$  sont les déformations et contraintes effectives principales.

- Le déviateur des contraintes  $q$  est exprimé pour sa part sous la forme :

$$q = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}{2}} \quad (2.33)$$

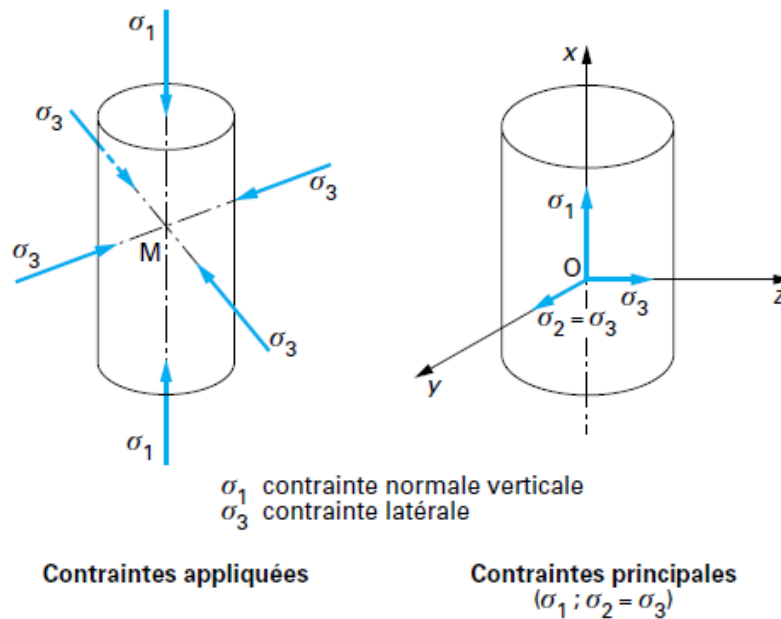


Figure 2.4- état de contraintes de l'éprouvette dans un essai triaxial

### 2.5.3 Essai œdométrique

On peut imaginer un autre type d'essai, à géométrie simple, qui consiste à enfermer un échantillon de matériau élastique d'épaisseur  $L$  dans une boîte totalement indéformable latéralement, cylindrique ou cubique et simplement ouverte à sa partie supérieure, où l'on applique par l'intermédiaire d'un piston rigide, un effort  $F$ .

Dans ce cas particulier, les déformations radiales sont évidemment empêchées et  $\epsilon_y = \epsilon_x$  (ou  $\epsilon_r$ ) = 0 ; on trouve facilement dans ces conditions :

$$\frac{\Delta L}{L} = \epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu} \quad (2.34)$$

qui ne permet d'accéder à  $E$  que si l'on connaît  $\nu$ . on constate d'ailleurs que si  $\nu = 0,5$  (matériau incompressible),  $E$ , est nul, le module n'est pas mesurable.

Les deux essais réalisables en laboratoire sur les sols, triaxial et à déformation latérale empêchée, n'ont jamais été mis en œuvre pour les matériaux comme l'acier, ayant été à l'origine de l'élasticité expérimentale et des lois de comportement qui en ont résulté.

L'acier se prête particulièrement bien à l'essai très simple de compression, et plus précisément de traction. Comme il a déjà été dit pour l'essai triaxial, c'est la mécanique des sols qui a été à l'origine de son

développement, comme celui à déformation empêchée, où l'on reconnaît le principe de l'essai œdométrique, dont il sera parlé plus loin, avec les conditions particulières de son utilisation adaptée aux propriétés du sol.

#### 2.5.4 Essai de cisaillement simple (ou de distorsion)

Un autre type de déformation, angulaire ou de distorsion, peut affecter un matériau élastique, et l'illustration la plus simple qu'on peut en donner est la suivante, représentée dans la figure 2.5.

