Chapitre 1

Intégrales indéfinies

1.1 Intégrale indéfinie

Primitives d'une fonction

Définition 1.1.1

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On appelle primitive de f sur I, toute fonction F définie et dérivable sur I, telle que :

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in I. \tag{1.1}$$

Exemple

La fonction

$$x \mapsto F(x) = \arctan(x) + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

est une primitive de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ suivante :

$$x \mapsto f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F'(x) = (\arctan(x) + C)' = \frac{1}{1+x^2} + 0 = \frac{1}{1+x^2} = f(x).$$

Théorème 1.1.1

Soient f une fonction et F sa primitive sur I. Alors toute primitive G de f s'écrit sous la forme suivante :

$$G(x) = F(x) + C, \quad \forall x \in I. \tag{1.2}$$

où C est une constante arbitraire.

Preuve.
Si $G(x) = F(x) + C$ alors $G'(x) = F'(x)$ et comme $F'(x) = f(x)$ donc $G'(x) = f(x)$. De l'autre côté si la fonction G est une primitive quelconque de f alors on a

$$\left(G' - F'\right)(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0,$$

d'où la fonction $G - F$ est une fonction constante sur l'intervalle I, c'est-à-dire

$$G(x) = F(x) + C.$$

D'où le théorème est prouvé. □

Maintenant, on présente la définition de l'intégrale indéfinie comme suit :

Définition 1.1.2

L'ensemble de toutes les primitives d'une fonction f définie sur un intervalle I est appelé intégrale indéfinie de f. On le note

$$\int f(x)dx, \quad \text{pour } x \in I. \tag{1.3}$$

Remarque

Si une fonction F est une primitive de f, alors on écrit

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \tag{1.4}$$

où C est une constante réelle arbitraire.

1.1.1 Existence de l'intégrale indéfinie

La condition suffisante d'existence de l'intégrale indéfinie d'une fonction f .

Nous admettrons le théorème suivant.

Théorème 1.1.2

Toute fonction continue f sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ admet une intégrale indéfinie F sur cet intervalle.

Remarque

La réciproque de ce théorème est fausse.

Preuve.
Pour montrer ce résultat il suffit de prendre un exemple. Soit F la fonction définie par :

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0 \\ \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

La fonction F est la primitive de la fonction suivante :

$$F'(x) = f(x) = \begin{cases} -\cos\left(\frac{1}{x}\right) + 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0 \\ \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

On voit que la fonction f n'est pas continue au point $x = 0$. □

Rappelons que : toutes les fonctions classiques, les polynômes, la fonction $x \mapsto e^x$, les fonctions $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto \cos x$ sont continues sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto \ln x$ est continue sur $]0, +\infty[$, les fractions rationnelles sont continues sur leur domaine de définition.

Dans tout ce qui suit, C désignera une constante réelle arbitraire.

1.2 Quelques propriétés de l'intégrale indéfinie

Théorème 1.2.1

Si deux fonctions sont identiques, alors leurs intégrales indéfinies peuvent différer seulement d'une constante.

Preuve.
Voir la démonstration du théorème 1.1.1 □

Voici la réciproque du théorème précédent.

Remarque

Pour prouver que deux fonctions diffèrent d'une constante additive, il suffit de démontrer que leurs dérivées sont identiques.

Théorème 1.2.2

Soit f une fonction dérivable. Alors

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + C. \tag{1.5}$$

Preuve.
La fonction f étant la primitve de f', le résultat est démontré. □

Théorème 1.2.3

Soit f une fonction continue. Alors on a

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)\,. \tag{1.6}$$

Preuve.
On a

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

où, la fonction F est une primitive de f, ainsi

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+C)' = f(x).$$

D'où, le résultat. □

Théorème 1.2.4

Soit f une fonction continue. Alors on a

$$\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx + C, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}. \tag{1.7}$$

Preuve.
Supposons que F est la fonction primitive de f c'est-à-dire $F'(x) = f(x)$ et on a aussi

$$(\lambda F(x))' = \lambda f(x)\,.$$

Donc l'intégrale devient

$$\int (\lambda F(x))' \, dx = \lambda F(x) + C = \lambda (F(x) + C_1) = \lambda \int f(x) \, dx, C_1 \in \mathbb{R}.$$

Le théorème est prouvé. $\square$

Exemple

On considère l'intégrale suivante

$$I = \int \frac{2^3}{\sqrt{3}(x+1)^2} dx,$$

on a $\lambda = \dfrac{2^3}{\sqrt{3}}$ et $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$, alors

$$I = \frac{2^3}{\sqrt{3}} \int \frac{1}{(x+1)^2} dx = -\frac{2^3}{\sqrt{3}(x+1)} + C.$$

Théorème 1.2.5

Soient f et g, deux fonctions continues. Alors

$$\int \left[f(x) \mp g(x) \right] dx = \int f(x) dx \mp \int g(x) dx + C. \tag{1.8}$$

Preuve.

Soient F et G des primitives des fonctions f et g respectivement :

$$F'(x) = f(x) \quad \text{et} \quad G'(x) = g(x),$$

alors

$$\left(F(x) \mp G(x) + C \right)' = f(x) \mp g(x),$$

et par l'intégrale indéfinie, on obtient

$$\int \left(f(x) \mp g(x) \right) dx = \int \left(F(x) \mp G(x) + C \right)' dx$$

$$= F(x) \mp G(x) + C = \int f(x) \, dx \mp \int g(x) \, dx.$$

Donc le théorème est démontré. $\square$

Exemple

Soit l'intégrale indéfinie

$$I=\int\left(\cos(2x+1)-\frac{1}{x^2-1}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx,$$

on a

$$\begin{aligned}I&=\int\cos(2x+1)\,dx-\int\frac{1}{x^2-1}dx+\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx\\&=\frac{1}{2}\sin(2x+1)-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)+\arcsin(x)+C.\end{aligned}$$

On présente les primitives de certaines fonctions usuelles :

1) $\int k\,dx=kx+C,\ I=\mathbb{R}.$

2) $\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C,\ n\in\mathbb{N}^*, I=\mathbb{R}.$

3) $\int\frac{1}{x^n}dx=\frac{-1}{(n-1)\,x^{n-1}}+C,\ n\in\mathbb{N}^*-\{1\}, I=\mathbb{R}.$

4) $\int\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=\sqrt{x}+C, n\in\mathbb{N}^*-\{1\}, I=\mathbb{R}_+^*.$

5) $\int e^x dx=e^x+C,\ I=\mathbb{R}.$

6) $\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C, I=\mathbb{R}^*.$

7) $\int\sin(x)\,dx=-\cos(x)+C, I=\mathbb{R}.$

8) $\int\sin(\alpha x+\beta)\,dx=-\frac{1}{\alpha}\cos(\alpha x+\beta)+C, \alpha\neq 0,\ I=\mathbb{R}.$

9) $\int\cos(x)\,dx=\sin(x)+C, I=\mathbb{R}.$

10) $\int\cos(\alpha x+\beta)\,dx=\frac{1}{\alpha}\sin(\alpha x+\beta)+C, \alpha\neq 0,\ I=\mathbb{R}.$

11) $\int\frac{1}{\cos^2(x)}dx=\tan(x)+C, I=\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}.$

12) $\int\frac{-1}{\sin^2(x)}dx=\cot(x)+C, I=\mathbb{R}-\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}.$

13) $\int e^{ax}dx=\frac{e^{ax}}{a}+C, a\neq 0,\ I=\mathbb{R}.$

14) $\int \sinh(x)\,dx = \cosh(x) + C,\ I = \mathbb{R}.$

15) $\int \cosh(x)\,dx = \sinh(x) + C,\ I = \mathbb{R}.$

16) $\int \frac{1}{\cosh^2(x)}dx = \tanh(x) + C,\ I = \mathbb{R}.$

17) $\int \frac{-1}{\sinh^2(x)}dx = \coth(x) + C,\ I = \mathbb{R}.^*$

18) $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan(x) + C,\ I = \mathbb{R}.$

19) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin(x) + C,\ I =]-1,1[\,.$

20) $\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arccos(x) + C,\ I =]-1,1[\,.$

21) $\int \frac{-1}{1+x^2}dx = \ funcarccot(x) + C,\ I = \mathbb{R}.$

22) $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \arg\sinh(x) + C,\ I = \mathbb{R}.$

23) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx = \arg\cosh(x) + C,\ I =]1,+\infty[\,.$

24) $\int \frac{1}{1-x^2}dx = \arg\tanh(x) + C = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + C,\ I =]-1,1[\,.$

25) $\int \frac{1}{x^2-1}dx = \arg\coth(x) + C = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right) + C,\ I =]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[\,.$

On a aussi les formules suivantes :

Remarque

Si f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Alrs on a :

1) $\int f'(x)f^n(x)\,dx = \frac{1}{(n+1)f^n(x)} + C. \quad n \in \mathbb{N}^*.$

2) $\int \frac{f'(x)}{f^2(x)}dx = \frac{-1}{f(x)} + C.\ f(x) \neq 0.$

3) $\int \frac{f'(x)}{f^n(x)}dx = \frac{-1}{(n-1)f^{n-1}(x)} + C. \quad n \geq 2,\ f(x) \neq 0.$

4) $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx = 2\sqrt{f(x)} + C. \quad f(x) > 0.$

5) $\int f'(x)e^{f(x)}dx = e^{f(x)} + C.$

6) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C. \quad f(x) \neq 0.$

7) $\int \frac{f'(x)}{f^2(x)}dx = \frac{-1}{f(x)} + C. \quad f(x) \neq 0.$

8) $\int \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}dx = \frac{f(x)}{g(x)} + C, \quad g(x) \neq 0.$

Pour vérifier le tableau et la remarque il suffit d'établir que la dérivée du second membre de l'égalité est identique à la fonction à intégrer du premier membre.

1.3 Méthodes d'intégration

1.3.1 Intégration par changement de variable

La méthode d'intégration par changement de variable est l'une des méthodes les plus importantes dans le calcul des intégrales indéfinies.

Pour cela on peut simplifier l'intégrale $\int f(x)dx$, en introduisant au lieu de la variable x une nouvelle variable t. Si φ est bijective, alors on pose :

$$x = \varphi(t). \tag{1.9}$$

On présente l'expression de cette méthode par le théorème suivant.

Théorème 1.3.1

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f, φ deux fonctions telles que :

$$f : I \to \mathbb{R} \text{ continue sur } I$$

$$\varphi : J \to \mathbb{R} \text{ de classe } C^1(J).$$

Alors,

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt + C, \tag{1.10}$$

avec $x = \varphi(t)$ et $dx = \varphi'(t)dt$.

Preuve.

Pour montrer la formule (1.10), il suffit de montrer que les deux quantités considérées ont la même dérivée par rapport à x.

La dérivée du premier membre est

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

En dérivant le second membre par rapport à t où x est une fonction de variable t et d'après (1.9) on a

$$\frac{dx}{dt}=\varphi'(t)\Longleftrightarrow\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\varphi'(t)}.$$

Par conséquent

$$\left(\int f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)\,dt+C\right)'=\left(\int f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)\frac{dx}{\varphi'(t)}+C\right)'=f\left[\varphi(t)\right]=f(x).$$

D'où les dérivées par rapport à x des deux membres de l'égalité (1.10) sont égales. □

Exemple

Calculer

$$\int\frac{1}{4+x^2}dx.$$

En faisant le changement de variable suivant : $t=\frac{x}{2}$ et dans ce cas, on a $dt=\frac{dx}{2}$, en remplaçant dans l'intégrale, on obtient,

$$\int\frac{1}{4\left(1+\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+t^2}dt=\frac{1}{2}\arctan(t)+C,$$

Donc, on a

$$\int\frac{1}{4+x^2}dx=\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+C.$$

Exemple

Calculer

$$\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx,$$

par le changement de variable suivant : $t=x+\sqrt{1+x^2}$ on peut déterminer x et dx, où

$$1+x^2=t^2-2tx+x^2,\quad x=\frac{t^2-1}{2t}=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right),$$

c'est-à-dire

$$\sqrt{1+x^2}=t-\frac{t^2-1}{2t}=\frac{t^2+1}{2t},\quad dx=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt=\frac{1}{2}\frac{t^2+1}{t^2}dt.$$

Reportant l'ensemble dans l'intégrale donnée, on obtient

$$\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx=\int\frac{2t}{t^2+1}\frac{1}{2}\frac{t^2+1}{t^2}dt=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|+C.$$

1.3.2 Intégration par parties

L'intégration par parties est une méthode qui permet de transformer l'intégrale d'un produit de fonctions en d'autres intégrales, dans un but de simplifier le calcul.

