Chapitre 2

Intégrales définies

2.0.1 Subdivision d'un intervalle fermé borné

Définition 2.0.1

On appelle partition finie de l'intervalle $[a, b]$, toute famille strictement croissante

$$p = \{x_k : \; x_k \in [a, b]\}_{k=0}^{n}, \tag{2.1}$$

vérifiant $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$.

Exemple

La famille suivante :

$$p = \left\{x_k : x_k = \frac{k}{n}\right\}_{k=0}^{n}, \tag{2.2}$$

est une partition régulière de l'intervalle $[0, 1]$.

Définition 2.0.2

Soient p_1 et p_2 deux partitions finies de l'intervalle $[a, b]$, on dit que la partition p_2 est plus fine que p_1 si $p_1 \subset p_2$.

2.0.2 fonction en escalier

Définition 2.0.3

On dit que la fonction $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ est en escalier s'il existe une partition $p = \{x_k\}_{k=0}^{n}$ de $[a,b]$ et des constantes $C_k \in \mathbb{R}$, telles que

$$\forall k \in \{0,1,...,n-1\}, \forall x \in]x_k, x_{k+1}[: \varphi(x) = C_k. \tag{2.3}$$

Exemple

La fonction partie entière définie par :

$$E(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x \in [-1,0[\\ 0, & \text{si } x \in [0,1[\\ 1, & \text{si } x \in [1,2[, \end{cases}$$

est une fonction en escalier.

2.0.3 Intégrale d'une fonction en escalier

Définition 2.0.4

Soient φ une fonction en escalier sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et $a, b \in I$ et $p = \{x_k\}_{k=0}^{n}$ une partition de $[a,b]$. L'intégrale de la fonction φ est donnée par :

$$I(\varphi, p) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k (x_{k+1} - x_k). \tag{2.4}$$

2.1 Intégrale définie

Maintenant on présente l'intégrale définie d'une fonction.
Soit f une fonction bornée sur l'intervalle $[a,b]$, on pose

$$I^+(f,p) = \inf\{I(\psi,p), \psi \text{ en escalier} : \psi \geq f\}, \tag{2.5}$$

et

$$I_-(f,p) = \sup\{I(\varphi,p), \varphi \text{ en escalier} : \varphi \leq f\}, \tag{2.6}$$

on a

$$\varphi \leq f \leq \psi \Rightarrow I(\varphi,p) \leq I(\psi,p),$$

de plus

$$I_{-}(f,p) \leq I^{+}(f,p). \tag{2.7}$$

Définition 2.1.1

Soit f une fonction bornée sur $[a,b]$.
On dit qu'elle est intégrable si pour toute partition ordonnée $p \in P$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} I_{-}(f,p) = \lim_{n\to+\infty} I^{+}(f,p), \tag{2.8}$$

et on note l'intégrable de f sur $[a,b]$ par :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} I_{-}(f,p) = \lim_{n\to+\infty} I^{+}(f,p). \tag{2.9}$$

Théorème 2.1.1

Soit f une fonction définie sur $[a,b]$. On dit que f est intégrable si et seulement s'il exixte deux suites de fonctions en escalier $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} I_{-}(\varphi_n,p) = \lim_{n\to+\infty} I^{+}(\psi_n,p). \tag{2.10}$$

Preuve.

1) Montrons l'implication :

$$\begin{aligned}\exists(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}},(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad &: \quad \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b \varphi_n(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b \psi_n(x)\,dx \\ &\Rightarrow \quad f \text{ est intégrable.}\end{aligned}$$

On a d'après la définition

$$\varphi_n \leq f \leq \psi_n \Rightarrow \begin{cases} \int_a^b \varphi_n(x)\,dx \leq I_{-}(f,p) \\ \text{et} \\ I^{+}(f,p) \leq \int_a^b \psi_n(x)\,dx, \end{cases}$$

donc

$$0 \leq I^{+}(f,p) - I_{-}(f,p) \leq \left(\int_a^b \psi_n(x)\,dx - \int_a^b \varphi_n(x)\,dx\right),$$

et comme

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b \varphi_n(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b \psi_n(x)\,dx,$$

implique

$$I^{+}(f,p) = I_{-}(f,p),$$

c'rst-à-dire f est intégrable.

2) Maintenant on montre

$$f \text{ est intégrable } \Rightarrow \exists (\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\psi_n)_{n\in\mathbb{N}} :$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi_n(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \psi_n(x)\,dx.$$

D'après la définition du sup, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$I_-(f,p) - \frac{1}{n} \leq I_-(f,p),$$

et d'après (2.6) il existe une suite de fonctions en escalier (φ_n) telle que $\varphi_n \leq f$, on a

$$I(\varphi_n, p) \geq I_-(f,p) - \frac{1}{2n}. \tag{2.11}$$

De la même façon, il existe une suite de fonctions en escalier (ψ_n) telle que $\psi_n \leq f$ et d'après la définition du inf, on peut écrire

$$I(\psi_n, p) \leq I^+(f,p) + \frac{1}{2n}. \tag{2.12}$$

et comme f est intégrable et d'après (2.11) et (2.12) on trouve

$$0 \leq \int_a^b \psi_n(x)\,dx - \int_a^b \varphi_n(x)\,dx \leq \frac{1}{n},$$

par la limite, on obtient le résultat. □

2.2 Propriétés des intégrales définies

2.2.1 Relation de Chasles

Proposition 2.2.1

Soit f une fonction intégrable sur l'intervalle $[a,b]$, pour tout c dans $[a,b]$, on a

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{2.13}$$

Preuve.

1) Si f est intégrable sur $[a,b]$, alors il existent $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de fonctions en escalier sur $[a,b]$, où

$$\varphi_n \leq f \leq \psi_n,$$

et l'égalité suivante est vérifiée

$$\int_a^b \psi_n(x)\,dx - \int_a^b \varphi_n(x)\,dx = \left(\int_a^c \psi_n(x)\,dx - \int_a^c \varphi_n(x)\,dx\right) + \left(\int_c^b \psi_n(x)\,dx - \int_c^b \varphi_n(x)\,dx\right),$$

avec

$$0 \leq \int_a^c \psi_n(x)\,dx - \int_a^c \varphi_n(x)\,dx \leq \int_a^b \psi_n(x)\,dx - \int_a^b \varphi_n(x)\,dx$$

et

$$0 \leq \int_c^b \psi_n(x)\,dx - \int_c^b \varphi_n(x)\,dx \leq \int_a^b \psi_n(x)\,dx - \int_a^b \varphi_n(x)\,dx.$$

D'après (2.10), on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi_n(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \psi_n(x)\,dx,$$

implique

$$0 \leq \lim_{n\to+\infty} \int_a^c [\psi_n(x) - \varphi_n(x)]\,dx \leq 0$$

et

$$0 \leq \lim_{n\to+\infty} \int_c^b [\psi_n(x) - \varphi_n(x)]\,dx \leq 0,$$

c'est-à-dire f est intégrable sur les intervalles $[a, c]$ et $[c, b]$. D'où le résultat. □

