Université Djilali Bounâama — **1$^{\text{ère}}$ année Math-info**
Faculté des Sciences et de la Technologie — **Durée : 1 heure**
Département MI
2019–2020

Correction Rattrapage : Analyse 2

<u>Exercice 01 :</u> (6.5 pts) Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \arccos(1-x)$$

1. Domaine de définition

$$\begin{aligned} D_f &= \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq 1-x \leq 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : -2 \leq -x \leq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 2\} \\ &= [0,2]................(\mathbf{1.5pts}) \end{aligned}$$

On pose $g(x) = 1-x$, alors $f'(x) = -\frac{g'(x)}{\sqrt{1-g^2(x)}}$**.....(1 pts)**
Alors

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(1-x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2x+x^2}}\textbf{....(1pts)}$$

Calculons maintenant la dérivée de $h(x) = 2\arcsin\sqrt{\frac{x}{2}}$

$$h'(x) = 2\frac{\frac{1}{2}}{2\sqrt{\frac{x}{2}}\sqrt{1+\frac{x}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2x+x^2}} = f'(x)\textbf{.....(1.5pts)}$$

2. On a $f'(x) = h'(x)$ pour tout $x \in]0,2[$. Ceci implique que $f(x) = h(x) + C$, C est une constante réelle. Pour $x = 0$, il résulte que $C = f(0) - h(0) = 0$. Alors $f(x) = 2\arcsin\sqrt{\frac{x}{2}}$**.....(1.5.pts).**

<u>Exercice 02 :</u> (6 pts) Déterminer en utilisant **DL** la limite en **0** des fonctions f définies ci-dessous.

1) $f(x) = \frac{2x}{\ln(1+x)-\ln(1-x)} = \frac{2x}{\left(x-\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon_1(x)\right)-\left(-x-\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon_2(x)\right)}$
$= \frac{2x}{2x+x^2\varepsilon(x)} \to 1$**................(2pts)**

2) $f(x) = \frac{e^x-x-\cos x}{x^2} = \frac{1+x+\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon_1(x)-x-\left(1-\frac{x^2}{2}+x^3\varepsilon_2(x)\right)}{x^2} = \frac{x^2(1+\varepsilon_1(x)+x\varepsilon_2(x))}{x^2} \to 1$**................(2pts)**

3) $f(x)=\frac{\sin 2x-2\sin x}{2\ln(1+x)-2x-x^2}=\frac{2x-\frac{8x^3}{6}+x^4\varepsilon_1(x)-2\left(x-\frac{x^3}{6}+x^4\varepsilon_2(x)\right)}{2\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+x^3\varepsilon_3(x)\right)-2x-x^2}=\frac{-x^3+x^4\varepsilon_4(x)}{\frac{2x^3}{3}+x^3\varepsilon_3(x)}\to-\frac{3}{2}$**...............(2pts)**

<u>Exercice 03 :</u> (6.5pts) Soit f la fonction pour tout $x\in\mathbb{R}$ définie par

$$f(x)=\ln\left(\sqrt{1+x}\right)$$

1. Déterminons le développement limité de f, à l'ordre 2 au voisinage de 0.
a. Déterminons DL de $h(x)=\sqrt{1+x}$ à l'ordre 2 au voisinage de 0

$$h(x)=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+x^2\varepsilon\left(x\right)\textbf{.....(0.5 pts)}$$

b. On pose $u=\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+x^2\varepsilon\left(x\right)$, donc

$$\begin{aligned}f(x)&=\ln\left(1+u\right)=u-\frac{u^2}{2}+u^2\varepsilon_2\left(u\right)\textbf{......(1pts)}\\&=\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+x^2\varepsilon\left(x\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+x^2\varepsilon\left(x\right)\right)^2\textbf{.....(1pts)}\\&=\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}+x^2\varepsilon\left(x\right)\textbf{.....(1pts)}\end{aligned}$$

2. En déduisant l'équation de la tangente au point d'abscisse $x=0$ et la position de la tangente par rapport à la courbe.
L'équation de la tengente est

$$y=\frac{x}{2}\textbf{.....(1 pts)}$$

On a

$$f(x)-y=-\frac{x^2}{4}+x^2\varepsilon\left(x\right)=x^2\left(-\frac{1}{4}+\varepsilon\left(x\right)\right)$$

Cette expression est négative dans un voisinage de 0 donc la courbe est au-dessous de la tangente dans un voisinage de 0**......(1+1 pts).**