Correction d'Examen d'Algèbre 2

Correction exercice 1.

1.

$$u=(x,y,z,t)\in E \Leftrightarrow \begin{cases}-7x+z+5t=0\\ x+y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-7x+z+5t=0\\ y=-x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}z=7x-5t\\ y=-x\end{cases}$$

Donc il existe z et t réels tels que :

$$u=(x,-x,7x-5t,t)=x(1,-1,7,0)+t(0,0,-5,1)$$

On pose $d=(1,-1,7,0)$ et $e=(0,0,-5,1)$.

Alors $E=Vect(d,e)$ c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

3p

$F=Vect(a,b,c)$ est par nature un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$

2. la famille (d,e) est libre car d et e ne sont pas proportionnels, d'autre par la famille (d,e) engendre E il s'agit donc d'une base de E.

La famille (a,b,c) engendre F, le problème est de savoir si elle est libre.

Pour tout α,β et γ réels

$$\alpha a+\beta b+\gamma c=0_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow \alpha(2,-1,1,2)+\beta(2,-1,6,1)+\gamma(6,-3,8,5)=(0,0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\end{matrix}\begin{cases}2\alpha+2\beta+6\gamma=0\\ -\alpha-\beta-3\gamma=0\\ \alpha+6\beta+8\gamma=0\\ 2\alpha+\beta+5\gamma=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix}L_1\\2L_2+L_1\\2L_3-L_1\\L_4-L_1\end{matrix}\begin{cases}2\alpha+2\beta+6\gamma=0\\ 0=0\\ 10\beta+10\gamma=0\\ -\beta-\gamma=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2\alpha+2\beta+6\gamma=0\\ -\beta-\gamma=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\alpha+\beta+3\gamma=0\\ \beta=-\gamma\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=-2\gamma\\ \beta=-\gamma\end{cases}$$

3p

La famille est donc liée, si on prend $\gamma=-1$ alors $\alpha=2$ et $\beta=1$ et on a :

$$2a+b-c=0_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow c=2a+b$$

$$F=Vect(a,b,c)=Vect(a,b,2a+b)=Vect(a,b)$$

la famille (a,b) est libre car a et b ne sont pas proportionnels, d'autre par la famille (a,b) engendre F il s'agit donc d'une base de F.

3. Soit $(x,y,z,t)\in E\cap F$; donc $(x,y,z,t)\in E$ et $(x,y,z,t)\in F$.

Alors, $\exists\, \alpha,\beta,\alpha',\beta'\in\mathbb{R}$ tels que $(x,y,z,t)=\alpha d+\beta e=\alpha' a+\beta' b$

Ainsi, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases}\alpha=2\alpha'+2\beta'\\ -\alpha=-\alpha'-\beta'\\ 7\alpha-5\beta=\alpha'+6\beta'\\ \beta=2\alpha'+\beta'\end{cases}$$

4p

D'après les calculs, on trouve ; $\alpha=0$, $\beta=\alpha'$, $\beta'=-\alpha'$

donc $(x,y,z,t)=(0,0,-5\alpha',\alpha')=\alpha'(0,0,-5,1)$, alors $\underline{\underline{E\cap F}}=Vect((0,0,-5,1))$

Correction exercice 2 :

1) Voir le cours. 3 p

2) Soient $(x,y,z),(x',y',z') \in \mathbb{R}^3$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

On a $f\big(\alpha(x,y,z)+(x',y',z')\big) = f\big((\alpha x+x', \alpha y+y', \alpha z+z')\big)$

$= \big(\alpha x+x'+2(\alpha y+y')+\alpha z+z' ; 2(\alpha x+x')+(\alpha y+y')+3(\alpha z+z') ;$
$-\alpha x-x'-\alpha y-y'-\alpha z-z'\big)$

D'après les calculs, on trouve 2 p

$f\big(\alpha(x,y,z)+(x',y',z')\big) = \alpha f((x,y,z)) + f((x',y',z'))$.

donc f est linéaire.

3) On a $\ker f = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f((x,y,z)) = 0_{\mathbb{R}^3} \}$.

donc : $(x,y,z) \in \ker f \Rightarrow \begin{cases} x+2y+z=0 \\ 2x+y+3z=0 \\ -x-y-z=0 \end{cases}$ 2 p

D'après les calculs, on obtient $x=y=z=0$

Alors $\ker f = 0_{\mathbb{R}^3}$.

(4) On a $\mathrm{Im} f = \{f(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$.

donc $f((x,y,z)) = (x+2y+z, 2x+y+3z, -x-y-z)$

$= x(1,2,-1) + y(2,1,-1) + z(1,3,-1)$.

Alors $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}((1,2,-1);(2,1,-1);(1,3,-1))$.

Il suffit de vérifier que ces vecteurs forme une famille libre:

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha(1,2,-1)+\beta(2,1,-1)+\gamma(1,3,-1)=0_{\mathbb{R}^3}$

D'après les calculs, On trouve $\alpha=\beta=\gamma=0$.

d'où $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}((1,2,-1)(2,1,-1),(1,3,-1)) = \mathbb{R}^3$.

3p

3