Remarque

Si $a = b$ alors

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \quad \text{et} \quad \int_a^c f(x)\,dx = -\int_c^a f(x)\,dx.$$

2.2.2 Linéarité de l'intégrale définie

Proposition 2.2.2

Soient f et g deux fonctions intégrables sur l'intervalle I et $\lambda \in \mathbb{R}$, pour tout a et b dans I, on a

$$i) \quad \int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

et

$$ii) \quad \int_a^b [\lambda f(x)]\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx.$$

Preuve.

i) Si f et g sont deux fonctions intégrables sur $[a,b]$, alors il existent $\left(\varphi_{n_i}\right)_{n\in\mathbb{N}}, \left(\psi_{n_i}\right)_{n\in\mathbb{N}}, i\in\{1,2\}$ des suites de fonctions en escalier sur $[a,b]$, où

$$\varphi_{n_1} \leq f \leq \psi_{n_1} \text{ et } \varphi_{n_2} \leq g \leq \psi_{n_2}$$

avec

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b \varphi_{n_1}(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b \psi_{n_1}(x)\,dx$$

et

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b \varphi_{n_2}(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b \psi_{n_2}(x)\,dx,$$

c'est-à-dire

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b \left[\varphi_{n_1}(x)+\varphi_{n_2}(x)\right]dx = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b \left[\psi_{n_1}(x)+\psi_{n_2}(x)\right]dx.$$

Donc la fonction $f+g$ est une fonction intégrable sur $[a,b]$.

ii) De la même manière si f est une fonction intégrable sur $[a,b]$, alors λf est intégrable sur $[a,b]$. □

Proposition 2.2.3

Soient f et g deux fonctions intégrables sur l'intervalle $[a,b]$, pour tout $x\in[a,b]$, on a

$$i)\quad f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq 0,$$

$$ii)\quad f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

Preuve.

i) Soit f une fonction positive et intégrable sur $[a,b]$, alors il existe deux suites de fonctions en escalier (φ_n) et (φ_n), telles que

$$0 \leq \varphi_n \leq f \leq \varphi_n.$$

D'après (2.5) et (2.6), et la fonction $x\mapsto 0$ est aussi en escalier, alors on a

$$0 \leq \int_a^b f(x)\,dx.$$

ii) Il suffit de voir que $g(x)-f(x)\geq 0$ et d'après i) on obtient le résultat. □

2.3 Intégrale fonction de sa borne supérieure

Le théorème suivant présente la primitive sous forme intégrale dépendant de la borne supérieure

Théorème 2.3.1

Soit f une fonction continue sur l'intervalle I et a un réel dans I. Alors la fonction F définie par :

$$x \longmapsto F(x) = \int_a^x f(t)dt, \ \forall x \in I,$$

est vérifiée les conditions suivantes :

$i)$ $F(a) = 0$.

$ii)$ La fonction F est continue.

$iii)$ F est la primitive de la fonction f sur $[a,b]$.

$iv)$ La foncrion F est unique.

Preuve.

$i)$ On a

$$F(a) = \int_a^a f(t)dt = 0.$$

$ii)$ soit $x_0 \in [a,b]$, par la relation de Chasles, on peut écrire :

$$F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^x f(t)dt,$$

et comme f est bornée sur $[a,b]$, on a pour $t \in [a;b]$ il existe $M > 0$ tel que

$$|f(x)| \leq M,$$

alors, on obtient

$$|F(x) - F(x_0)| \leq \int_{x_0}^x |f(t)|\, dt = M(x - x_0),$$

et

$$\lim_{x \to x_0} |F(x) - F(x_0)| = \ 0.$$

Donc F est continue sur $[a,b]$.

$iii)$ Maintenant on montre que :

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = f(x),$$

soient $x \in [a,b]$ et h

un réel tel que $x + h \in [a,b]$, d'après la formule (2.13), on a :

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) &= \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_a^{x+h} f(t)dt + \int_x^a f(t)dt \\ &= \int_x^{x+h} f(t)dt, \end{aligned}$$

par le théorème de la moyenne, il existe $c \in]x, x+h[$ tel que

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t)dt = f(c)h,$$

c'est-à-dire

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(c),$$

il existe $\theta \in [0,1]$, où $c = x + \theta h$ et si $h \to 0$ alors $c = x$.
D'où

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$

Par conséquent F est une primitive de la fonction f.

$iv)$ L'unicité de F, on suppose que si la fonction G est une primitive de f sur I, alors pour tout $x \in I$, on a

$$F(x) = G(x) - G(a),$$

alors $\forall x \in I$,

$$F'(x) = G'(x) = f(x),$$

et en plus

$$F(a) = G(a) - G(a) = 0,$$

donc la fonction F est la primitive unique de f sur I qui s'anulle en a. □

Exemple

Déterminer par l'intégration par parties la primitive de la fonction $x \longmapsto \ln(x)$ qui s'anulle en 1.

On sait que la fonction $x \longmapsto \ln(x)$ est continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$, alors sa primitive qui s'anulle en 1 c'est la fonction F qui est définie par :

$$x \longmapsto F(x) = \int_a^x \ln(t)dt, \text{ sur }]0, +\infty[,$$

on pose

$$\begin{cases} u(t) = \ln(t) \\ v'(t) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(t) = \dfrac{1}{t} \\ v(t) = t, \end{cases}$$

par l'intégration par parties, on trouve

$$F(x) = [t\ln(t)]_1^x - \int_a^x dt = x\ln(x) - x + 1,$$

Donc la primitive de la fonction $x \longmapsto \ln(x)$ sur $]0, +\infty[$ est donnée par :

$$x \longmapsto F(x) = x(\ln(x) - 1) + 1.$$

Exemple

Soit F la fonction définie par :

$$x \longmapsto F(x) = \int_1^x \left(t - \frac{1}{2}\right) dt, \quad \text{sur} \quad [1, +\infty[,$$

La fonction $t \mapsto f(t) = t - \dfrac{1}{2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, avec $F(1) = 0$,

alors la fonction F est une primitive de $t \mapsto f(t) = t - \dfrac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}$, alors $\forall x \in \mathbb{R}$

$$F'(x) = x - \frac{1}{2}.$$

2.4 Formule de Newton-Leibniz

Théorème 2.4.1

Soit F une primitive de la fonction continue f sur l'intervalle $[a, b]$. Alors l'intégrale définie de f sur $[a, b]$ est donnée par :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Preuve.
Posons

$$x \longmapsto G(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

d'après le théorème 2.3.1, la fonction G est une primitive de f sur $[a, b]$, telle que

$$G(b) = \int_a^b f(t)dt \quad \text{et} \quad G(a) = 0.$$

Supposons que F une deuxième primitive de f sur $[a, b]$ qui vérifiée la relation suivante :

$$F(x) = G(x) + c,$$

où

$$F(a) = G(a) + c \quad \text{et} \quad G(b) = F(b) - F(a),$$

c'est-à-dire

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

D'où le théorème est prouvé. $\square$

Exemple

Calculer l'intégrale définie suivante

$$I=\int_0^{\pi}\cos\left(\frac{2}{3}t\right)dt.$$

On a

$$I=\int_0^{\pi}\cos\left(\frac{2}{3}t\right)dt=\frac{3}{2}\left[\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)-0\right]=\frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Remarque

Toutes les propriétées qu'on a déjà vus dans le premier chapitre restent valable aussi dans ce chapitre avec la constante $C=0$.