Alors un grand nombre d'intégrales se calculent par cette méthode d'intégration qui est donnée par le théorème qui suit :

Théorème 1.3.2

Soient f et g deux fonctions dérivables. Alors on a

$$\int f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int g(x)\, f'(x)\, dx + C. \tag{1.11}$$

Preuve.

D'après la formule (1.4), on peut écrire

$$f(x)\, g(x) + C = \int (f(x)\, g(x))'\, dx = \int \left[f(x)\, g'(x) + g(x)\, f'(x)\right] dx.$$

On en déduit

$$f(x)\, g(x) + C = \int f(x)\, g'(x)\, dx + \int g(x)\, f'(x)\, dx.$$

D'où la preuve est terminée. □

Cette formule est utilisée pour calculer les intégrales du produit d'un polynôme par une fonction usuelle ($\sin x$, $\cos x$, e^x, $\ln x, \ldots$).

Exemple

Calculer

$$\int \ln(x)\, dx.$$

On Pose

$$\begin{cases} f(x) = \ln x \\ \text{et} \\ g'(x) = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'(x) = \dfrac{1}{x} \\ \text{et} \\ g(x) = x, \end{cases}$$

d'après la formule (1.11), on obtient

$$\int \ln(x)\, dx = x\ln(x) - \int dx + C = x(\ln(x) - 1) + x + C.$$

Exemple

Calculer

$$\int x\arctan(x)\,dx$$

Posons

$$\begin{cases} f(x) = \arctan(x) \\ \text{et} \\ g'(x) = x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \\ \text{et} \\ g(x) = \dfrac{x^2}{2}. \end{cases}$$

Alors on a

$$\begin{aligned} \int x\arctan(x)\,dx &= \frac{x^2}{2}\arctan(x) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}dx + C \\ &= \frac{x^2}{2}\arctan(x) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx + C \\ &= \frac{x^2}{2}\arctan(x) - \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx + C \\ &= \frac{x^2}{2}\arctan(x) - \frac{1}{2}(x - \arctan(x)) + C \\ &= \frac{1+x^2}{2}\arctan(x) - \frac{x^2}{2} + C. \end{aligned}$$

Remarque

La pratique aussi montre qu'un bon nombre d'intégrales susceptibles d'être calculées par la méthode d'intégration par parties peuvent être classées en trois groupes :

$$i) \int f(x)\ln(x)\,dx,\quad \int f(x)\arcsin(x)\,dx,\quad \int f(x)\arccos(x)\,dx,$$

$$\int f(x)\arctan(x)\,dx,\quad \int f(x)(\arccos(x))^2\,dx,\quad \int f(x)(\arctan(x))^2\,dx,$$

dans le cas où f admet une primitive.

$$ii) \int p(x)\cos(\alpha x)\,dx,\quad \int p(x)\sin(\alpha x)\,dx,\quad \int p(x)e^{\alpha x}\,dx,$$

où $P(x)$ est un polynôme et $\alpha \in \mathbb{R}$ et dans ce cas, on pose $p(x) = f(x)$.

$$iii) \int e^{\alpha x}\cos(\beta x)\,dx,\quad \int e^{\alpha x}\sin(\beta x)\,dx, (\alpha, \beta \in \mathbb{R}),\quad \int \sin(\ln x)\,dx.$$

Remarque

$i)$ Pour la plupart des intégrales, on l'intégre plusieurs fois par parties.

$ii)$ Parfois on effectue un changement de variables puis on passe à l'intégration par parties.

1.3.3 Primitives d'expressions rationnelles

Les fonctions de forme $f(x) = \dfrac{N(x)}{D(x)}$ ($N(x)$: Numérateur, $D(x)$: Dénoménateur) respectivement, peuvent être intégrées par une méthode qui s'appelle la décomposition en éléments simples. Dont on peut intégrer la fonction f.

On présente la définition de l'élément simple

Définition 1.3.1

On appelle élément simple toute fraction de la forme :

1) Première espèce

$$f_1(x) = \frac{A}{(x-\alpha)^m}, \tag{1.12}$$

où A, α étant des nombres réels et $m \in \mathbb{N}^*$.

2) Deuxième espèce

$$f_2(x) = \frac{Ax+B}{\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]^n}, \tag{1.13}$$

où A, B, α, β étant des nombres réels ($\beta \neq 0$) et $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour déterminer l'intégrale indéfinie de la fraction $f_1(x)$, on utilise le changement de variables :

$$u = x-\alpha \quad \Longrightarrow \quad dx = du$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \int f_1(x)\,dx &= \int \frac{A}{(x-\alpha)^m}dx = A\int \frac{1}{u^m}du \\ &= \begin{cases} A\ln|x-\alpha|+C, & \text{si } m=1 \\ \frac{-A}{(m-1)(x-\alpha)^{m-1}}+C, & \text{si } m>1. \end{cases} \end{aligned}$$

Et pour l'intégrale indéfinie de fraction $f_2(x)$, on applique le changement de variables :

$$\beta u = x-\alpha \Longrightarrow dx = \beta du,$$

on trouve

$$\begin{aligned}
\int f_2(x)\,dx &= \int \frac{Ax+B}{\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]^n}dx = \int \frac{A\beta u + A\alpha + B}{[\beta^2 u^2+\beta^2]^n}du \\
&= \frac{A\beta^2}{\beta^{2n}}\int \frac{udu}{(u^2+1)^n} + \frac{A\alpha\beta+\beta B}{\beta^{2n}}\int \frac{du}{(u^2+1)^n} \\
&= \frac{A}{\beta^{2(n-1)}}\int \frac{udu}{(u^2+1)^n} + \frac{A\alpha+B}{\beta^{2n-1}}\int \frac{du}{(u^2+1)^n},
\end{aligned}$$

on note par :

$$I_n = \int \frac{udu}{(u^2+1)^n} \quad \text{et} \quad J_n = \int \frac{du}{(u^2+1)^n}.$$

1) Maintenant pour calculer l'intégrale I_n on pose

$$t = u^2 \implies dt = 2udu$$

et on a

$$I_n = \int \frac{udu}{(u^2+1)^n} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^n}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}\ln|t| + C, & \text{si } n=1 \\ \\ \dfrac{1}{2(n-1)\,t^{n-1}} + C, & \text{si } n>1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}\ln\left|u^2+1\right| + C, & \text{si } n=1 \\ \\ \dfrac{1}{2(n-1)(u^2+1)^{n-1}} + C, & \text{si } n>1 \end{cases}$$

Finalement on trouve :

$$I_n = \begin{cases} \frac{1}{2}\ln\left|\left(\dfrac{x-\alpha}{\beta}\right)^2+1\right| + c, & \text{si } n=1 \\ \\ \dfrac{1}{2(n-1)\left(\left(\dfrac{x-\alpha}{\beta}\right)^2+1\right)^{n-1}} + c, & \text{si } n>1. \end{cases}$$

2) L'intégrale indéfinie

$$J_n = \int \frac{du}{(u^2+1)^n}$$

s'obtient par l'intégration par parties et la formule de récurrence à la fois.

Pour cela, on pose le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} t = \dfrac{1}{(u^2+1)^n} \\ \\ ds = du \end{cases} \implies \begin{cases} dt = \dfrac{-2nu}{(u^2+1)^{n+1}}du \\ \\ s = u\,, \end{cases}$$

alors

$$\begin{aligned}
J_n &= \int \frac{du}{(u^2+1)^n} \\
&= \frac{u}{(u^2+1)^n} + \int \frac{2nu^2}{(u^2+1)^{n+1}}du \\
&= \frac{u}{(u^2+1)^n} + 2n\int \frac{u^2}{(u^2+1)^{n+1}}du \\
&= \frac{u}{(u^2+1)^n} + 2n\int \frac{1+u^2-1}{(u^2+1)^{n+1}}du \\
&= \frac{u}{(u^2+1)^n} + 2n\int \frac{1}{(u^2+1)^{n}}du - 2n\int \frac{1}{(u^2+1)^{n+1}}du \\
&= \frac{u}{(u^2+1)^n} + 2nJ_n - 2nJ_{n+1},
\end{aligned}$$

D'où la propriété de récurrence $P(n)$ est donnée par la formule suivante :

$$J_{n+1} = \frac{2n-1}{2n}J_n + \frac{\frac{x-\alpha}{\beta}}{2n\left[\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2+1\right]^n}, n \in \mathbb{N}^*$$

avec

$$J_1 = \int \frac{\beta}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx = \frac{1}{\beta}\arctan\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right) + C.$$

Exemple

Calculer l'intégrale suivante

$$J_2 = \int \frac{du}{(u^2+1)^2}.$$

Intégrations par parties à partir de

$$J_1 = \int \frac{du}{u^2+1},$$

on prend

$$\begin{cases} t = \dfrac{1}{u^2+1} \\ \\ ds = du \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} dt = \dfrac{-2u}{(u^2+1)^2}du \\ \\ s = u\ , \end{cases}$$

alors

$$J_1 = \int \frac{du}{u^2+1} = \frac{u}{u^2+1} + \int \frac{2u^2}{(u^2+1)^2}du = \frac{u}{u^2+1} + 2\int \frac{u^2+1-1}{(u^2+1)^2}du$$

$$= \frac{u}{u^2+1} + 2\int \frac{1}{u^2+1}du - 2\int \frac{1}{(u^2+1)^2}du = \frac{u}{u^2+1} + 2J_1 - 2J_2$$

D'où

$$J_2 = \frac{1}{2}J_1 + \frac{1}{2}\frac{u}{u^2+1} + C$$

on a $J_1 = \arctan u$, donc

$$\begin{aligned} J_2 &= \int \frac{du}{(u^2+1)^2} \\ &= \frac{1}{2}\arctan u + \frac{1}{2}\frac{u}{u^2+1} + C \\ &= \frac{1}{2\beta}\arctan\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right) + \frac{1}{2}\frac{\beta(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + C. \end{aligned}$$

Et d'après (1.13), on obtient pour $n = 2$,

$$\begin{aligned} \int f_2(x)\,dx &= \frac{A}{\beta^2}\int \frac{udu}{(u^2+1)^2} + \frac{A\alpha+B}{\beta^3}\int \frac{du}{(u^2+1)^2} \\ &= \frac{A}{2\left((x-\alpha)^2+\beta^2\right)} + \frac{A\alpha+B}{\beta^3}\left[\frac{1}{2\beta}\arctan\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)\right. \\ &+ \left.\frac{1}{2}\frac{\beta(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\right] + C. \end{aligned}$$

Théorème 1.3.3

Toute fonction rationnelle se décompose d'une manière unique sous forme de somme finie d'éléments simples de première ou et deuxième espèces (1.12) et (1.13) respectivement.