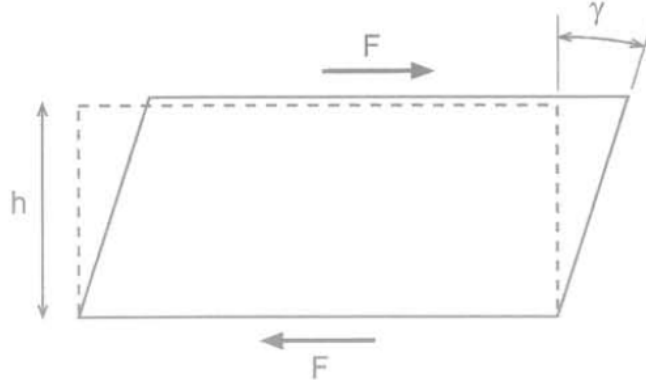


Figure 2.5- Distorsion lors d'un cisaillement simple

Si l'on applique à la surface  $S$  d'un parallélépipède rectangle une force  $F$  tangentielle, les différentes couches élémentaires infiniment petites glissent les unes sur les autres comme les feuilles de papier d'une pile ; la hauteur  $h$  ne change pas, seules les arêtes normales au plan d'application de la force tournent d'un angle  $\gamma$ , petit, que l'on peut considérer en première approximation lié à la force par la relation :

$$\gamma = \frac{1}{G} \frac{F}{S} = \frac{\tau}{G} \quad (2.35)$$

où  $G$  est appelé module de cisaillement, module de glissement ou module de rigidité.

On démontre que  $G$  est lié à  $E$  et  $\nu$  par la relation :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.36)$$

Ainsi, dans le cas très général d'un petit cube élémentaire au sein d'un solide linéairement élastique et isotrope, la déformation, produite par trois composantes normales et trois composantes tangentielles, résulte des trois compressions (ou extensions) superposées à trois efforts tangentiels auxquels on peut réduire les contraintes.

La justification des ouvrages élastiques repose sur la vérification en tout point du respect des propriétés élastiques, ce que les solutions analytiques ou les méthodes numériques permettent de faire en même temps qu'elles fournissent la valeur des déformations résultantes affectant l'ouvrage.

## 2.6 Schémas théoriques de comportement des sols

La démarche généralement suivie pour déterminer les lois de comportement des sols consiste à dégager des données expérimentales des concepts simplifiés traduisant les caractéristiques essentielles de leur comportement.

Ces concepts sont ensuite assemblés pour construire un modèle s'appuyant sur les théories de base de la mécanique des milieux continus (élastoplasticité avec écrouissage et fluage).

Les schémas de comportement **élastique linéaire** (isotrope ou anisotrope) ou **élastoplastique** parfait (élasticité linéaire associée à un critère de plasticité et à un potentiel plastique) sont les plus simples et les plus couramment utilisés par les ingénieurs géotechniciens.

Les autres schémas sont de type incrémental et non linéaire : les lois de comportement qui en sont déduites, souvent appelées lois de comportement évoluées, peuvent être classées en quatre grandes familles (Fig. 2.5) :

- les modèles élastiques **non linéaires ou hypoélastiques** et isotropes comme le modèle hyperbolique de **Duncan et Chang** ;
- les modèles d'**élastoplasticité** avec écrouissage, avec une **élasticité isotrope** (linéaire ou non linéaire), comme les modèles **Cam-Clay** et leurs dérivés, ou avec une **élasticité linéaire orthotrope** comme le modèle **Mélanie**. On distingue également les lois avec écrouissage positif et celles avec écrouissage négatif (prise en compte d'une résistance de pic et d'une résistance résiduelle) ;
- les modèles d'**élastoplasticité** à plusieurs mécanismes avec une **élasticité isotrope non linéaire** comme les modèles de **Hujeux** et ses dérivés, de **Lade** et de **Cambou-Jafari-Sidoroff** ;
- les modèles d'**élastoplasticité** intégrant la **viscosité**, comme le modèle de **Sekigushi-Ohta**, qui a été utilisé dans la modélisation des remblais lorsque le fluage joue un rôle important.

