Université Djilali Bounâama
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département MI
2020–2021

1$^{\text{ère}}$ année Math-info
Durée : 1 heure

Correction Examen Final : Analyse 2

<u>Exercice 01 :</u> (6pts=3.5+2.5) On a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-1}{1+\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)^2} = \frac{1}{2}\frac{x-\sqrt{1+x^2}}{1+x^2-x\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\left(\frac{x-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}-x}\right) = \frac{-1}{2\sqrt{1+x^2}} = -\frac{1}{2}\left(\arctan x\right)' \end{aligned}$$

On a $f'(x) = -\frac{1}{2}\left(\arctan x\right)'$ pour tout x$\in \mathbb{R}$. Ceci implique que $f'(x) = -\frac{1}{2}\left(\arctan x\right)' + C$, C est une constante réelle. Pour $x=0$, il résulte que $C = f(0) - \frac{1}{2}\left(\arctan 0\right) = \frac{\pi}{4}$. Alors

$$2f(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x.$$

<u>Exercice 02 :</u> (7pts=1+3+3)
1. Ecrivons le développement limité de $\frac{1}{1+x}$ au voisinage de 0, à l'ordre 3.

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^3\varepsilon(x).$$

2. En déduisant le développement limité de $\frac{1}{1+e^x}$ au voisinage de 0, à l'ordre 3.

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+e^x} &= \frac{1}{1+\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+x^3\varepsilon(x)\right)} \\ &= \frac{1}{2\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}+x^3\varepsilon(x)\right)} \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{1+y} \end{aligned}$$

où $y = \frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}+x^3\varepsilon(x)$, Donc d'aprés la première question, on obtient

$$\frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{2}\left(1 - y + y^2 - y^3 + y^3\varepsilon(y)\right)$$

avec $y^2 = \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + x^3\varepsilon(x)\right)^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{4} + x^3\varepsilon(x)$
$y^3 = \frac{x^3}{4} + x^3\varepsilon(x)$
on remplace, on trouve

$$\frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^3}{48} + x^3\varepsilon(x)$$

3. On pose $y = \frac{1}{x}$, donc

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{y\left(1+e^y\right)} = \frac{1}{y}\left(\frac{1}{2} - \frac{y}{4} + \frac{y^3}{48} + y^3\varepsilon(y)\right) \\ &= \frac{x}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{48x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon(\frac{1}{x^2}) \end{aligned}$$

Donc $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$est asymptote au graphe en $+\infty$. Comme $-\frac{1}{48x^2} \leq 0$, alors le graphe est dessous de l'asymptote.

<u>Exercice 03 :</u> (7pts=3.5+3.5) Calculer les primitives suivantes

1.

$$\begin{aligned} & \int \frac{x^2+3x}{\left(x^2+1\right)\left(x+1\right)^2}dx \\ =& \frac{1}{2}\int \frac{x+3}{x^2+1}dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{\left(x+1\right)^2} \\ =& \frac{1}{4}\int \frac{2x}{x^2+1}dx + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x^2+1}dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{\left(x+1\right)^2} \\ =& \frac{1}{4}\ln\left(x^2+1\right) + \frac{3}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} & \int \sqrt{x^2+2x-3}dx \\ =& \int \sqrt{\left(x+1\right)^2 - 4}dx = 2\int \sqrt{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - 1}dx \\ =& 2\left[\frac{1}{4}\sinh\left(2\,\mathrm{arg}\sinh\left(\frac{x+1}{2}\right)\right) + \frac{1}{2}\,\mathrm{arg}\sinh\left(\frac{x+1}{2}\right)\right] + C. \end{aligned}$$