1) La forme générale de la décomposition en éléments simples :

Si

$$\deg N(x) < \deg D(x).$$

Soit la fraction rationnelle $f(x) = \dfrac{N(x)}{D(x)}$ avec

$$D(x) = (x-\alpha)^m\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]^n,$$

alors $f(x)$ se décompose d'une manière unique sous forme de :

$$f(x) = \frac{a_1}{x-\alpha} + \frac{a_2}{(x-\alpha)^2} + \ldots + \frac{a_m}{(x-\alpha)^m} + \frac{A_1x+B_1}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + \frac{A_2x+B_2}{\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]^2} + \ldots + \frac{A_nx+B_n}{\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]^n}.$$

Exemple

Calculons l'intégrale indéfinie suivante :

$$I_1 = \int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}, \quad x \neq -1,$$

on a $N(x)=1$ et $D(x)=(x+1)\left(x^2+1\right)$, la décomposétion de

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)}$$

est donnée par :

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{a}{x+1}+\frac{bx+c}{x^2+1}=\frac{-\frac{1}{2}}{x+1}+\frac{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}{x^2+1},$$

en intégrant

$$\begin{aligned} I_1=\int\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\frac{x+1}{x^2+1}\right)dx &= -\frac{1}{2}\int\frac{1}{x+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{x}{x^2+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+1}dx \\ &= -\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{4}\int\frac{2x}{x^2+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+1}dx \\ &= -\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{4}\ln\left(x^2+1\right)+\frac{1}{2}\arctan(x)+C. \end{aligned}$$

Exemple

Calculons

$$I_2=\int\frac{x^2+2}{(x-2)(x+1)^3}dx,$$

on a

$$\begin{aligned} \frac{x^2+2}{(x-2)(x+1)^3} &= \frac{a}{x+1}+\frac{b}{(x+1)^2}+\frac{c}{(x+1)^3}+\frac{d}{x-2} \\ &= \frac{-\frac{2}{9}}{x+1}+\frac{-\frac{1}{3}}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+1)^3}+\frac{\frac{2}{9}}{x-2} \end{aligned}$$

alors l'intégrale est devenue

$$\begin{aligned} I_2 &= -\frac{2}{9}\int\frac{1}{x+1}dx+\frac{1}{3}\int\frac{1}{(x+1)^2}dx-\int\frac{1}{(x+1)^3}dx+\frac{2}{9}\int\frac{1}{x-2}dx \\ &= -\frac{2}{9}\ln|x+1|-\frac{1}{3}\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{2}{9}\ln|x-2|+C \\ &= \frac{2}{9}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|-\frac{1}{3(x+1)}+\frac{1}{2(x+1)^2}+C. \end{aligned}$$

2) La décomposition en éléments simples :

Si

$$\deg N(x)>\deg D(x).$$

Dans ce cas en divisant le numérateur par le dénominateur suivant la règle de division euclidienne des polynômes, on peut représenter la fraction initiale comme la somme d'un polynôme et d'une fraction rationnelle sous la forme :

$$f(x)=E(x)+\frac{N_1(x)}{D(x)},\quad \text{avec } \deg N_1(x)<\deg D(x),$$

Où $E(x)$ est un polynôme de degré $[\deg N_1(x) - \deg D(x)]$.

Pour déterminer la décomposition en éléments simples de $\frac{N_1(x)}{D(x)}$, on utilise ce qu'on a vu ci-dessus.

Alors, on a

$$\int f(x)\,dx = \int E(x)\,dx + \int \frac{N_1(x)}{D(x)}dx.$$

Exemple

Soit l'intégrale indéfinie suivante :

$$I = \int \frac{x^4 - 3}{x^2 + 2x + 1}dx.$$

On divise le numérateur par le dénominateur suivant la règle de division des polynômes de la fraction rationnelle

$$\frac{x^4 - 3}{x^2 + 2x + 1},$$

on a

$$\frac{x^4 - 3}{x^2 + 2x + 1} = x^2 - 2x + 3 + \frac{4x - 6}{x^2 + 2x + 1},$$

et la décomposition en éléments simples de $\frac{4x-6}{x^2+2x+1}$ est donnée par :

$$\frac{4x - 6}{x^2 + 2x + 1} = \frac{4x - 6}{(x+1)^2} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2} = \frac{4}{x+1} - \frac{10}{(x+1)^2},$$

donc

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 - 3}{x^2 + 2x + 1}dx &= \int \left(x^2 - 2x + 3\right)dx + \int \frac{4}{x+1}dx - \int \frac{10}{(x+1)^2}dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x + 4\ln|x+1| + \frac{10}{x+1} + C. \end{aligned}$$

1.3.4 Primitives des fonctions irrationnelles

Il n'est pas toujours possible d'exprimer l'intégrale d'une fonction irrationnelle quelconque à l'aide de fonctions élémentaires. Nous allons étudier, dans ce qui suit, les fonctions irrationnelles dont les intégrales indéfinies peuvent être ramenées par des changements de variables appropriés à celles des fonctions rationnelles que nous savons intégrer.

1- Primitives de type : $\int R\left(x, x^{\frac{m}{n}}, x^{\frac{k}{l}}, x^{\frac{p}{q}}, \ldots\right)dx$

Où R est une fonction rationnelle en fonction de $x, x^{\frac{m}{n}}, x^{\frac{k}{l}}, x^{\frac{p}{q}}, \ldots$

Pour ce type d'intégrales indéfinies on prend

$$x = u^r \quad \Rightarrow \quad dx = ru^{r-1}du$$

avec r est le dénominateur commun des fractions $\frac{m}{n}, \frac{k}{l}, \frac{p}{q}, \ldots$ En remplaçant ces valeurs dans notre intégrale on obtient :

$$\int R\left(x, x^{\frac{m}{n}}, x^{\frac{k}{l}}, x^{\frac{p}{q}}, \ldots\right)dx = \int R\left(u^r, u^{r\frac{m}{n}}, u^{r\frac{k}{l}}, u^{r\frac{p}{q}}, \ldots\right)ru^{r-1}du.$$

Exemple

Considérons l'intégrale indéfinie suivante :

$$I = \int \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}}, \quad x > 0.$$

Le dénominateur commun des fractions $\frac{1}{2}$ et $\frac{2}{3}$ est égale à 6, alors par l'utilisation de changement de variables suivant :

$$x = u^6 \quad \Longrightarrow \quad dx = 6u^5du,$$

on trouve.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}} = \int \frac{1+u^3}{u^4}6u^5du = 6\int \left(u+u^4\right)du \\ &= 6\left(\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{5}u^5\right) + C = 6\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{x} + \frac{1}{5}\sqrt[6]{x^5}\right) + C. \end{aligned}$$

2- Primitives de type : $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{k}{l}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p}{q}}, \ldots\right)dx$

Cette fois on utilise le changement de variables suivant : $\frac{ax+b}{cx+d} = u^r$, avec

$$ad - bc \neq 0$$

alors

$$\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}dx = ru^{r-1}du$$

où r est le dénominateur commun des fractions $\frac{m}{n}, \frac{k}{l}, \frac{p}{q}, \ldots$

Exemple

Considérons l'intégrale indéfinie suivante :

$$I=\int \frac{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+1}{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}-1}dx,\quad x\in\,]-\infty,-1[\,\cup\,[1,+\infty[\,.$$

Le ppcm des dénominateurs des exposants est égale à 2, alors par l'utilisation de changement de variables suivant :

$$\frac{x-1}{x+1}=t^2 \implies \frac{2}{(x+1)^2}dx=2t\,dt \quad \text{avec} \quad x=-\frac{t^2+1}{t^2-1},$$

on peut écrire

$$I=4\int \frac{t+1}{t-1}t\left(\frac{-t^2-1}{t^2-1}+1\right)^2 dt=4\int \frac{t\,(t+1)}{(t-1)\,(t^2-1)^2}dt.$$

Par la décomposition en éléments simples de la fraction suivante :

$$\frac{t\,(t+1)}{(t-1)\,(t^2-1)^2}=\frac{t}{(t-1)^3\,(t+1)},$$

on trouve

$$\frac{t}{(t-1)^3\,(t+1)}=\frac{3}{8}\frac{1}{t-1}-\frac{1}{4}\frac{1}{(t-1)^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{(t-1)^3}+\frac{1}{8}\frac{1}{t+1},$$

par conséquent, on obtient

$$\begin{aligned} I &= \frac{3}{2}\int \frac{1}{t-1}dt-\int \frac{1}{(t-1)^2}dt+2\int \frac{1}{(t-1)^3}dt+\frac{1}{2}\int \frac{1}{t+1}dt \\ &= \frac{3}{2}\ln|t-1|-\frac{1}{t-1}-\frac{1}{(t-1)^2}+\frac{1}{2}\ln(t)+C \\ &= \frac{3}{2}\ln\left|\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}-1\right|-\frac{1}{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}-1}-\frac{1}{\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}-1\right)^2}+\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)+C. \end{aligned}$$

3- Primitives de type : $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\;dx$

Tout d'abord on commence par rappeler les formules suivantes :

pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a

$$\cos^2 x=1-\sin^2(x)=\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{1}{2}, \tag{1.14}$$

$$\cosh^2 x=1+\sinh^2(x)=\frac{1}{2}\cosh(2x)+\frac{1}{2}, \tag{1.15}$$

$$\sinh^2(x)=\cosh^2 x-1, \tag{1.16}$$

Premier cas : Si $a=-1, b=0$ et $c=1$.

Exemple

Calculer l'intégrale indéfinie suivante :

$$I=\int\sqrt{1-x^2}\,dx,\qquad |x|\leq 1.$$

D'après (1.14), on pose pour $t\in\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

$$\begin{cases} x=\sin(t)\Longrightarrow dx=\cos(t)\,dt\\ \text{et}\\ \arcsin(x)=t,\end{cases}$$

alors

$$\begin{aligned} I &= \int\sqrt{1-\sin^2(x)}\cos(t)\,dt=\int\sqrt{\cos^2(x)}\cos(t)\,dt\\ &= \int\cos^2(t)\,dt=\int\left(\frac{1}{2}\cos(2t)+\frac{1}{2}\right)dt\\ &= \frac{1}{2}\int\cos(2t)\,dt+\frac{1}{2}\int dt=\frac{1}{4}\sin(2t)+\frac{1}{2}t+C\\ &= \frac{1}{4}\sin[2\arcsin(x)]+\frac{1}{2}\arcsin(x)+C.\end{aligned}$$

Deuxième cas : Si $a=1, b=0$ et $c=1$.

Exemple

Calculer l'intégrale indéfinie suivante :

$$I=\int\sqrt{1+x^2}\,dx.$$

D'après (1.15), on pose

$$\begin{cases} x=\sinh(t)\Rightarrow dx=\cosh(t)\,dt\\ \text{et}\\ \arg\sinh(x)=t,\end{cases}$$

alors

$$\begin{aligned}
I &= \int \sqrt{1+\sinh^2(x)}\cosh(t)\,dt = \int \sqrt{\cosh^2(x)}\cosh(t)\,dt \\
&= \int \cosh^2(t)\,dt = \int \left(\frac{1}{2}\cosh(2t)+\frac{1}{2}\right)dt \\
&= \frac{1}{2}\int \cosh(2t)\,dt + \frac{1}{2}\int dt = \frac{1}{4}\sinh(2t)+\frac{1}{2}t+C \\
&= \frac{1}{4}\sinh[2\arg\sinh(x)]+\frac{1}{2}\arg\sinh(x)+C.
\end{aligned}$$

Troisième cas : Si $a=1, b=0$ et $c=-1$.

Exemple

Calculer l'intégrale suivante

$$I=\int \sqrt{x^2-1}dx,\quad x\in\mathbb{R}\setminus\ ]-1,1[\,.$$

D'après (1.16), on pose

$$\begin{cases} x=\cosh(t)\Rightarrow dx=\sinh(t)\,dt \\ \text{et} \\ \arg\cosh(x)=t, \end{cases}$$

alors

$$\begin{aligned}
I &= \int \sqrt{\cosh^2(x)-1}\,\sinh(t)\,dt = \int \sqrt{\sinh^2(x)}\sinh(t)\,dt \\
&= \int \sinh^2(t)\,dt = \int \left(\frac{1}{2}\cosh(2t)-\frac{1}{2}\right)dt = \frac{1}{2}\int \cosh(2t)\,dt - \frac{1}{2}\int dt \\
&= \frac{1}{4}\sinh(2t)-\frac{1}{2}t+C \\
&= \frac{1}{4}\sinh[2\arg\cosh(x)]+\frac{1}{2}\arg\cosh(x)+C.
\end{aligned}$$

Cas générale : Si $a\neq 0$ on met le polynôme

$$ax^2+bx+c$$

sous la forme canonique comme suit :

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right],$$

où

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

On a trois cas différents.