2.5 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème 2.5.1

Soient f et g deux fonctions intégrables sur l'intervalle $[a,b]$, alors on a

$$\int_a^b f(t)g(t)dt\leq\left(\int_a^b (f(t))^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b (g(t))^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.14}$$

Preuve.

Soit λ un nombre réel, on considère le polynôme positif $P(\lambda)$ de degré 2 suivant :

$$\begin{aligned}P(\lambda) &= \int_a^b (\lambda f(t)+g(t))^2\,dt\\ &= \lambda^2\int_a^b f^{\,2}(t)dt+2\lambda\int_a^b f(t)g(t)\,dt+\int_a^b g^2(t)dt,\end{aligned}$$

Son discriminant réduit

$$\Delta'=\left(b'\right)^2-ac\leq 0,$$

où

$$a=\int_a^b f^{\,2}(t)dt,\quad b'=\int_a^b f(t)g(t)\,dt\quad \text{et}\ \ c=\int_a^b g^2(t)dt,$$

c'est-à-dire

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)dt\right)^2-\int_a^b f^{\,2}(t)dt\int_a^b g^2(t)dt\leq 0.$$

Ce qui donne l'inégalité recherchée □

Exemple

Montrer que

$$0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos(t)}dt \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \tag{2.15}$$

i) On sait que $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$0 \leq \sqrt{\cos(t)} \Rightarrow 0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos(t)}dt \tag{2.16}$$

ii) Pour l'inégalité

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos(t)}dt \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

on pose

$$f(t) = 1 \quad \text{et} \quad g(t) = \sqrt{\cos(t)},$$

l'inégalité (2.16) nous permet à écrire, $\forall\ t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos(t)}dt &\leq \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sqrt{\left(\frac{\pi}{2} - 0\right)}\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0)} \\ &\leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Donc d'après (2.16) et (2.17), on obtient (2.15).

Théorème de la moyenne

Théorème 2.5.2

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b - a). \tag{2.18}$$

Preuve.

Posons

$$m = \min_{x\in[a,b]} f(x) \quad \text{et} \quad M = \max_{x\in[a,b]} f(x),$$

où

$$m \leq f(x) \leq M,$$

d'après la formule de Newton-Leibniz, on peut écrire

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a),$$

c'est-à-dire

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M,$$

comme f est continue sur $[a,b]$ le théorème des valeurs intermidiaires nous assure l'existence d'un point $c \in [a,b]$ avec

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

D'où le théorème est démontrer. □

2.6 Sommes de Darboux-Conditions de l'existence de l'intégrale

Définition 2.6.1

Soient f une fonction définie bornie sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et $a,b \in I$ et $p = \{x_k\}_{k=0}^n$ une partition de $[a,b]$. Les sommes de Darboux inférieure et supérieure respectivement de la fonction f sont données par :

$$L(f,p) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k (x_{k+1}-x_k) \quad \text{et} \quad U(f,p) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k (x_{k+1}-x_k), \tag{2.19}$$

où

$$m_k = \inf\{f(x), x \in [x_k, x_{k+1}]\}, \quad M_k = \sup\{f(x), x \in [x_k, x_{k+1}]\}.$$

Soient f une fonction définie et bornée sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et $a,b \in I$ et $p = \{x_k\}_{k=0}^n$ une partition de $[a,b]$.

On pose

$$U^-(f,p) = \inf\{U(f,p), \forall p \in P\}, \tag{2.20}$$

et

$$L_+(f,p) = \sup\{L(f,p), \forall p \in P\}. \tag{2.21}$$

Définition 2.6.2

Soit f une fonction définie et bornie sur $[a,b]$. On dit qu'elle est intégrable si pour toute partition P de l'intervalle $[a,b]$

$$L_{+}(f,p)=U^{-}(f,p), \tag{2.22}$$

on note l'intégrable de f sur $[a,b]$ par :

$$\int_a^b f(x)\,dx = L_{+}(f,p)=U^{-}(f,p). \tag{2.23}$$

Exemple

Soient $f \equiv C$ et $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, alors

$$L(f,p)=\sum_{k=0}^{n-1} m_k\left(x_{k+1}-x_k\right)=c(b-a) \quad \text{et} \quad U(f,p)=\sum_{k=0}^{n-1} M_k\left(x_{k+1}-x_k\right)=c(b-a),$$

c'est-à-dire

$$U^{-}(f,p)=L_{+}(f,p)=\int_a^b c\,dt = c(b-a).$$

2.7 Propriétés des sommes de Darboux

Proposition 2.7.1

Soit f une fonction définie et bornie sur l'intervalle $[a,b]$ et $p=\{x_k\}_{k=0}^{n}$ une partition de $[a,b]$. Alors

$$L(f,p)\leq L_{+}(f,p)\leq U^{-}(f,p)\leq U(f,p). \tag{2.24}$$

Preuve.

D'après la définition, on a

$$L(f,p)=\sum_{k=0}^{n-1} m_k\left(x_{k+1}-x_k\right) \quad \text{et} \quad U(f,p)=\sum_{k=0}^{n-1} M_k\left(x_{k+1}-x_k\right),$$

et

$$m_k = \inf_{x\in[x_k,x_{k+1}]} f(x) \quad \text{et} \quad M_k = \sup_{x\in[x_k,x_{k+1}]} f(x)$$

$$\overline{m} = \sup_{k\in\{1,\ldots,n\}} m_k \quad \text{et} \quad \underline{M} = \inf_{k\in\{1,\ldots,n\}} M_k$$

et comme

$$
\begin{aligned}
m_k &\leq \overline{m} \leq M_k \leq M \\
&\Rightarrow m_k(x_{k+1}-x_k) \leq \overline{m}(x_{k+1}-x_k) \leq \underline{M}(x_{k+1}-x_k) \leq M_k(x_{k+1}-x_k) \\
&\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1}-x_k) \leq \overline{m}\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k) \leq \underline{M}\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k) \leq \sum_{k=0}^{n-1} M_k(x_{k+1}-x_k) \\
&\Rightarrow L(f,p) \leq \overline{m}(b-a) \leq \underline{M}(b-a) \leq U(f,p).
\end{aligned}
$$

D'où la proposition est prouvée. □

Proposition 2.7.2

Soit f une fonction définie et bornie sur l'intervalle $[a,b]$
et $p=\{x_k\}_{k=0}^n$ une partition de $[a,b]$. Alors on a

$$
\underline{m}(b-a) \leq L(f,p) \leq U(f,p) \leq \overline{M}(b-a), \tag{2.25}
$$

où

$$
\underline{m} = \min\{m_k,\ k\in\{0,1...,n\}\},\quad \overline{M} = \max\{M_k,\ k\in\{0,1...,n\}\}.
$$