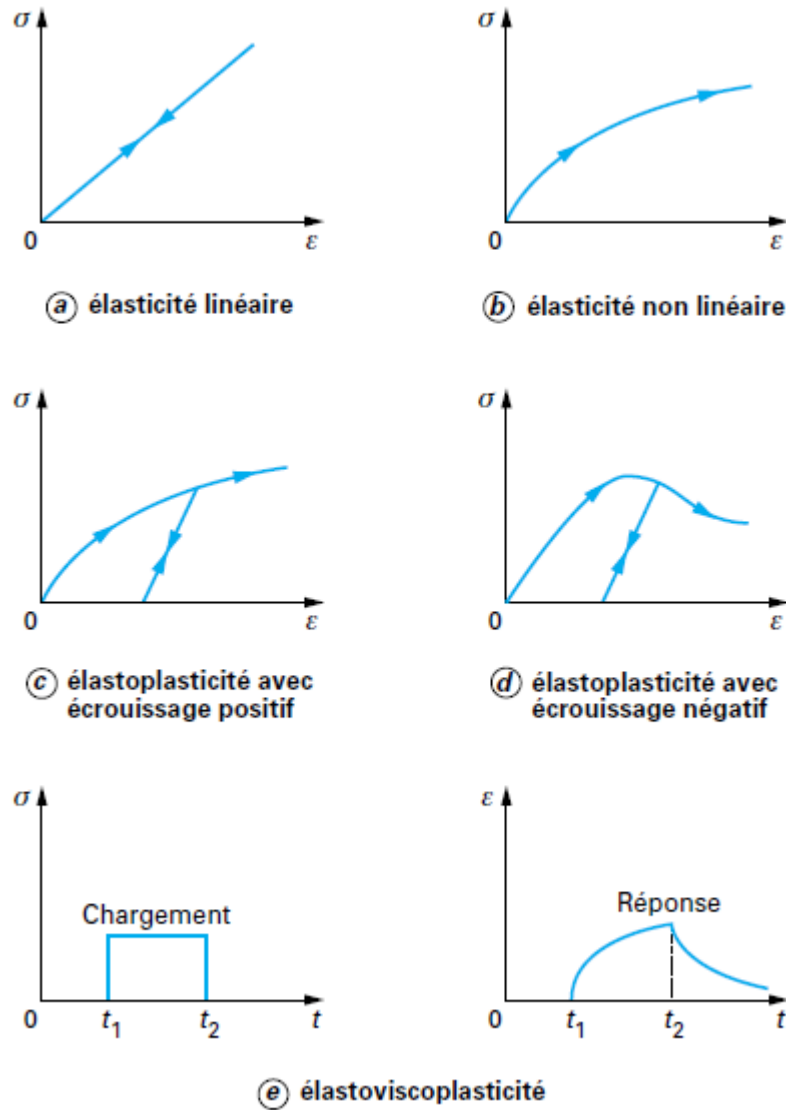


Figure 2.5 – Description schématique des principales lois de comportement

## Application

### Analyse élastique de l'essai œdométrique

Un échantillon de sol placé dans un moule cylindrique à parois indéformables est soumis à une pression verticale  $q$  et une pression horizontale  $P$ .

- Déterminer les différentes composantes de la matrice de comportement élastique, sachant que  $q=50$  kPa,  $\nu=0,40$  et  $E=25$  MPa.
- Déterminer la déformation axiale  $\epsilon_{ii}$ .

## ✚ Solution

Les parois du cylindrique sont indéformables, donc :  $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = 0$ . L'état de contrainte est défini par le tenseur :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & q \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \nu \delta_{ij} \frac{J_1}{E}$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz}))$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz}))$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} (\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}))$$

$$\varepsilon_{xx} = 0 \Rightarrow \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})) = 0 \Rightarrow P = \frac{\nu q}{(1-\nu)} = 33,3 \text{ kPa}$$

Calculons la déformation axiale  $\varepsilon_{zz}$  :

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} (\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})) = \frac{q}{E} \left( 1 - \frac{2\nu^2}{(1-\nu)} \right)$$

$$\text{Donc : } \varepsilon_{zz} = 0,93 \times 10^{-4}$$

Dr. Y.Kellouche



**Références bibliographiques**

- Z. Harichane, Cours de Magister « Rhéologie des sols », Université Haasiba Benbouali, Chelf, Algérie, 2010.
- R. Fortunier, Comportement mécanique des matériaux, Ecole Nationale Supérieure des Mines, 158 cours Fauriel
- A. Schofield and P. Wroth, Critical State, Soil Mechanics, *Lecturers in Engineering at Cambridge University*.
- O. Cumbarieu, L'usage des modules de déformation en géotechnique, Revue Française de Géotechnique, N°114,2006.
- A. Bouafia et al., Elasticité « rappel de cours et problèmes résolus », Copyright Eurl Pages Bleues Internationales,2014
- J-P. Magnan, P. Mestat, lois de comportement et modélisation des sols, Techniques de l'Ingénieur, traité Construction