1) Si $a > 0$ **et** $\Delta > 0$.

On peut écrire

$$\begin{aligned}
&\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx \\
&= \int \sqrt{a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]}\,dx = \sqrt{a}\int \sqrt{\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right]}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\Delta}{a}}\int \sqrt{\left[\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}}\right)^2 - 1\right]}\,dx,
\end{aligned}$$

par le changement de variable suivant

$$t = \frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}} \Longrightarrow dt = \frac{2a}{\sqrt{\Delta}}dx,$$

on trouve

$$\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{\Delta}{4\sqrt{a^3}}\int \sqrt{t^2-1}\,dt,$$

d'après la formule (1.16) on obtient

$$\begin{aligned}
&\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx \\
&= \frac{\Delta}{4\sqrt{a^3}}\left[\frac{1}{4}\sinh\left[2\operatorname{arg}\cosh(t)\right] + \frac{1}{2}\operatorname{arg}\cosh(t)\right] + C \\
&= \frac{\Delta}{4\sqrt{a^3}}\left[\frac{1}{4}\sinh\left[2\operatorname{arg}\cosh\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}}\right)\right] + \frac{1}{2}\operatorname{arg}\cosh\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}}\right)\right] + C.
\end{aligned}$$

Exemple

Calculer l'intégrale suivante

$$I = \int \sqrt{3x^2+4x+1}\,dx.$$

On a

$$3x^2+4x+1 = \frac{1}{3}\left[(3x+2)^2 - 1\right],$$

alors l'intégrale devient sous la forme

$$I = \sqrt{\frac{1}{3}}\int \sqrt{(3x+2)^2-1}\,dx,$$

on pose

$$t = 3x + 2 \Rightarrow dt = 3dx,$$

alors

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{3\sqrt{3}} \int \sqrt{t^2 - 1}\, dt \\ &= \frac{1}{6\sqrt{3}} \left[\frac{1}{2} \sinh\left[2 \arg\cosh(3x+2)\right] + \arg\cosh(3x+2) \right] + C. \end{aligned}$$

2) Si $a > 0$ **et** $\Delta < 0 \Rightarrow -\Delta > 0$.

On peut écrire

$$\begin{aligned} &\int \sqrt{ax^2 + bx + c}\, dx \\ &= \int \sqrt{a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2}\right]}\, dx = \sqrt{a} \int \sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2}\, dx \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{-\Delta}{a}} \int \sqrt{\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2 + 1}\, dx, \end{aligned}$$

par le changement de variable suivant

$$t = \frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}} \Rightarrow dt = \frac{2a}{\sqrt{-\Delta}} dx,$$

on trouve

$$\int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{-\Delta}{a}} \int \sqrt{t^2 + 1} dt,$$

d'après la formule (1.15) on obtient

$$\begin{aligned} &\int \sqrt{ax^2 + bx + c}\, dx \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{-\Delta}{a}} \left[\frac{1}{4} \sinh\left[2 \arg\cosh(t)\right] + \frac{1}{2} \arg\cosh(t)\right] + C \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{-\Delta}{a}} \left[\frac{1}{4} \sinh\left[2 \arg\cosh\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)\right] + \frac{1}{2} \arg\cosh\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)\right] + C. \end{aligned}$$

Exemple

Considérons l'intégrale indéfinie suivante

$$I = \int \sqrt{x^2 + 2x + 2}\, dx.$$

On a $a=1$ et $\Delta=-4$, alors

$$x^2+2x+2=(x+1)^2+1,$$

alors

$$I=\int\sqrt{(x+1)^2+1}\,dx,$$

on utilise le changement de variable suivant

$$t=x+1\Rightarrow dt=dx,$$

implique

$$\begin{aligned} I &= \int\sqrt{t^2+1}\,dt=\frac{1}{4}\sinh\left[2\operatorname{arg}\sinh(t)\right]+\frac{1}{2}\operatorname{arg}\sinh(t)+C \\ &= \frac{1}{4}\sinh\left[2\operatorname{arg}\sinh(x+1)\right]+\frac{1}{2}\operatorname{arg}\sinh(x+1)+C. \end{aligned}$$

3) Si $a<0\Rightarrow -a>0$ **et** $\Delta>0$.

On peut écrire

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= -a\left(-x^2-\frac{b}{a}x-\frac{c}{a}\right)=-a\left[-\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right] \\ &= -a\left[-\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right]=-a\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\left[1-\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}}\right)^2\right] \end{aligned}$$

alors on trouve

$$I=\int\sqrt{-a}\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\sqrt{1-\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}}\right)^2}\,dx=\sqrt{-a}\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\int\sqrt{1-\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}}\right)^2}\,dx,$$

par le changement de variable suivant

$$t=\frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}}\Rightarrow dt=\frac{2a}{\sqrt{\Delta}}dt,$$

on trouve

$$\int\sqrt{ax^2+bx+c}dx=\sqrt{-a}\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\int\sqrt{1-t^2}dt,$$

d'après (1.14) on obtient

$$\begin{aligned} &\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx \\ &= \sqrt{-a}\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\frac{1}{4}\sin(2t)+\frac{1}{2}t+C \\ &= \sqrt{-a}\frac{\sqrt{\Delta}}{4a}\left[\frac{1}{2}\sin\left[2\arcsin\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}}\right)\right]+\arcsin\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}}\right)\right]+C. \end{aligned}$$

Exemple

Soit I l'intégrale indéfinie suivante

$$I=\int \sqrt{-2x^2+3x-1}\,dx.$$

On a $a=-2$ et $\Delta=1$, alors

$$\begin{aligned}-2x^2+3x-1 &= -2\left(x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\right)=-2\left[\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2\right]\\ &= 2\left[\left(\frac{1}{4}\right)^2-\left(x-\frac{3}{4}\right)^2\right]=\left(\frac{1}{2}\right)^3\left[1-(4x-3)^2\right],\end{aligned}$$

alors

$$I=\left(\frac{1}{2}\right)^3\int \sqrt{1-(4x-3)^2}\,dx,$$

on utilise le changement de variable suivant

$$t=4x-3\Rightarrow dt=4dx,$$

implique

$$\begin{aligned}I &= \left(\frac{1}{2}\right)^5\int\sqrt{1-t^2}\,dt=\left(\frac{1}{2}\right)^6\left[\frac{1}{2}\sin\left[2\arcsin(t)\right]+\arcsin(t)\right]+C\\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^6\left[\frac{1}{2}\sin\left[2\arcsin(4x-3)\right]+\arcsin(4x-3)\right]+C.\end{aligned}$$

Remarque

Si le discriminant $\Delta<0$ de polynôme ax^2+bx+c avec $a<0$, alors

$$ax^2+bx+c<0$$

c'est-à-dire la racine carrée de

$$ax^2+bx+c$$

n'a pas de sens.

4- Primitives de type : $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$

La même chose ici, on suit les règles de changement de variables qui sont utilisées pour les types d'intégrales

$$\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx.$$

Exemple

Calculons l'intégrale
$$I=\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx, \quad |x|<1.$$
On pose
$$x=\sin(t) \quad \Rightarrow \quad dx=\cos(t)dt,$$
alors, on a
$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{\sin^2(t)}{\sqrt{1-\sin^2(t)}}\cos(t)dt=\int \frac{\sin^2(t)}{\sqrt{\cos^2(t)}}\cos(t)dt=\int \sin^2(t)dt \\
&= \frac{1}{2}\int [1-\cos(2t)]dt=\frac{1}{2}\left[\int dt-\int \cos(2t)dt\right]=\frac{1}{2}\left[t-\frac{1}{2}\sin(2t)\right]+C \\
&= \frac{1}{2}\left[\arcsin(x)-\frac{1}{2}\sin(2\arcsin(x))\right]+C \\
&= \frac{1}{2}[\arcsin(x)-2x\cos(\arcsin(x))]+C.
\end{aligned}$$

Exemple

Soit l'intégrale suivante :
$$I=\int \frac{x}{\sqrt{x^2-5x+4}}dx.$$
On a
$$x^2-5x+4=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2+4=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2,$$
alors
$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{x-\frac{5}{2}+\frac{5}{2}}{\sqrt{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}}dx \\
&= \int \frac{x-\frac{5}{2}}{\sqrt{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}}dx+\int \frac{\frac{5}{2}}{\sqrt{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}}dx,
\end{aligned}$$
on pose
$$t=x-\frac{5}{2} \quad \Longrightarrow \quad dt=dx,$$

d'où

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{t}{\sqrt{t^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}}dt + \int \frac{\frac{5}{2}}{\sqrt{t^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}}dt \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{2t}{\sqrt{t^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}}dt + \frac{5}{2}\int \frac{\frac{2}{3}}{\sqrt{\left(\frac{2}{3}t\right)^2-1}}dt \\ &= \sqrt{t^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2} + \frac{5}{2}\operatorname{arg\,cosh}\left(\frac{2}{3}t\right)+C, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$I = \sqrt{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2} + \frac{5}{2}\operatorname{arg\,cosh}\left[\frac{2}{3}\left(x-\frac{5}{2}\right)\right]+C.$$

5- Primitives de type : $\int R(e^x)\,dx$

Ces intégrales indifinies sont les primitives des fonctions rationnelles et des fonctions exponentielles.

On pose

$$t=e^x \quad \Rightarrow \quad dt=e^x dx, \tag{1.17}$$

on a

$$I=\int R(e^x)\,dx = \int \frac{R(t)}{t}dt.$$

Exemple

Calculons l'intégrale suivante :

$$I=\int \frac{e^{3x}}{e^x+2e^{-x}}dx.$$

On pose $t=e^x$, on trouve

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{t^3}{t+\frac{2}{t}}\frac{dt}{t} = \int \frac{t^3}{t^2+2}dt = \int \frac{t^3}{t^2+2}dt = \int \left(t-2\frac{t}{t^2+2}\right)dt \\ &= \int t\,dt - \int \frac{2t}{t^2+2}dt = \frac{1}{2}t^2 - \ln\left(t^2+2\right)+C. \end{aligned}$$

Donc

$$I=\frac{1}{2}e^{2x}-\ln\left(e^{2x}+2\right)+C.$$

6- Primitives de type : $\int R(\sin(x), \cos(x))\, dx$

Dans ce type d'intégrales, on fait le changement de variables

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right), \quad x \in]-\pi, \pi[\,, \tag{1.18}$$

telle que

$$\sin(x) = \frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\dfrac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}}{\dfrac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}} = \frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2y}{1+y^2}, \tag{1.19}$$

on a aussi,

$$\cos(x) = \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\dfrac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}}{\dfrac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}} = \frac{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \tag{1.20}$$

avec

$$x = 2\arctan(t) \quad \Longrightarrow \quad dx = \frac{2}{1+t^2}dt. \tag{1.21}$$

Donc, on peut écrire

$$\int R(\sin(x), \cos(x))\, dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt. \tag{1.22}$$

Exemple

Déterminer l'intégrale suivante :

$$I = \int \frac{1}{\cos(x)}dx, \; x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

D'après la formule (1.9), on a

$$I = \int \frac{1+t^2}{1-t^2}\frac{2}{1+t^2}dt = 2\int \frac{1}{1-t^2}dt = 2\int \frac{1}{(1+t)(1-t)}dt,$$

et par la décomposition de

$$\frac{1}{(1+t)(1-t)}$$

en éléments simples, on obtient

$$\frac{1}{(1+t)(1-t)} = \frac{\frac{1}{2}}{1+t} + \frac{\frac{1}{2}}{1-t},$$

alors

$$\begin{aligned} I &= 2\int\left(\frac{\frac{1}{2}}{1+t}+\frac{\frac{1}{2}}{1-t}\right)dt=\int\frac{1}{1+t}dt-\int\frac{-1}{1-t}dt \\ &= \ln|1+t|-\ln|1-t|+C=\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C, \end{aligned}$$

on revient à la variable initiale x, on trouve

$$I=\ln\left|\frac{1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)}\right|+C.$$

