Université Djilali Bounâama — **$1^{\text{ère}}$ année Math-info**
Faculté des Sciences et de la Technologie — **Durée : 1 heure**
Département MI
2019–2020

Correction Examen Final : Analyse 2

<u>Exercice 01 :</u> (6.5 pts) Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

1. On pose $g(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, alors $f'(x) = \frac{g'(x)}{1+g^2(x)}$**.....(1 pts)**
Calculons maintenant $g'(x)$

$$g'(x) = \frac{\sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\textbf{....(1pts)}$$

alors

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\textbf{.....(2pts)}$$

2. On déduit que $f'(x) = \arcsin' x$, pour tout $x \in]-1,1[$. Ceci implique que $f(x) = \arcsin x + C$, C est une constante réelle. Pour $x = 0$, il résulte que $C = f(0) - \arcsin 0 = 0$. Alors $f(x) = \arcsin x$**.....(2.5pts).**

<u>Exercice 02 :</u> (6 pts) Déterminer en utilisant **DL** la limite en **0** des fonctions f définies ci-dessous.

1) $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{\ln(1+x)}{x^2} = \frac{1}{x} - \frac{x-\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon(x)}{x^2} = \frac{\frac{x^2}{2}-x^2\varepsilon(x)}{x^2}$
$= \frac{1}{2} - \varepsilon(x) \to \frac{1}{2}$**......(2pts)**,

2) $f(x) = \frac{\sin x - x}{x\ln(1-x^2)} = \frac{-\frac{x^3}{6}+x^4\varepsilon_1(x)}{x(-x^2+x^2\varepsilon_2(x))} = \frac{-\frac{x^3}{6}+x^4\varepsilon_1(x)}{-x^3+x^3\varepsilon_2(x)}$
$= \frac{-\frac{1}{6}+x\varepsilon_1(x)}{-1+\varepsilon_2(x)} \to \frac{1}{6}$**......(2pts)**,

3) $f(x) = \frac{\cos x}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} = \frac{1-\frac{x^2}{2}+x^3\varepsilon_1(x)}{x^2+x^4\varepsilon_2(x)} - \frac{1}{x^2}$
$= \frac{-\frac{1}{2}+x\varepsilon_1(x)}{1+x^2\varepsilon_2(x)} \to -\frac{1}{2}$**......(2pts)**,

<u>Exercice 03 :</u> (6.5pts) Soit f la fonction pour tout $x \in \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \sqrt{1+x+x^2}$$

1. Déterminons le développement limité de f, à l'ordre 2 au voisinage de 0.
On pose $u = x + x^2$, donc

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)u^2 + u^2\varepsilon_2(u) \textbf{......(1pts)} \\ &= 1 + \frac{1}{2}\left(x+x^2\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x+x^2\right)^2 + \left(x+x^2\right)^2\varepsilon_2\left(x+x^2\right) \textbf{.....(1pts)} \\ &= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x) \textbf{.....(1pts)} \end{aligned}$$

2. En déduisant l'équation de la tangente au point d'abscisse $x = 0$ et la position de la tangente par rapport à la courbe.
L'équation de la tengente est

$$y = 1 + \frac{1}{2}x \textbf{.....(1.5 pts)}$$

On a

$$f(x) - y = \frac{3}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x) = x^2\left(\frac{3}{8} + \varepsilon(x)\right)$$

Cette expression est positive dans un voisinage de 0 donc la courbe est au-dessus de la tangente dans un voisinage de 0**......(1+1 pts).**