Preuve.
On a $\forall k \in \{0,1...,n-1\}$

$$
\begin{aligned}
\underline{m} &\leq m_k \leq M_k \leq M \\
&\Rightarrow \underline{m}(x_{k+1}-x_k) \leq m_k(x_{k+1}-x_k) \leq M_k(x_{k+1}-x_k) \leq \overline{M}(x_{k+1}-x_k) \\
&\Rightarrow \underline{m}\sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1}-x_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1}-x_k) \leq \sum_{k=0}^{n-1} M_k(x_{k+1}-x_k) \leq \overline{M}\sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1}-x_k.
\end{aligned}
$$

D'où le résultat. □

Théorème 2.7.1

Soit f une fonction définie et bornée sur l'intervalle $[a,b]$
et $p=\{x_k\}_{k=0}^n$ une partition de $[a,b]$. Alors

$$
(f \text{ est intégrable sur } [a,b]) \Longleftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists p \text{ partition} : U(f,p)-L(f,p) < \varepsilon).
$$

Preuve.

1) Supposons que f est intégrable sur $[a,b]$ et soit $\varepsilon > 0$,

$$\exists p_1 \in P : L_+(f,p_1) - \frac{\varepsilon}{2} \leq L(f,p_1) \leq L_+(f,p_1), \tag{2.26}$$

et

$$\exists p_2 \in P : L_+(f,p_2) \leq U(f,p_2) \leq L_+(f,p_2) + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.27}$$

On pred $p = p_1 \cup p_2$ et d'après $(2.26), (2.27)$ on peut écrire

$$L_+(f,p_1) - \frac{\varepsilon}{2} \leq L(f,p_1) \leq L(f,p) \leq U(f,p) \leq U(f,p_2) \leq L_+(f,p_2) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'où

$$U(f,p) - L(f,p) \leq \varepsilon.$$

2) Soit $\varepsilon > 0$,

$$\exists p \in P : U(f,p) - L(f,p) \leq \varepsilon,$$

c'est-à-dire

$$L(f,p) \leq L_+(f,p) \leq U^-(f,p) \leq U(f,p),$$

ce qui donne

$$0 \leq U^-(f,p) - L_+(f,p) \leq U(f,p) - L(f,p) \leq \varepsilon.$$

Donc, on a

$$L_+(f,p) = U^-(f,p).$$

D'où le théorème est prouvé. □

2.8 Intégrabilité des fonctions continues et monotones

Théorème 2.8.1

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$. Alors f est intégrable sur $[a,b]$.

Preuve.

Soit $p = \{x_k\}_{k=0}^{n}$ une partition régulière finie de $[a,b]$ et d'après le théorème de Heine f est uniformément continue, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x,y) \in ([a,b])^2 : |x-y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

On a

$$U(f,p) - L(f,p) = \sum_{k=0}^{n-1} [f(x_{k+1}) - f(x_k)](x_{k+1} - x_k)$$

avec

$$\forall k \in \{0, 1, ..., n-1\} : x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n} \leq \eta,$$

on sait qu'il existent r_k, s_k dans $[x_k, x_{k+1}]$ vérifiant $f(r_k) = m_k$ et $f(s_k) = M_k$ tels que

$$|r_k - s_k| \leq x_{k+1} - x_k \leq \eta,$$

implique

$$|f(r_k) - f(s_k)| = M_k - m_k \leq \frac{\varepsilon}{b-a},$$

D'où

$$U(f,p) - L(f,p) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k) \leq \varepsilon.$$

Par conséquent f est intégrable sur $[a, b]$. □

Théorème 2.8.2

Soit f une fonction monotone sur l'intervalle $[a, b]$. Alors f est intégrable sur $[a, b]$.

Preuve.

On suppose que la fonction f est croissante sur $[a, b]$ et soit $p = \{x_k\}_{k=0}^{n}$ une partition de $[a, b]$, avec

$$f(a) \leq f(b),$$

on a pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} U(f,p) - L(f,p) &= \sum_{k=0}^{n-1} [f(x_{k+1}) - f(x_k)](x_{k+1} - x_k) \\ &\leq \max_{0 \leq k \leq n-1} (x_{k+1} - x_k) \sum_{k=0}^{n-1} [f(x_{k+1}) - f(x_k)] \\ &\leq \max_{0 \leq k \leq n-1} (x_{k+1} - x_k)[f(x_n) - f(x_0)] \\ &\leq A[f(b) - f(a)] \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

où $\max\limits_{0 \leq k \leq n-1} (x_{k+1} - x_k) = A$, alors pour toute partition on a

$$A \leq \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}.$$

Donc la preuve est terminée. □

Si la fonction f est décroissance on a, $f(b) \leq f(a)$ et par la même méthode on peut montrer que f est intégrable sur $[a, b]$.

2.9 Exercices corrigés

I) Intégrale définie de type $x \mapsto F(x) = \int_a^x f(t)\,dt,\ F(a) = 0.$

Exercice 2.1

Justifier dans chacun des cas suivants la dérivabilité de la fonction F sur l'intervalle I et calculer la fonction dérivée.

$$i)\quad F(x) = \int_1^x \frac{\sin(t)}{t}dt, \quad \text{sur} \quad I =]0,+\infty[$$

$$ii)\quad F(x) = \int_1^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt, \quad \text{sur} \quad I =]-1,1[\,.$$

Exercice 2.2

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \mapsto F(x) = \int_0^x \frac{\arctan(t)}{1+t^4}dt.$$

i) Montrer que F est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

ii) Calculer $F'(x)$.

iii) Etudier le signe de $F(x)$.

iv) Montrer que F est une fonction paire.

Exercice 2.3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \mapsto f(x) = \int_0^x e^{-t^2}dt.$$

Déterminer parmie les fonctions suivantes la fonction $x \mapsto f''(x)$ telle que

$$i)\ f''(x) = \int_0^x -2te^{-t^2}dt, \qquad ii)\ f''(x) = \int_0^x -2xe^{-x^2}dx,$$

$$iii)\ f''(x) = -2xe^{-x^2}, \qquad iv)\ f''(x) = e^{-x^2}.$$

Exercice 2.4

Soient F et G deux fonctions définies sur $]0,+\infty[$ par :

$$F(x) = \int_1^x \cos(\ln t)\,dt \quad \text{et} \quad G(x) = \int_1^x \sin(\ln t),$$

Déterminer les fonctions F et G.

Exercice 2.5

Soit F une fonction définie par :

$$F(x) = \int_1^x \frac{\ln(t)}{t^2} dt, \quad x > 0.$$

i) Déterminer la fonction F.

ii) En déduire la primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x^2}$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Exercice 2.6

Soit F une fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^3}} dt.$$

Montrer que :

i) F est dérivable sur $[0, +\infty[$.

ii) La fonction F est croissante sur $[0, +\infty[$.

iii) Pour tout $x \in [0, +\infty[$, $F(x) \leq x$.