Exemple

Soit l'intégrale suivante :

$$I=\int\frac{1}{\cos(x)\sin(x)}dx,\ x\in\mathbb{R}\setminus\left\{k\frac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Par le changement de variables, on peut écrire

$$I=\int\frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}dt=\int\frac{1+t^2}{t(1-t^2)}dt,$$

et comme

$$\frac{1+t^2}{t(1-t^2)}=\frac{1}{t}+\frac{1}{1-t}-\frac{1}{1+t},$$

alors, on trouve

$$\begin{aligned} I &= \int\frac{1+t^2}{t(1-t^2)}dt=\int\left[\frac{1}{t}+\frac{1}{1-t}-\frac{1}{1+t}\right]dt \\ &= \ln|t|-\ln|1-t|-\ln|1+t|+C=\ln\left|\frac{t(1+t)}{1-t}\right|+C \\ &= \ln\left|\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)\left(1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)}\right|+C. \end{aligned}$$

Remarque

1) Si

$$R(-\sin(x)\ ,-\cos(x)\ )=R(\sin(x),\cos(x)\ ),$$

alors on fait le changement suivant :

$$t=\tan(x)\quad\Rightarrow\quad dt=\left[1+\tan^2(x)\right]dx,$$

Où

$$\begin{aligned}\sin^2(x) &= \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)+\sin^2(x)} = \frac{\dfrac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}}{\dfrac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)}} \\ &= \frac{\tan^2(x)}{1+\tan^2(x)} = \frac{t^2}{1+t^2}.\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}\cos^2(x) &= \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)+\sin^2(x)} = \frac{\dfrac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)}}{\dfrac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)}} \\ &= \frac{1}{1+\tan^2(x)} = \frac{1}{1+t^2}.\end{aligned}$$

2) Si

$$R(-\sin(x),\cos(x)) = -R(\sin(x),\cos(x)),$$

an pose

$$t = \cos(x) \Rightarrow dt = -\sin(x)\,dx.$$

3) Si

$$R(\sin(x),-\cos(x)) = -R(\sin(x),\cos(x)),$$

an pose

$$t = \sin(x) \Rightarrow dt = \cos(x)\,dx.$$

Exemple

Soit l'intégrale indéfinie

$$I = \int \frac{1}{1+\sin^2(x)}dx.$$

On pose $t = \tan(x) \Rightarrow dt = \left[1+\tan^2(x)\right]dx$, alors on a

$$\begin{aligned}I &= \int \frac{1+t^2}{1+2t^2}\frac{1}{1+t^2}dt = \int \frac{1}{1+2t^2}dt = \int \frac{1}{1+\left(\sqrt{2}t\right)^2}dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\sqrt{2}}{1+\left(\sqrt{2}t\right)^2}dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\sqrt{2}t\right)+C,\end{aligned}$$

d'où l'intégrale

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left[\sqrt{2}\tan(x)\right]+C.$$

Exemple

Calculer l'intégrale suivante

$$I=\int \frac{\sin^3(x)}{\cos^2(x)}dx.$$

On a

$$R(-\sin(x),\cos(x)\ )=-R(\sin(x),\cos(x)\ ),$$

on pose

$$t=\cos(x)\ \Rightarrow\ dt=-\sin(x)dx,$$

et l'intégrale devient

$$\begin{aligned} I &= -\int \frac{1-t^2}{t^2}dt=-\int \frac{1}{t^2}dt+\int dt=\frac{1}{t}+t+C \\ &= \frac{1}{\cos(x)}+\cos(x)+C. \end{aligned}$$

7- Primitives de type : $\int R(\sinh(x),\cosh(x))\,dx$

Dans ce type d'intégrales, on fait le changement de variables

$$t=\tanh\left(\frac{x}{2}\right),\quad x\in\left]-\pi,\pi\right[, \tag{1.23}$$

telle que

$$\sinh(x)=\frac{2\sinh\left(\frac{x}{2}\right)\cosh\left(\frac{x}{2}\right)}{\cosh^2\left(\frac{x}{2}\right)-\sinh^2\left(\frac{x}{2}\right)}=\frac{\frac{2\sinh\left(\frac{x}{2}\right)\cosh\left(\frac{x}{2}\right)}{\cosh^2\left(\frac{x}{2}\right)}}{\frac{\cosh^2\left(\frac{x}{2}\right)-\sinh^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cosh^2\left(\frac{x}{2}\right)}}=\frac{2\tanh\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\tanh^2\left(\frac{x}{2}\right)}=\frac{2t}{1-t^2}, \tag{1.24}$$

la même chose pour,

$$\cosh(x)=\frac{\cosh^2\left(\frac{x}{2}\right)+\sinh^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cosh^2\left(\frac{x}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}=\frac{\frac{\cosh^2\left(\frac{x}{2}\right)+\sinh^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cosh^2\left(\frac{x}{2}\right)}}{\frac{\cosh^2\left(\frac{x}{2}\right)-\sinh^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cosh^2\left(\frac{x}{2}\right)}}=\frac{1+\tanh^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\tanh^2\left(\frac{x}{2}\right)}=\frac{1+t^2}{1-t^2}, \tag{1.25}$$

avec

$$x=2\operatorname{arg}\tanh(t)\quad \text{implique}\ \ dx=\frac{2}{1-t^2}dt. \tag{1.26}$$

Donc, on peut écrire

$$\int R(\sinh(x),\cosh(x))\,dx=\int R\left(\frac{2t}{1-t^2},\frac{1+t^2}{1-t^2}\right)\frac{2}{1-t^2}dt. \tag{1.27}$$

Exemple

Déterminer l'intégrale suivante :

$$I=\int\frac{\sinh(x)}{\sinh(x)+2\cosh(x)}dx.$$

Par le changement de variables, on a

$$\begin{aligned}I &= \int\frac{\frac{2t}{1-t^2}}{\frac{2t}{1-t^2}+2\frac{1+t^2}{1-t^2}}\frac{2}{1-t^2}dt=\int\frac{\frac{2t}{1-t^2}}{\frac{2t+2(1+t^2)}{1-t^2}}\frac{2}{1-t^2}dt\\ &= 2\int\frac{t}{(t^2+t+1)(1-t^2)}dt,\end{aligned}$$

telle que

$$\frac{t}{(t^2+t+1)(1-t^2)}=\frac{1}{6}\frac{1}{1-t}-\frac{1}{2}\frac{1}{1+t}+\frac{1}{3}\frac{2t+1}{t^2+t+1},$$

d'où l'intégrale devient

$$\begin{aligned}I &= -\frac{1}{3}\int\frac{-1}{1-t}dt-\int\frac{1}{1+t}dt+\frac{2}{3}\int\frac{2t+1}{t^2+t+1}dt\\ &= -\frac{1}{3}\ln|1-t|-\ln|1+t|+\frac{2}{3}\ln\left|t^2+t+1\right|+C\\ &= -\frac{1}{3}\ln\left|1-\tanh\left(\frac{x}{2}\right)\right|-\ln\left|1+\tanh\left(\frac{x}{2}\right)\right|\\ &\quad+\frac{2}{3}\ln\left|\tanh^2\left(\frac{x}{2}\right)+\tanh\left(\frac{x}{2}\right)+1\right|+C.\end{aligned}$$

8- Primitives : $\int\sin(mx)\cos(nx)\,dx$, $\int\sin(mx)\sin(nx)\,dx$, $\int\cos(mx)\cos(nx)\,dx$

On utilise les formules suivantes :

$$1)\ \sin(mx)\cos(nx)=\frac{1}{2}\left[\sin(m+n)x+\sin(m-n)x\right]. \tag{1.28}$$

$$2)\ \sin(mx)\sin(nx)=\frac{1}{2}\left[\cos(m-n)x-\cos(m+n)x\right]. \tag{1.29}$$

$$3)\ \cos(mx)\cos(nx)=\frac{1}{2}\left[\cos(m-n)x+\cos(m+n)x\right]. \tag{1.30}$$

Exemple

Déterminons l'intégrale indéfinie suivante :

$$I=\int\sin(5x)\cos(4x)\,dx. \tag{1.31}$$

D'après la formule (1.28), on a

$$\begin{aligned} I &= \int [\sin(9x)+\sin(x)]\,dx = \int \sin(9x)\,dx + \int \sin(x)\,dx \\ &= -\frac{1}{9}\cos(9x)+\cos(x)+C. \end{aligned}$$

9- Primitives de type : $I_{m,n} = \int \cos^m(x)\sin^n(x)\,dx$

On a quatre cas :

1) Si m et n sont impairs, on pose

$$m = 2k+1,\ n = 2l+1 \text{ et } t = \cos(2x) \Rightarrow dt = -\frac{1}{2}\sin(2x)\,dx,$$

alors

$$I_{m,n} = \int \cos^m(x)\sin^n(x)\,dx = -\frac{1}{2^{k+l+1}}\int (1+t)^k(1-t)^l\,dt.$$

2) Si m et n sont pairs et positifs, on pose

$$\cos^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2},\ \sin^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2},\ \cos(x)\sin(x) = \frac{\sin(2x)}{2}.$$

3) Si m et n sont pairs et m ou n négatif, on pose

$$t = \tan(x) \implies dt = \left(1+t^2\right)dx.$$

4) Si m est pair et n est impair, on pose

$$t = \cos(x) \implies dt = -\sin(x)\,dx.$$

Exemple

Déterminer la primitive suivante :

$$I = \int \cos^3(x)\sin^5(x)\,dx.$$

On pose

$$t = \cos(2x) \implies dt = -\frac{1}{2}\sin(2x)\,dx,$$

alors, on a

$$\begin{aligned} I &= -\int \frac{1-t}{2}\left(\frac{1+t}{2}\right)^2 dt = -\frac{1}{8}\int \left(t^3-t^2+t-1\right)dt \\ &= -\frac{1}{8}\left[\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2-t\right]+C \\ &= -\frac{1}{8}\left[\frac{1}{4}\cos^4(x)-\frac{1}{3}\cos^3(x)+\frac{1}{2}\cos^2(x)-\cos(x)\right]+C. \end{aligned}$$

Exemple

Calculer la primitive suivante :

$$I=\int \frac{\sin^2(x)}{\cos^4(x)}dx.$$

La méthode nous permet de poser

$$t=\tan(x) \quad \Rightarrow \quad dt=\left(1+t^2\right)dx,$$

alors,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sin^2(x)}{\cos^4(x)}dx=\int \tan^2(x)\frac{1}{\cos^2(x)}dx=\int t^2\left(1+t^2\right)\frac{1}{1+t^2}dt \\ &= \int t^2 dt=\frac{1}{3}t^3+C=\frac{1}{3}\tan^3(x)+C. \end{aligned}$$

1.4 Exercices corrigés

I) Intégration des fonctions de type $x\mapsto f'(x)f^n(x), n\geq 1.$

Exercice 1.1

Intégrer les fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} f_1(x) &= e^x\left(e^x+1\right)^2, \quad f_2(x)=\frac{2x-1}{\left(x^2-x+1\right)^2}, \quad f_3(x)=\frac{1}{x\sqrt{\ln(x)}} \\ f_4(x) &= e^{3x+1}, \quad f_5(x)=\sin\left(\frac{1}{2}x-3\right), \quad f_6(x)=\frac{1}{3}\sin^2(x)\cos(x) \\ f_7(x) &= x\sqrt{1+x^2}, \quad f_8(x)=x\left(5x^2-3\right)^3, \quad f_9(x)=x^2\sqrt{1-x^3} \\ f_{10}(x) &= \frac{-1}{\sqrt{x+1}}e^{\sqrt{x+1}}, \quad f_{11}(x)=\sin(x)\cos(x), \quad f_{12}(x)=\tan^3(x)\frac{1}{\cos^2(x)}. \end{aligned}$$

Exercice 1.2

Déterminer les primitives suivantes :

$$(1)\int \frac{-\cos(x)}{\sin^3(x)}dx, \quad (2)\int \frac{\cos(x)}{\sqrt{1-\sin(x)}}dx, \quad (3)\int \frac{\arctan(x)}{1+x^2}dx$$

$$(4)\int \frac{1}{\arcsin(x)\sqrt{1-x^2}}dx, \quad (5)\int \frac{-\cos(x)}{a+b\sin(x)}dx, \quad (6)\int \frac{\ln(x)}{x}dx$$

$$(7)\int \frac{x}{2\sqrt{x^2+1}}e^{\sqrt{x^2+1}}dx.$$

II) Intégration par changement de variables.

Exercice 1.3

Calculer les intégrales suivantes :

$$(1)\int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}dx,\quad (2)\int \frac{x}{\sqrt{a^4-x^4}}dx,\quad (3)\int \frac{x}{\sqrt{x^4-a^4}}dx$$

$$(4)\int \frac{-x}{\sqrt{x^4+a^4}}dx,\quad (5)\int \frac{e^x}{1-e^x}dx,\quad (6)\int \frac{1}{x\sqrt{\ln^2(x)-1}}dx$$

$$(7)\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2(x)}}dx,\quad (8)\int \frac{\sinh(x)}{1+4\cosh^2(x)}dx,\quad (9)\int x^2\sqrt{1-x^3}dx$$

$$(10)\int \frac{10(9x+5)^7}{(7x+5)^9}dx,\quad (11)\int \frac{\cos[\ln(x)]}{x}dx,\quad (12)\int \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}}dx.$$

III) Intégration par parties

Exercice 1.4

Intégrer par parties les fonctions suivantes

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= \arcsin(x),\quad f_2(x)=\arctan(x),\quad f_3(x)=x\sin(x)\\
f_4(x) &= \ln^2(x),\quad f_5(x)=x^n\ln(x),\quad f_6(x)=x\ln^n(x),\\
f_7(x) &= 2x\arctan(x),\quad f_8(x)=\sin(x)\sinh(x),\quad f_9(x)=\arccos(x)\\
f_{10}(x) &= \int \frac{\sin(2x)}{1+\cos(2x)}dx,\quad f_{11}(x)=\int \frac{1}{x^2+a^2}dx,
\end{aligned}$$

où $n\in\mathbb{N}^*$.

IV) Intégration des fractions rationnelles.

Exercice 1.5

Intégrer les fractions rationnelles

$$(1)\int \frac{x-2}{x+2}dx,\quad (2)\int \frac{2x}{x^2-5x+6}dx,\quad (3)\int \frac{1}{x^2(1+x)}dx,\quad (4)\int \frac{1}{x^4-1}dx,$$

$$(5)\int \frac{1}{x(x^3+1)}dx\ (6)\int \frac{x^3}{(x^2-1)^2}dx,\quad (7)\int \frac{x}{x^4-x^2-2}dx,(8)\int \frac{1}{x^2-4x+8}dx,$$

$$(9)\int \frac{x^2+3x}{(x^2+1)(x+1)^2}dx,(10)\int \frac{x}{(x+1)(x+3)(x+5)}dx.$$

V) Primitives de la forme $\int \sqrt{ax^2+bx+c}dx$

Exercice 1.6

Calculer les intégrales suivantes

$$(1)\int\left(5-3x^2\right)^{\frac{1}{2}}dx,\quad (2)\int\left(x^2+24x+244\right)^{\frac{1}{2}}dx,\quad (3)\int\left(3x^2+5\right)^{\frac{1}{2}}dx,$$

$$(4)\int\sqrt{x-x^2}dx,\quad (5)\int\sqrt{x^2+2x-3}dx.$$

Cas où $I=\int R\left(x,\sqrt{\dfrac{ax+b}{cx+d}}\right)dx.$

Exercice 1.7

Calculer les intégrales

$$(1)\int\frac{x^2}{(2x+1)^{\frac{1}{2}}}dx,\quad (2)\int\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx,\quad (3)\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx,\quad (4)\int x\sqrt{\frac{1-x}{x}}dx.$$

VI) Cas divers d'intégrales indéfinies

Exercice 1.8

Calculer ce qui suit

$$(1)\int\frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx,\ (2)\int\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx,\ (3)\int\frac{1}{e^{2x}-2e^x}dx,\ (4)\int\cos(\ln x)\,dx,$$

$$(5)\int\frac{1}{1+\sin(x)+\cos(x)}dx,\ (6)\int\frac{1}{1+\tan(x)}dx,\ (7)\int\sin\left(\frac{x}{4}\right)\cos\left(\frac{3x}{4}\right)dx,$$

$$(8)\int\sin(x)\sin(2x)\sin(3x)\,dx,\quad (9)\int\cos(x)\cos(2x)\cos(3x)\,dx,$$

$$(10)\int\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{3}\right)dx,\ (11)\int\sin^2(x)\cos^2(x)\,dx,\ (12)\int\frac{1}{\cosh^2(x)\sinh^2(x)}dx,$$

$$(13)\int\frac{\cosh^2(x)+\sinh^2(x)}{\cosh(x)\sinh(x)}dx,\qquad (14)\int\frac{1}{2\sinh(x)+3\cosh(x)}dx$$

Correction

Exercice 1.1

$$\int f_1(x)\,dx = \int e^x\left(e^x+1\right)^2dx=\frac{1}{3}\left(e^x+1\right)^3+C.$$

$$\int f_2(x)\,dx = \int\frac{2x-1}{\left(x^2-x+1\right)^2}dx=-\frac{1}{x^2-x+1}+C.$$

$$\begin{aligned}
\int f_3(x)\,dx &= \int \frac{1}{x\sqrt{\ln(x)}}dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{\ln(x)}}dx = 2\sqrt{\ln(x)} + C.\\
\int f_4(x)\,dx &= \int e^{3x+1}dx = \frac{1}{3}e^{3x+1} + C.\\
\int f_5(x)\,dx &= \int \sin\left(\frac{1}{2}x-3\right)dx = -2\cos\left(\frac{1}{2}x-3\right) + C.\\
\int f_6(x)\,dx &= \int \frac{1}{3}\sin^2(x)\cos(x)\,dx = \frac{1}{9}\sin^3(x) + C.\\
\int f_7(x)\,dx &= \int x\sqrt{1+x^2}dx = \frac{1}{3}\sqrt{(1+x^2)^3} + C.\\
\int f_8(x)\,gx &= \int x\left(5x^2-3\right)^3 dx = \frac{1}{40}\left(5x^2-3\right)^4 + C.\\
\int f_9(x)\,dx &= \int x^2\sqrt{1-x^3}dx = -\frac{2}{9}\sqrt{(1-3x^2)^3} + C.\\
\int f_{10}(x)\,dx &= \int \frac{-1}{\sqrt{x+1}}e^{\sqrt{x+1}}dx = 2e^{\sqrt{x+1}} + C.\\
\int f_{11}(x)\,dx &= \int \sin(x)\cos(x)\,dx = \frac{1}{2}\sin^2(x) + C.\\
\int f_{12}(x)\,dx &= \int \tan^3(x)\frac{1}{\cos^2(x)}dx = \frac{1}{4}\tan^4(x) + C.
\end{aligned}$$

Exercice 1.2

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int \frac{-\cos(x)}{\sin^3(x)}dx = \frac{1}{2}\frac{1}{\sin^2(x)} + C.\\
I_2 &= \int \frac{\cos(x)}{\sqrt{1-\sin(x)}}dx = -2\sqrt{1-\sin(x)} + C.\\
I_3 &= \int \frac{\arctan(x)}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\arctan^2(x) + C.\\
I_4 &= \int \frac{1}{\arcsin(x)\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{1}{2}\arcsin^2(x) + C.\\
I_5 &= \int \frac{-\cos(x)}{a+b\sin(x)}dx = -\frac{1}{b}\ln|a+b\sin(x)| + C.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_6 &= \int \frac{\ln(x)}{x}dx = \frac{1}{2}\ln^2(x) + C, c \in \mathbb{R}. \\ I_7 &= \int \frac{x}{2\sqrt{x^2+1}} e^{\sqrt{x^2+1}}dx = \frac{1}{2}e^{\sqrt{x^2+1}} + C. \end{aligned}$$

Exercice 1.3

1) On a

$$I_1 = \int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}dx.$$

Posons

$$t^2 = x \Longrightarrow 2tdt = dx$$

alors

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{1}{(t^2+1)t}2tdt = 2\int \frac{1}{t^2+1}dt = 2\arctan(t) + C \\ &= 2\arctan\left(\sqrt{x}\right) + C. \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{x}{\sqrt{a^4 - x^4}}dx = \int \frac{x}{\sqrt{a^4\left[1 - \left(\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)^2\right]}}dx \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{\frac{2}{a^2}x}{\sqrt{1 - \left(\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)^2}}dx = \frac{1}{2}\arcsin\left(\left(\frac{x}{a}\right)^2\right) + C. \end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned} I_3 &= \int \frac{x}{\sqrt{x^4 - a^4}}dx = \int \frac{x}{\sqrt{a^4\left[\left(\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)^2 - 1\right]}}dx \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{\frac{2}{a^2}x}{\sqrt{\left(\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)^2 - 1}}dx = \frac{1}{2}\arg\cosh\left(\left(\frac{x}{a}\right)^2\right) + C. \end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned} I_4 &= \int \frac{-x}{\sqrt{x^4 + a^4}}dx = \int \frac{-x}{\sqrt{a^4\left[\left(\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)^2 + 1\right]}}dx \\ &= -\frac{1}{2}\int \frac{\frac{2}{a^2}x}{\sqrt{\left(\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)^2 + 1}}dx = -\frac{1}{2}\arg\sinh\left(\left(\frac{x}{a}\right)^2\right) + C. \end{aligned}$$

5)

$$I_5 = \int \frac{e^x}{1 - e^x}dx = -\int \frac{-e^x}{1 - e^x}dx = -\ln|1 - e^x| + C.$$

6)

$$\begin{aligned} I_6 &= \int \frac{1}{x\sqrt{\ln^2(x)-1}}dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{\ln^2(x)-1}}dx \\ &= \arg\cosh[\ln(x)] + C. \end{aligned}$$

7)

$$\begin{aligned} I_7 &= \int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2(x)}}dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\ln^2(x)}}dx \\ &= \arcsin[\ln(x)] + C. \end{aligned}$$

8)

$$\begin{aligned} I_8 &= \int \frac{\sinh(x)}{1+4\cosh^2(x)}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2\sinh(x)}{1+[2\cosh(x)]^2}dx \\ &= \frac{1}{2}\arctan[2\cosh(x)] + C. \end{aligned}$$

9)

$$I_9 = \int x^2\sqrt{1-x^3}dx = -\frac{1}{3}\int -3x^2\sqrt{1-x^3}dx$$

on pose

$$t^2 = 1-x^3 \Rightarrow 2tdt = -3x^2dx$$

alors

$$I_9 = -\frac{2}{3}\int t^2dt = -\frac{2}{9}t^3 + c = -\frac{2}{9}\sqrt{(1-x^3)^3} + C.$$

10)

$$I_{10} = \int \frac{10(9x+5)^7}{(7x+5)^9}dx,$$

on pose

$$t = \frac{9x+5}{7x+5} \Rightarrow dt = \frac{10}{(7x+5)^2}dx$$

donc

$$I_{10} = \int \frac{(9x+5)^7}{(7x+5)^7}dt = \int t^7dt = \frac{1}{8}t^8 + c = \frac{1}{8}\left(\frac{9x+5}{7x+5}\right)^8 + C.$$