III) Intégration par parties.

Exercice 2.7

Déterminer la fonction primitive $x \mapsto F(x)\,(F(a) = 0)$ des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{llll}
1) & f(t) = 2te^{-t}, & a = 0, & I = \mathbb{R} \\
2) & f(t) = t^2 \ln(t), & a = 1, & I =]0, +\infty[\\
3) & f(t) = \ln\left(t^2\right), & a = 1, & I =]0, +\infty[\\
4) & f(t) = (2t+1)\sin(t), & a = 0, & I = \mathbb{R} \\
5) & f(t) = \ln(t+2), & a = 0, & I =]-2, +\infty[\\
6) & f(t) = (t+1)e^{2t}, & a = 0, & I = \mathbb{R} \\
7) & f(t) = e^{-2t}\cos(t), & a = 0, & I = \mathbb{R} \\
8) & f(t) = [\ln(t)]^2, & a = 1, & I =]0, +\infty[.
\end{array}$$

Exercice 2.8

Soit F la fonction définie sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ par :

$$x \mapsto F(x) = \int_0^{\sin(x)} \sqrt{1-t^2} dt.$$

i) Montrer que la fonction F est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

ii) Montrer que $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sin(2x).$$

iii) Calculer $\int_0^1 \sqrt{1-t^2}dt$.

IV) Les subdivisions et les sommes de Darboux.

Exercice 2.9

Soient f une fonction bornée sur l'intervalle $[a,b]$ et $p_1 = \{x_k\}_{k=0}^n$ une partition de $[a,b]$. Si $p_2 = p_1 \cup \{y\}$, alors

$$L(f,p_1) \leq L(f,p_2) \leq U(f,p_2) \leq U(f,p_1),$$

où y dans l'un des intervalles $]x_k, x_{k+1}[$, $k \in \{0,1,...,n\}$.

Exercice 2.10

1) Calculer les sommes de Darboux inférieures et supérieures des fonctions suivantes définies sur $[0,1]$ associées à la partition régulière $\left(x_k = \frac{k}{n}, \quad k \in \{0,1,...,n\}\right)$.

$$f_1(x) = e^x, \quad f_2(x) = x, \quad f_3(x) = x^2, \quad f_4(x) = -x+3,$$

$$f_5(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x, \quad f_6(x) = 2e^x + 1.$$

2) En déduire qu'elles sont intégrables sur l'intervalle $[0,1]$.

Correction

Exercice 2.1

$i)$ On a $F(x) = \int_1^x \frac{\sin(t)}{t}dt$, pour montrer que F est dérivable il suffit de vérifier que la fonction définie par :

$$t \mapsto \frac{\sin(t)}{t},$$

est continue sur sur $]0,+\infty[$. La fonction $t \mapsto \sin(t)$ est continue sur $]0,+\infty[$ et aussi la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est continue sur $]0,+\infty[$ implique que le produit de ces deux fonctions est une fonction continue c'est-à-dire $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ est continue sur $]0,+\infty[$, donc la fonction F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a

$$x \mapsto F'(x) = \frac{\sin(x)}{x}, \quad \text{sur }]0,+\infty[.$$

$ii)$ Pour $F(x) = \int_1^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$, on montrer que la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^2}},$$

est continue sur $]-1,1[$. on a $t \mapsto 1-t^2$ est une fonction continue sur $]-1,1[$, en plus la fonction $t \mapsto \sqrt{1-t^2}$ est continue aussi sur $]-1,1[$, alors la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $]-1,1[$, d'où la fonction F est dérivable sur $]-1,1[$ et la fonctin dérivée est donnée par

$$x \mapsto F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Exercice 2.2

i) Pour répondre à la première question il suffit de montrer que la fonction

$$t \mapsto f(t) = \frac{\arctan(t)}{1+t^4},$$

est continue et en plus $0 \in I$.

On a les fonctions suivantes

$$t \mapsto \arctan(t) \quad \text{et} \quad t \mapsto 1+t^4,$$

sont continues sur $\mathbb{R}$, alors la fonction

$$t \mapsto f(t) = \frac{\arctan(t)}{1+t^4} \quad \text{est continue sur } \mathbb{R} \quad \text{et} \quad 0 \in \mathbb{R}.$$

Donc F est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

ii) Calculons $F'(x)$, on a

$$F'(x) = \frac{\arctan(x)}{1+x^4}, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

iii) Etudions le signe de $F(x) = \int_0^x \dfrac{\arctan(t)}{1+t^4} dt$,

a) Si $x \geq 0$, alors $\forall t \in [0,x]$, on a

$$\frac{\arctan(x)}{1+x^4} \geq 0 \Rightarrow \int_0^x \frac{\arctan(t)}{1+t^4} dt \geq 0,$$

c'est-à-dire $F(x) \geq 0$.

b) Si $x < 0$, alors $\forall t \in [x,0]$, on a

$$\begin{aligned} \frac{\arctan(x)}{1+x^4} \quad &\leq \quad 0 \Longrightarrow \int_x^0 \frac{\arctan(t)}{1+t^4} dt \leq 0 \\ &\Longrightarrow \quad -\int_0^x \frac{\arctan(t)}{1+t^4} dt \geq 0 \\ &\Longrightarrow \quad F(x) \geq 0. \end{aligned}$$

iv) Montrons que F est une fonction paire.

La fonction F est définie sur $\mathbb{R}$ et

$$F(-x) = \int_0^{-x} \frac{\arctan(t)}{1+t^4} dt,$$

par le changement de variable suivant

$$\begin{cases} u = -t \\ \\ -du = dt \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} t = 0 \Longrightarrow u = 0 \\ \\ t = -x \Longrightarrow u = x, \end{cases}$$

cela veut dire

$$\begin{aligned} F(-x) &= \int_0^x -\frac{\arctan(-u)}{1+u^4} du = \int_0^x \frac{\arctan(u)}{1+u^4} du \\ &= F(x). \end{aligned}$$

D'où le résultat.

Exercice 2.3

On a la fonction f est définie par :

$$x \mapsto f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt, \text{ avec } f(0) = 0,$$

la fonctin $t \mapsto e^{-t^2}$est continue sur $\mathbb{R}$ avec $0 \in \mathbb{R}$, alors $\forall x \in \mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto f(x)$ est dérivable et on a $x \mapsto f'(x) = e^{-x^2}$, cette fonction de son toure est dérivable pour tout x dans $\mathbb{R}$ et on a $x \mapsto f''(x) = -2xe^{-x^2}$.