11)

$$I_{11} = \int \frac{\cos[\ln(x)]}{x}dx = \sin[\ln(x)] + C.$$

12)

$$I_{12} = \int \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}}dx,$$

on pose

$$t = e^{-x} \Longrightarrow dt = -e^{-x}dx$$

alors

$$\begin{aligned} I_{12} &= \int \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}}dx = -\int \frac{1}{t\sqrt{\frac{1-t^2}{t^2}}}dt = -\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt \\ &= -\arcsin(t) + C = -\arcsin\left(e^{-x}\right) + C. \end{aligned}$$

Exercice 1.4

1) On a

$$\int f_1(x)\,dx = \int \arcsin(x)\,dx,$$

posons

$$\begin{cases} u(x) = \arcsin(x) \\ \\ v'(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \\ v(x) = x \end{cases}$$

alors

$$\int f_1(x)\,dx = x\arcsin(x) + \int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}dx = x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C.$$

2)

$$\int f_2(x)\,dx = \int \arctan(x)\,dx,$$

on pose

$$\begin{cases} u(x) = \arctan(x) \\ \\ v'(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \\ \\ v(x) = x \end{cases}$$

l'intégrale devient

$$\begin{aligned} \int f_2(x)\,dx &= x\arctan(x) - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx \\ &= x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C. \end{aligned}$$

3)

$$\int f_3(x)\,dx = \int x\sin(x)\,dx,$$

on prend

$$\begin{cases} u(x) = x \\ \\ v'(x) = \sin(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ \\ v(x) = -\cos(x) \end{cases}$$

d'où

$$\int f_3(x)\,dx = -x\cos(x) + \int \cos(x)\,dx = x\arctan(x) + \sin(x) + C.$$

4)

$$\int f_4(x)\,dx = \int \ln^2(x)\,dx,$$

on fait

$$\begin{cases} u(x) = \ln^2(x) \\ \\ v'(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = \dfrac{2}{x}\ln(x) \\ \\ v(x) = x \end{cases}$$

alors

$$\int f_4(x)\,dx = x\ln^2(x) - 2\int \ln(x)\,dx, \tag{1.32}$$

pour calculer l'intégrale $\int \ln(x)\,dx$ on utilise une autre fois l'intégrations par parties, si

$$\begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ \\ v'(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ \\ v(x) = x \end{cases}$$

on trouve

$$\int \ln(x)\,dx = x\ln(x) - \int dx = x\ln(x) - x + C'$$

donc, on obtient

$$\int f_4(x)\,dx = x\ln^2(x) - 2x\ln(x) - x + C. \tag{1.33}$$

5)

$$\int f_5(x)\,dx = \int x^n \ln(x)\,dx,$$

on prend

$$\begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ \\ v'(x) = x^n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ \\ v(x) = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1} \end{cases}$$

alors

$$\begin{aligned} \int f_5(x)\,dx &= \frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln(x) - \int \frac{1}{n+1}x^n\,dx \\ &= \frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln(x) - \frac{1}{(n+1)^2}x^{n+1} + C. \end{aligned}$$

6)

$$\int f_6(x)\,dx = \int x\ln^n(x)\,dx,$$

on a

$$\begin{cases} u(x)=\ln^n(x) \\ \\ v'(x)=x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x)=\dfrac{n}{x}\ln^{n-1}(x) \\ \\ v(x)=1 \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\int f_6(x)\,dx=\ln^n(x)-\int \frac{n}{x}\ln^{n-1}(x)\,dx=\ln^n(x)-\ln^n(x)+C.$$

7)

$$\int f_7(x)\,dx=\int 2x\arctan(x)\,dx$$

on pose

$$\begin{cases} u(x)=\arctan(x) \\ \\ v'(x)=2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x)=\dfrac{1}{1+x^2} \\ \\ v(x)=x^2 \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned}\int f_7(x)\,dx &= x^2\arctan(x)-\int \frac{x^2}{1+x^2}dx=x^2\arctan(x)-\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx \\ &= x^2\arctan(x)-x+\arctan(x)+C.\end{aligned}$$

8)

$$\int f_8(x)\,dx=\int \frac{x\ln(x)}{(1+x^2)^2}dx,$$

posons

$$\begin{cases} u(x)=\ln(x) \\ \\ v'(x)=\dfrac{x}{(1+x^2)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x)=\dfrac{1}{x} \\ \\ v(x)=-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+x^2} \end{cases}$$

donc

$$\int f_8(x)\,dx=-\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}\ln(x)+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x(1+x^2)},$$

on

$$\frac{1}{x(1+x^2)}=\frac{a}{x}+\frac{bx+c}{1+x^2}=\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x^2}$$

alors

$$\begin{aligned}\int f_8(x)\,dx &= -\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}\ln(x)+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x(1+x^2)} \\ &= -\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}\ln(x)+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x}dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+x^2}dx \\ &= -\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}\ln(x)+\frac{1}{2}\ln|x|-\frac{1}{2}\arctan(x)+C.\end{aligned}$$

9)

$$\int f_9(x)\,dx = \int \arccos(x)\,dx,$$

on choisit

$$\begin{cases} u(x) = \arccos(x) \\ \\ v'(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \\ v(x) = x \end{cases}$$

donc

$$\int f_9(x)\,dx = x\arccos(x) - \int \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}dx = x\arccos(x) - \sqrt{1-x^2} + C.$$

10)

$$\int f_{10}(x)\,dx = -\frac{1}{2}\ln|1+\cos(2x)| + C.$$

11)

$$\int f_{11}(x)\,dx = \frac{1}{a}\int \frac{\frac{1}{a}}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C.$$

Exercice 1.5

1)

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{x-2}{x+2}dx = \int\left(1+\frac{-4}{x+2}\right)dx = \int dx - 4\int \frac{1}{x+2}dx \\ &= x - 4\ln|x+2| + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{2x}{x^2-5x+6}dx = \int \frac{2x}{(x-2)(x-3)}dx = -4\int\frac{1}{x-2}dx + 6\int \frac{1}{x-3}dx \\ &= -4\ln|x-2| + 6\ln|x-3| + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned} I_3 &= \int \frac{1}{x^2(1+x)}dx = \int\left(\frac{-x+1}{x^2} + \frac{1}{x+1}\right)dx \\ &= -\int \frac{1}{x}dx + \int \frac{1}{x^2}dx + \int \frac{1}{x+1}dx = -\ln|x| - \frac{1}{x} + \ln|x+1| + C. \end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned} I_4 &= \int \frac{1}{x^4-1}dx = \int \frac{1}{(x^2-1)(x^2+1)}dx \\ &= \frac{1}{4}\int \frac{1}{x+1}dx - \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-1}dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}dx \\ &= \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\arctan(x) + C. \end{aligned}$$

5)

$$\begin{aligned} I_5 &= \int \frac{1}{x(x^3+1)}dx = \int \frac{1}{x}dx - \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}dx - \frac{1}{3}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx \\ &= \ln|x| - \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{3}\ln\left|x^2-x+1\right| + C. \end{aligned}$$

6)

$$\begin{aligned} I_6 &= \int \frac{x^3}{(x^2-1)^2}dx = \int \frac{x^3}{(x-1)^2(x+1)^2}dx \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{(x-1)^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{(x+1)^2} \\ &= \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{4}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\frac{1}{x+1} + C. \end{aligned}$$

7)

$$\begin{aligned} I_7 &= \int \frac{x}{x^4-x^2-2}dx = \int \frac{x}{(x^2+1)(x^2-2)}dx \\ &= \int \frac{x}{(x^2+1)\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)}dx \\ &= -\frac{1}{6}\int \frac{2x}{x^2+1}dx + \frac{1}{6}\int \frac{1}{x-\sqrt{2}}dx + \frac{1}{6}\int \frac{1}{x+\sqrt{2}}dx \\ &= -\frac{1}{6}\ln\left|x^2+1\right| + \frac{1}{6}\ln\left|x-\sqrt{2}\right| + \frac{1}{6}\ln\left|x+\sqrt{2}\right| + C. \end{aligned}$$

8)

$$\begin{aligned} I_8 &= \int \frac{1}{x^2-4x+8}dx = \int \frac{1}{(x-2)^2+4}dx = \frac{1}{3}\int \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{x-2}{2}\right)^2+1}dx \\ &= \frac{1}{3}\arctan\left(\frac{x-2}{2}\right) + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

9)

$$\begin{aligned}
I_9 &= \int \frac{x^2+3x}{(x^2+1)(x+1)^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{x+3}{x^2+1}dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{(x+1)^2} \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{2x}{x^2+1}dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+1}dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{(x+1)^2} \\
&= \frac{1}{4}\ln\left|x^2+1\right| + \frac{3}{2}\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C.
\end{aligned}$$

10)

$$\begin{aligned}
I_{10} &= \int \frac{x}{(x+1)(x+3)(x+5)}dx = -\frac{1}{8}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{3}{4}\int \frac{dx}{x+3} - \frac{5}{8}\int \frac{dx}{x+5} \\
&= -\frac{1}{8}\ln|x+1| + \frac{3}{4}\ln|x+3| + -\frac{5}{8}\ln|x+5| + C.
\end{aligned}$$

Exercice 1.6

1)

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int \left(5-3x^2\right)^{\frac{1}{2}} dx = \int \left[5\left(1-\left(\sqrt{\frac{3}{5}}x\right)^2\right)\right]^{\frac{1}{2}} dx \\
&= \sqrt{5}\int \left(1-\left(\sqrt{\frac{3}{5}}x\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{5}{\sqrt{3}}\left[\frac{1}{4}\sin\left(2\arcsin\left(\sqrt{\frac{3}{5}}x\right)\right)\right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2}\arcsin\left(\sqrt{\frac{3}{5}}x\right)\right] + C.
\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int \left(x^2+24x+244\right)^{\frac{1}{2}} dx = \int \left(\left(x^2+12\right)^2 - 144 + 244\right)^{\frac{1}{2}} dx \\
&= \int \left((x+12)^2+100\right)^{\frac{1}{2}} dx = 10\int \left(\left(\frac{x+12}{10}\right)^2+1\right)^{\frac{1}{2}} dx \\
&= 100\int \left(\cosh^2(t)+1\right)^{\frac{1}{2}} \cosh(t)\,dt = 100\left[\frac{1}{4}\sinh(2t) + \frac{1}{2}t\right] + C \\
&= 100\left[\frac{1}{4}\sinh\left(2\operatorname{arg\,sinh}\left(\frac{x+12}{10}\right)\right) + \frac{1}{2}\operatorname{arg\,sinh}\left(\frac{x+12}{10}\right)\right] + C.
\end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned} I_3 &= \int \left(3x^2+5\right)^{\frac{1}{2}} dx = \sqrt{5}\int \left(\left(\sqrt{\frac{3}{5}}x\right)^2+1\right)^{\frac{1}{2}} dx \\ &= \frac{5}{\sqrt{3}}\int \left(\cosh^2(t)+1\right)^{\frac{1}{2}} \cosh(t)\, dt = \frac{5}{\sqrt{3}}\left[\frac{1}{4}\sinh(2t)+\frac{1}{2}t\right]+C \\ &= \frac{5}{\sqrt{3}}\left[\frac{1}{4}\sinh\left(2\arg\sinh\left(\sqrt{\frac{3}{5}}x\right)\right)+\frac{1}{2}\arg\sinh\left(\sqrt{\frac{3}{5}}x\right)\right]+C. \end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned} I_4 &= \int \sqrt{x-x^2}dx = \int \sqrt{-(x^2-x)}dx = \int \sqrt{-\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right]}dx \\ &= \frac{1}{2}\int \sqrt{-\left[\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}\right)^2-1\right]}dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{1-[2(2x-1)]^2}dx \\ &= \frac{1}{8}\left[\frac{1}{4}\sin(2t)+\frac{1}{4}t\right]+c = \frac{1}{8}\left[\frac{1}{4}\sin[2\arcsin(4x-2)]\right. \\ &\quad \left. +\frac{1}{2}\arcsin(4x-2)\right]+C. \end{aligned}$$