Exercice 2.4

i) On a $x \mapsto F(x) = \int_1^x \cos(\ln t) dt$, par l'intégration par parties avec le changement de variable suivant

$$\begin{cases} u(t) = \cos(\ln t) \\ \\ v'(t) = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(t) = -\frac{1}{t}\sin(\ln t) \\ \\ v(t) = t, \end{cases}$$

on a

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_1^x \cos(\ln t) dt = [t\cos(\ln t)]_1^x + \int_1^x \sin(\ln t) dt \\ &= x\cos(\ln x) - 1 + G(x), \end{aligned}$$

alors, on trouve

$$F(x) - G(x) = x\cos(\ln x) - 1. \tag{2.28}$$

ii) Pour la fonction $x \mapsto G(x) = \int_1^x \sin(\ln t)$, de la même façon on pose

$$\begin{cases} u(t) = \sin(\ln t) \\ \\ v'(t) = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(t) = \dfrac{1}{t}\cos(\ln t) \\ \\ v(t) = t, \end{cases}$$

on peut écrire

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_1^x \sin(\ln t)\,dt = [t\sin(\ln t)]_1^x - \int_1^x \cos(\ln t)\,dt \\ &= x\sin(\ln x) - F(x), \end{aligned}$$

on trouve

$$F(x) + G(x) = x\sin(\ln x). \tag{2.29}$$

D'après (2.18) et (2.19), on obtient

$$F(x) = \frac{1}{2}[x\sin(\ln x) + x\cos(\ln x) - 1],$$

et

$$G(x) = \frac{1}{2}[x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) + 1].$$

Exercice 2.5

i) On utilise l'intégration par parties telle que

$$\begin{cases} u(t) = \ln(t) \\ \\ v'(t) = \dfrac{1}{t^2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(t) = \dfrac{1}{t} \\ \\ v(t) = -\dfrac{1}{t}, \end{cases}$$

ce qui amène à la primitive suivante

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_1^x \frac{\ln(t)}{t^2}dt = \left[-\frac{\ln(t)}{t}\right]_1^x + \int_1^x \frac{1}{t^2}dt \\ &= \left[-\frac{\ln(t)}{t}\right]_1^x + \left[\frac{-1}{t}\right]_1^x = -\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x} + 1. \end{aligned}$$

ii) D'après la première question la primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x^2}$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$ est donnée par

$$x \mapsto F(x) = -\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x} + 1.$$

Exercice 2.6

i) On a la fonction définie par $t \mapsto \sqrt{1+t^3}$ est continuet implique $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^3}}$ est continuet avec $0 \in [0,+\infty[$, alors la fonction F est dérivable sur $[0,+\infty[$.

ii) D'après la première question on a $\forall x \in [0,+\infty[$, $F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} > 0$ ce qui preuve la croissance de la fonction F.

iii) Pour $\forall t \in [0,+\infty[$, on a

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^3}} \leq 1 \Longleftrightarrow 1 \leq \sqrt{1+t^3} \Longleftrightarrow 1 \leq 1+t^3 \Leftrightarrow 0 \leq t^3,$$

alors

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^3}} \leq 1,$$

implique

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^3}} dt \leq \int_0^x dt \implies F(x) \leq x.$$

Exercice 2.7

On détermine la fonction primitive $x \mapsto F(x)$ des fonctions $x \mapsto f(t)$ qui vérifiée la condition suivante :

$$F(a) = 0, \quad a \in I.$$

1) La fonction $x \mapsto f(t) = 2te^{-t}$, on utilise l'intégration par parties, posons

$$\begin{cases} u(t) = 2t \\ v'(t) = e^{-t} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(t) = 2 \\ v(t) = -e^{-t}, \end{cases}$$

alors

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x 2te^{-t} dt = \left[-2te^{-t}\right]_0^x + 2\int_0^x e^{-t} dt \\ &= \left[-2te^{-t}\right]_0^x - 2\left[e^{-t}\right]_0^x = -2xe^{-x} - 2\left(e^{-x} - 1\right) \\ &= 2 - 2e^{-x}(x+1). \end{aligned}$$

2) La primitive de la fonction $x \mapsto f(t) = t^2 \ln(t)$ est donnée par l'intégration par parties

$$\begin{cases} u(t) = \ln(t) \\ v'(t) = t^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(t) = \frac{1}{t} \\ v(t) = \frac{1}{3}t^3, \end{cases}$$

on trouve

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_1^x t^2\ln(t)\,dt = \left[\frac{1}{3}t^3\ln(t)\right]_1^x - \frac{1}{3}\int_1^x t^2dt \\ &= \left[\frac{1}{3}t^3\ln(t)\right]_1^x - \frac{1}{9}\left[t^3\right] = \frac{1}{3}x^3\ln(x) - \frac{1}{9}\left[x^3-1\right] \\ &= \frac{1}{3}x^3\left(\ln(x)-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{9}. \end{aligned}$$

3) La primitive F de la fonction $x \mapsto f(t) = \ln\left(t^2\right) = 2\ln(t)$, on pose

$$\begin{cases} u(t) = \ln(t) \\ v'(t) = 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(t) = \dfrac{1}{t} \\ v(t) = 2t, \end{cases}$$

on peut écrire

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_1^x 2\ln(t)\,dt = [2t\ln(t)]_1^x - 2\int_1^x dt \\ &= [2t\ln(t)]_1^x - 2[t]_1^x = 2x\ln(x) - 2[x-1] \\ &= 2x(\ln(x)-1)+2. \end{aligned}$$

4) On donne la primitive de la fonction $x \mapsto f(t) = (2t+1)\sin(t)$, on prend

$$\begin{cases} u(t) = 2t+1 \\ v'(t) = \sin(t) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(t) = 2 \\ v(t) = -\cos(t), \end{cases}$$

on obtient

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x (2t+1)\sin(t)\,dt = -[(2t+1)\cos(t)]_0^x + [\sin(t)]_0^x \\ &= 1-(2x+1)\cos(x)+\sin(x). \end{aligned}$$

Maintenant on donne les résultats directement.

5) La primitive de la fonction $x \mapsto f(t) = \ln(t+2)$ est la suivante

$$F(x) = \int_0^x \ln(t+2)\,dt = x(\ln(x+2)-1).$$

6) La primitive de la fonction $x \mapsto f(t) = (t+1)e^{2t}$ est donnée par

$$F(x) = \int_0^x (t+1)e^{2t}dt = \frac{1}{2}\left[(x-1)e^{2x}+1\right].$$

7) F la primitive de la fonction $x \mapsto f(t) = e^{-2t}\cos(t)$, par l'intégration par parties deux fois successive, on trouve

$$F(x) = \int_0^x e^{-2t}\cos(t)\,dt = \frac{1}{5}\left[e^{-2x}(\sin(x) - 2\cos(x)) + 2\right].$$

8) La primitive F est définie par :

$$F(x) = \int_1^x [\ln(t)]^2\,dt = x\left[(\ln x)^2 - 2(\ln(x) - 1)\right] - 2.$$

Exercice 2.8

On a pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$F(x) = \int_0^{\sin(x)} \sqrt{1-t^2}\,dt,$$

i) Montrons que la fonction F est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on pose

$$\begin{cases} x \mapsto u(x) = \sin(x) \\ \\ x \mapsto G(x) = \int_0^x \sqrt{1-t^2}\,dt \end{cases} \Rightarrow F(x) = (Gou)(x),$$

pour cela il suffit de montrer que les fonctions $x \mapsto u(x)$ et $x \mapsto G(x)$ sont dérivables sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, alors on a

$$x \mapsto u'(x) = \cos(x) \geq 0, \text{ sur } \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ et } u\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [0, 1], \tag{2.30}$$

et la fonction

$$x \mapsto \sqrt{1-t^2} \text{ positive et continue sur } [0, 1],$$

implique que la fonction

$$x \mapsto G(x) = \int_0^x \sqrt{1-t^2}\,dt$$

est dérivable sur $[0, 1]$, alors on conclue que la fonction $F = Gou$ est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, où

$$F'(x) = u'(x)F'(u(x)) = \cos(x)\sqrt{1-\sin^2(x)}$$

$$= \cos(x)\sqrt{\cos^2(x)} = \cos(x)\,|\cos(x)| \tag{2.31}$$

$$= \cos^2(x), \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

ii) On montre que

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sin(2x),$$

d'après (2.21) on a

$$F'(x) = \cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

la primitive de F' est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + C,$$

avec

$$F(0) = \int_0^{\sin(0)} \sqrt{1-t^2}dt = \int_0^0 \sqrt{1-t^2}dt = 0$$

donc $C = 0$, c'est-à-dire

$$F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x).$$

iii) Calculons $\int_0^1 \sqrt{1-t^2}dt$, on a

$$\int_0^1 \sqrt{1-t^2}dt = F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\sin\left(2\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 2.9

Supposons que $y \in]x_l, x_{l+1}[$ et on note

$$\begin{aligned}
m_k &= \inf\{f(x), x \in [x_k, x_{k+1}]\}, \quad n_{[x_l,y]} = \inf\{f(x), x \in [x_l, y]\}, \\
n_{[y,x_{l+1}]} &= \inf\{f(x), x \in [y, x_{l+1}]\}, \quad M_k = \sup\{f(x), x \in [x_k, x_{k+1}]\}, \\
N_{[x_l,y]} &= \sup\{f(x), x \in [x_l, y]\}, \quad N_{[y,x_{l+1}]} = \sup\{f(x), x \in [y, x_{l+1}]\}.
\end{aligned}$$

1) On montre que

$$L(f, p_1) \leq L(f, p_2),$$

il est évident de voir que

$$m_l(x_{l+1} - x_l) \leq n_{[x_l,y]}(y - x_l) + n_{[y,x_{l+1}]}(x_{l+1} - y),$$

alors

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{l-1} m_k(x_{k+1} - x_k) + m_l(x_{l+1} - x_l) + \sum_{k=l+1}^{n-1} m_k(x_{k+1} - x_k) \\
\leq\ &\sum_{k=0}^{l-1} m_k(x_{k+1} - x_k) + n_{[x_l,y]}(y - x_l) + n_{[y,x_{l+1}]}(x_{l+1} - y) + \sum_{k=l+1}^{n-1} m_k(x_{k+1} - x_k),
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$L(f, p_1) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1} - x_k) \leq L(f, p_2).$$

2) On démontre l'inégalité suivante

$$L(f,p_2) \leq U(f,p_2),$$

d'après la définition on a

$$n_{[x_l,y]}(y-x_l)+n_{[y,x_{l+1}]}(x_{l+1}-y) \leq N_{[x_l,y]}(y-x_l)+N_{[y,x_{l+1}]}(x_{l+1}-y),$$

implique

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{l-1} m_k(x_{k+1}-x_k)+n_{[x_l,y]}(y-x_l)+n_{[y,x_{l+1}]}(x_{l+1}-y)+\sum_{k=l+1}^{n-1} m_k(x_{k+1}-x_k) \\ \leq\ & \sum_{k=0}^{l-1} M_k(x_{k+1}-x_k)+N_{[x_l,y]}(y-x_l)+N_{[y,x_{l+1}]}(x_{l+1}-y)+\sum_{k=l+1}^{n-1} M_k(x_{k+1}-x_k), \end{aligned}$$

d'où

$$L(f,p_2) \leq U(f,p_2).$$

3) On prouve que

$$U(f,p_2) \leq U(f,p_1),$$

on a

$$N_{[x_l,y]}(y-x_l)+N_{[y,x_{l+1}]}(x_{l+1}-y) \leq M_l(x_{l+1}-x_l),$$

alors

$$\begin{aligned} & U(f,p_2) \\ =\ & \sum_{k=0}^{l-1} M_k(x_{k+1}-x_k)+N_{[x_l,y]}(y-x_l)+N_{[y,x_{l+1}]}(x_{l+1}-y)+\sum_{k=i+1}^{n-1} M_k(x_{k+1}-x_k) \\ \leq\ & \sum_{k=0}^{l-1} M_k(x_{k+1}-x_k)+M_l(x_{l+1}-x_l)+\sum_{k=l+1}^{n-1} M_k(x_{k+1}-x_k) \\ \leq\ & \sum_{k=0}^{n-1} M_k(x_{k+1}-x_k)=U(f,p_1). \end{aligned}$$

Exercice 2.10

1-La fonction définie par $x \mapsto f_1(x)=e^x$.

i) D'après la définition, la somme de Darboux inférieure est donnée par :

$$L(f_1,p)=\sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1}-x_k), \tag{2.32}$$

avec

$$x_{k+1}-x_k=\frac{1}{n} \quad \text{et} \quad m_k \ =\inf\{f\left(t\right),t\in[x_k,x_{k+1}]\},$$

on sait que la fonction $x\mapsto e^x$ est strictement croissante sur $[0,1]$,alors

$$L\left(f_1,p\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}e^{x_k}, \quad x_k=\frac{k}{n},$$

c'est-à-dire

$$L\left(f_1,p\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}e^{\frac{k}{n}}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^k$$

on sait que

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^k,$$

est une somme d'une suite géométrique de raison $q=e^{\frac{1}{n}}$, alors

$$L\left(f_1,p\right)=\frac{1}{n}\left(\frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}\right) \tag{2.33}$$

ii) la somme de Darboux supérieure est donnée par

$$U\left(f_1,p\right)=\sum_{k=0}^{n-1}M_k\left(x_{k+1}-x_k\right), \tag{2.34}$$

où

$$x_{k+1}-x_k=\frac{1}{n} \quad \text{et} \quad M_k \ =\sup\{f\left(t\right),t\in[x_k,x_{k+1}]\},$$

alors

$$U\left(f_1,p\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}e^{x_{k+1}}, \quad x_{k+1}=\frac{k+1}{n},$$

c'est-à-dire

$$U\left(f_1,p\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}e^{\frac{k+1}{n}}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^{k+1}=\frac{1}{n}e^{\frac{1}{n}}\left(\frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}\right). \tag{2.35}$$

Par le développement limité au voisinage de $+\infty$, on a

$$e^{\frac{1}{n}}=1+\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

alors

$$\lim_{n\to+\infty}L\left(f_1,p\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1-e}{1-1-\frac{1}{n}}\right)=e-1, \tag{2.36}$$

et

$$\lim_{n\to+\infty}U\left(f_1,p\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}e^{\frac{1}{n}}\left(\frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1-e}{1-1-\frac{1}{n}}\right)=e-1, \tag{2.37}$$

d'où

$$e-1=\lim_{n\to+\infty}L\left(f_1,p\right)\leq L_+\left(f_1,p\right)\leq U^-\left(f_1,p\right)\leq\lim_{n\to+\infty}U\left(f_1,p\right)=e-1,$$

c'est-à-dire

$$L_+(f_1,p) = U^-(f_1,p) = e-1.$$

Donc la fonction f_1 est intégrable sur $[0,1]$.

2-La fonction $x \mapsto f_2(x) = x$.

i) On a la somme de Darboux inférieure de la fonction f_2 est définie par

$$L(f_2,p) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1}-x_k), \tag{2.38}$$

la fonction $x \mapsto x$ est strictement croissante sur $[0,1]$, alors

$$L(f_2,p) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n}{2n^2}(n-1),$$

ii) la somme de Darboux supérieure est donnée par

$$U(f_2,p) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k(x_{k+1}-x_k), \tag{2.39}$$

c'est-à-dire

$$U(f_2,p) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k+1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\left(\frac{n^2+n}{2}\right). \tag{2.40}$$

Lorsque $n \to +\infty$, on obtient

$$\frac{1}{2} = \lim_{n\to+\infty} L(f_2,p) \leq L_+(f_2,p) \leq U^-(f_2,p) \leq \lim_{n\to+\infty} U(f_2,p) = \frac{1}{2},$$

c'est-à-dire

$$L_+(f_2,p) = U^-(f_2,p) = \frac{1}{2}.$$

D'ou f_2 est intégrable sur $[0,1]$.

3-Pour la fonction définie par $x \mapsto f_3(x) = x^2$.

i) On a

$$L(f_3,p) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1}-x_k), \tag{2.41}$$

la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $[0,1]$, alors

$$L(f_3,p) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}, n \geq 1.$$

ii) la somme de Darboux supérieure

$$U(f_3,p) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k+1}{n}\right)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}, n \geq 1. \tag{2.42}$$

Si $n \to +\infty$, on trouve

$$\frac{1}{2} = \lim_{n\to+\infty} L(f_3, p) \le L_+(f_3, p) \le U^-(f_3, p) \le \lim_{n\to+\infty} U(f_3, p) = \frac{1}{3},$$

implique

$$L_+(f_3, p) = U^-(f_3, p) = \frac{1}{3}.$$

Par conséquent f_3 est intégrable sur $[0, 1]$.

4- La fonction $x \mapsto f_4(x) = -x + 3$

i) On a

$$L(f_4, p) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k (x_{k+1} - x_k), \tag{2.43}$$

la fonction $x \mapsto -x + 3$ est décroissante sur $[0, 1]$, alors

$$\begin{aligned} L(f_4, p) &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{k+1}{n} + 3\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k+1}{n} + 3\right) \\ &= -\frac{1}{n^2}\left(\frac{n^2+n}{2}\right) + 3, n \ge 1. \end{aligned}$$

ii) la somme de Darboux supérieure

$$U(f_4, p) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{k}{n} + 3\right) = -\frac{n(n-1)}{2n^2} + 3, n \ge 1. \tag{2.44}$$

On passe à la limite pour $n \to +\infty$, on trouve

$$\frac{5}{2} = \lim_{n\to+\infty} L(f_4, p) \le L_+(f_4, p) \le U^-(f_4, p) \le \lim_{n\to+\infty} U(f_4, p) = \frac{5}{2},$$

alors

$$L_+(f_4, p) = U^-(f_4, p) = \frac{5}{2}.$$

Donc f_4 est intégrable sur $[0, 1]$.

5- La fonction définie par : $f_5(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$.

i) On a

$$L(f_5, p) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k (x_{k+1} - x_k), \tag{2.45}$$

la fonction $x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - 2x$. est croissante sur $[0, 1]$, alors

$$\begin{aligned} L(f_5, p) &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{k}{n}\right)^2 - 2\frac{k}{n}\right] = \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^2 - \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right) \\ &= \frac{(n-1)n(2n-1)}{12n^3} - \frac{n(n-1)}{n^2}, n \ge 1. \end{aligned}$$

ii) la somme de Darboux supérieure

$$\begin{aligned} U(f_5,p) &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{k+1}{n}\right)^2-2\frac{k+1}{n}\right] \\ &= \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k+1}{n}\right)^2-\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k+1}{n}\right) \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^3}-\frac{n^2+n}{n^2}, n\geq 1. \end{aligned}$$

Lorsque $n\to+\infty$, on trouve

$$-\frac{5}{6}=\lim_{n\to+\infty}L(f_5,p)\leq L_+(f_5,p)\leq U^-(f_5,p)\leq \lim_{n\to+\infty}U(f_5,p)=-\frac{5}{6},$$

alors

$$L_+(f_5,p)=U^-(f_5,p)=-\frac{5}{6}.$$

Donc f_5 est intégrable sur $[0,1]$.

6- Maintenat pour la fonction $x\mapsto f_6(x)=2e^x+1$

i) On a

$$L(f_6,p)=\sum_{k=0}^{n-1}m_k(x_{k+1}-x_k), \tag{2.46}$$

la fonction $x\mapsto 2e^x+1$ est croissante sur $[0,1]$, alors

$$\begin{aligned} L(f_6,p) &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left[2\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^k+1\right]=\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^k+\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}1 \\ &= \frac{2}{n}\left(\frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}\right)+1. \end{aligned}$$

ii) la somme de Darboux supérieure

$$\begin{aligned} U(f_6,p) &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left[2e^{\frac{k+1}{n}}+1\right]=\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^{k+1}+\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}1 \\ &= \frac{2}{n}e^{\frac{1}{n}}\left(\frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}\right)+1, \end{aligned}$$

Si $n\to+\infty$, alors on a $e^{\frac{1}{n}}=1+\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et en plus, on peut écrire

$$2e-1=\lim_{n\to+\infty}L(f_6,p)\leq L_+(f_6,p)\leq U^-(f_6,p)\leq \lim_{n\to+\infty}U(f_6,p)=2e-1,$$

c'est-à-dire

$$L_+(f_6,p)=U^-(f_6,p)=2e-1.$$

Donc f_6 est intégrable sur $[0,1]$.

Chapitre 3

Équations différentielles du premier ordre

3.1 Généralités

Définition 3.1.1

On appelle équation différentielle ordinaire du premier ordre toute équation de la forme :

$$F\left(x, y, y'\right) = 0, \tag{3.1}$$

où y la fonction inconnue de la variable indépendante x et y' la dérivée de y.

On peut écrire l'équation (3.1) sous la forme :

$$y' = f(x, y). \tag{3.2}$$

Exemple

$$y' = \frac{y^2+1}{2}\sin x; \quad \frac{1}{\sqrt{y}}dy = \frac{1}{2}\cos(x)\,dx, \ \ (y > 0); \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{xy}{\sqrt{x^2+1}}, (y \neq 0)$$

sont des équations différentielles du premier ordre.

Solution d'une équation différentielles du premier ordre