5)

$$\begin{aligned} I_5 &= \int \sqrt{x^2+2x-3}dx = \int \sqrt{(x+1)^2-4}dx = 2\int \sqrt{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2-1dx} \\ &= 2\left[\frac{1}{4}\sinh\left(2\arg\sinh\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)+\frac{1}{2}\arg\sinh\left(\frac{x+1}{2}\right)\right]+C. \end{aligned}$$

Exercice 1.7

1)

$$I_1 = \int \frac{x^2}{(2x+1)^{\frac{1}{2}}}dx = \int x^2\sqrt{\frac{1}{2x+1}}dx,$$

on pose $t^2 = \dfrac{1}{2x+1} \Rightarrow dx = -\dfrac{1}{t^3}dt$ et $x = \dfrac{1-t^2}{2t^2}$, alors

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{t^6}-\frac{2}{t^4}+\frac{1}{t^2}\right)dt = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{5t^5}-\frac{2}{3t^3}+\frac{1}{t}\right)+C \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}\sqrt{(2x+1)^5}-\frac{2}{3}\sqrt{(2x+1)^3}+\sqrt{2x+1}\right)+C. \end{aligned}$$

2)

$$I_2 = \int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx,$$

on prend $t^2 = \dfrac{x-1}{x+1} \Rightarrow dx = t\left(\dfrac{2}{1-t^2}\right)^2 dt$ et $x = \dfrac{1+t^2}{1-t^2}$, alors

$$\begin{aligned}
I_2 &= 4\int \frac{t^2}{(1-t)^2(1+t)^2}dt = \int \left(\frac{-1}{1-t} + \frac{1}{1+t} + 2\frac{1}{(1+t)^2}\right)dt \\
&= \ln|1-t| + \ln|1+t| - \frac{2}{1+t} + C \\
&= \ln\left|1-\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right| + \ln\left|1+\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right| - \frac{2}{1+\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} + C.
\end{aligned}$$

3)

$$I_3 = \int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx, \quad x \neq a \neq 0.$$

Pour $t^2 = \dfrac{a+x}{a-x} \Rightarrow dx = t\dfrac{\left(\frac{2a}{t^2+1}\right)^2}{a}dt$ et $x = \dfrac{a\left(t^2-1\right)}{t^2+1}$, alors

$$I_3 = 4a\int \frac{t^2}{(t^2+1)^2}dt,$$

on passe maintenant à l'intégration par parties

$$\begin{cases} u(t) = t \\ v'(t) = \dfrac{t}{(t^2+1)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{t^2+1} \end{cases}$$

D'où

$$\begin{aligned}
I_3 &= 2a\left(-\frac{t}{t^2+1} + \int \frac{1}{t^2+1}dt\right) = 2a\left(-\frac{t}{t^2+1} + \arctan(t)\right) \\
&= 2a\left[-\frac{\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}}{\frac{a+x}{a-x}+1} + \arctan\left(\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\right)\right] + C.
\end{aligned}$$

4) Posons $\dfrac{1-x}{x} = t^2$

$$I_4 = \int x\sqrt{\frac{1-x}{x}}dx = -2\int \frac{t^2}{(t^2+1)^3}dt$$

et par l'intégration par parties

$$\int t\frac{2t}{(t^2+1)^3}dt = \frac{1}{2}\left(\int \frac{1}{(t^2+1)^2}dt - \frac{t}{(t^2+1)^2}\right)$$

de l'autre côté on a

$$\int \frac{1}{(t^2+1)^2}dt = \frac{1}{2}\left(\frac{t}{t^2+1} + \arctan(t)\right) + C,$$

donc

$$I_4 = \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{\frac{1-x}{x}}}{\frac{1-x}{x}+1} + \arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right)\right) - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{\frac{1-x}{x}}}{\left(\frac{1-x}{x}+1\right)^2} + C.$$

Exercice 1.8

1)

$$I_1 = \int \frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx,$$

on pose

$$t^2 = x-1 \Rightarrow 2t\,dt = dx,$$

alors

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx = 2\int \frac{1}{t^2+1}dt = 2\arctan(t) + C \\ &= 2\arctan\left(\sqrt{x-1}\right) + c. \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}}dx \\ &= \int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\sqrt{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}}dx = \arg\sinh\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C. \end{aligned}$$

3)

$$I_3 = \int \frac{1}{e^{2x}-2e^x}dx = \int \frac{1}{e^{2x}-2e^x}dx = \int \frac{1}{e^x(e^x-2)}dx,$$

on pose $e^x = t \Rightarrow dx = \frac{1}{t}dt$

$$\begin{aligned} I_3 &= -\frac{1}{4}\int \frac{1}{t}dt + \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2}dt + \frac{1}{4}\int \frac{1}{t+2}dt \\ &= -\frac{1}{4}\ln|t| - \frac{1}{2}\frac{1}{t} + \frac{1}{4}\ln|t+2| + C \\ &= -\frac{1}{4}\ln(e^x) - \frac{1}{2}\frac{1}{e^x} + \frac{1}{4}\ln(e^x+2) + C. \end{aligned}$$

4)

$$I_4 = \int \cos(\ln x)\,dx = \int e^t\cos(t)\,dt,$$

pour $t=\ln x \Rightarrow x=e^{t}dt$ et par l'intégration deux fois par parties, on trouve

$$I_4=\frac{1}{2}\left[\cos(t)+\sin(t)\right]+C=\frac{1}{2}\left[\cos(\ln x)+\sin(\ln x)\right]+C.$$

5) Pour $t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$, on a

$$\begin{aligned}
I_5 &= \int \frac{1}{1+\sin(x)+\cos(x)}dx=\int \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}dt\\
&= \int \frac{1}{t+1}dx=\ln|t+1|+C=\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1\right|+C.
\end{aligned}$$

6) Pour $t=\tan(x)$ et $dx=\dfrac{1}{1+t^2}dt$ on a

$$\begin{aligned}
I_6 &= \int \frac{1}{1+\tan(x)}dx=\int \frac{1}{(1+t)(1+t^2)}dt=\frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t}dt-\frac{1}{2}\int \frac{t-1}{1+t^2}dt\\
&= \frac{1}{2}\ln|1+t|-\frac{1}{4}\int \frac{2t}{1+t^2}dt+\frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t^2}dt=\frac{1}{2}\ln|1+t|-\frac{1}{4}\ln\left(1+t^2\right)\\
&\quad +\frac{1}{2}\arctan(t)+C\\
&= \frac{1}{2}\ln|1+\tan(x)|-\frac{1}{4}\ln\left[1+\tan^2(x)\right]+\frac{1}{2}x+C.
\end{aligned}$$

7)

$$I_7=\int \sin\left(\frac{x}{4}\right)\cos\left(\frac{3x}{4}\right)dx=\frac{1}{2}\left[\sin(x)+\sin\left(-\frac{x}{2}\right)\right].$$

8)

$$I_8=\int \sin(x)\sin(2x)\sin(3x)\,dx,$$

on a

$$\sin(x)\sin(2x)=\frac{1}{2}\left[\cos(x)-\cos(3x)\right],$$

alors

$$\begin{aligned}
I_8 &= \frac{1}{2}\int \left[\cos(x)-\cos(3x)\right]\sin(3x)\,dx\\
&= \frac{1}{2}\int \cos(x)\sin(3x)\,dx-\frac{1}{2}\int \sin(3x)\cos(3x)\,dx\\
&= \frac{1}{4}\left[\sin(4x)+\sin(2x)\right]-\frac{1}{4}\sin(6x)+C.
\end{aligned}$$

9)

$$\begin{aligned} I_9 &= \int \cos(x)\cos(2x)\cos(3x)\,dx = \frac{1}{2}\int [\cos(x)+\cos(3x)]\cos(3x)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int \cos(x)\cos(3x)\,dx + \frac{1}{2}\int \cos(3x)\cos(3x)\,dx \\ &= \frac{1}{4}[\cos(2x)+\cos(4x)] + \frac{1}{4}[1+\cos(6x)] + C. \end{aligned}$$

10)

$$I_{10} = \int \cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{3}\right)dx = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{x}{6}\right)+\cos\left(\frac{5x}{6}\right)\right] + C.$$

11)

$$I_{11} = \int \sin^2(x)\cos^2(x)\,dx, \tag{1.34}$$

on a

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2}[\cos(2x)+1] \quad \text{et} \quad \sin^2(x) = \frac{1}{2}[1-\cos(2x)],$$

on remplace dans (1.34), on trouve

$$\begin{aligned} I_{11} &= \frac{1}{4}\int [\cos(2x)+1][1-\cos(2x)]\,dx \\ &= \frac{1}{4}\int \left[1-\cos^2(2x)\right]dx = \frac{1}{4}\int \left[1-\frac{1}{2}(\cos(4x)+1)\right]dx \\ &= \frac{1}{8}\int dx - \frac{1}{8}\int \cos(4x)\,dx = \frac{1}{8}\left(x-\frac{1}{4}\sin(4x)\right) + C. \end{aligned}$$

12)

$$I_{12} = \int \frac{1}{\cosh^2(x)\sinh^2(x)}dx,$$

posons

$$t = \tanh\left(\frac{x}{2}\right), \sinh(x) = \frac{2t}{1-t^2}, \cosh(x) = \frac{1+t^2}{1-t^2}, dx = \frac{2}{1-t^2}dt,$$

alors

$$\begin{aligned} I_{12} &= \int \frac{1}{\left(\frac{1+t^2}{1-t^2}\right)^2\left(\frac{2t}{1-t^2}\right)^2}\frac{2}{1-t^2}dt = \frac{1}{2}\int \frac{\left(1-t^2\right)^4}{t^2(1+t^2)^2}\frac{1}{1-t^2}dt \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{\left(1-t^2\right)^3}{t^2(1+t^2)^2}dt = \frac{-1}{2}\int dt + \frac{1}{2}\int \frac{5t^4-2t^2+1}{t^2(1+t^2)^2}dt \\ &= \frac{-t}{2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2}dt + 2\int \frac{1}{1+t^2}dt - 4\int \frac{1}{(1+t^2)^2}dt \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{-t}{2}-\frac{1}{2t}+2\arctan(t)-2\left[\frac{t}{1+t^2}+\arctan(t)\right]+C \\
&= \frac{-\tanh\left(\frac{x}{2}\right)}{2}-\frac{1}{2\tanh\left(\frac{x}{2}\right)}+x-2\left[\frac{\tanh\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tanh^2\left(\frac{x}{2}\right)}+x\right]+C.
\end{aligned}
$$

13)

$$
\begin{aligned}
I_{13} &= \int \frac{\cosh^2(x)+\sinh^2(x)}{\cosh(x)\sinh(x)}dx = \int \frac{\left(\frac{1+t^2}{1-t^2}\right)^2+\left(\frac{2t}{1-t^2}\right)^2}{\frac{1+t^2}{1-t^2}\frac{2t}{1-t^2}}\frac{2}{1-t^2}dt \\
&= 4\int \frac{\left(1+t^2\right)^2+4t^2}{t(1+t^2)(1-t^2)}dt = \int \frac{1}{t}dt+\int \frac{2t}{1+t^2}dt-2\int \frac{-2t}{1-t^2}dt \\
&= \ln|t|+\ln\left(1+t^2\right)-2\ln\left|1-t^2\right|+C \\
&= \ln\left|\tanh\left(\frac{x}{2}\right)\right|+\ln\left(1+\tanh^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)-2\ln\left|1-\tanh^2\left(\frac{x}{2}\right)\right|+C.
\end{aligned}
$$

14)

$$
\begin{aligned}
I_{14} &= \int \frac{1}{2\sinh(x)+3\cosh(x)}dx = \int \frac{1}{2\frac{2t}{1-t^2}+3\frac{1+t^2}{1-t^2}}\frac{2}{1-t^2}dt \\
&= \int \frac{2}{4t+1+t^2}dt = \int \frac{2}{(t+2)^2}dt = \int \frac{2}{\left(t+2+\sqrt{3}\right)\left(t+2-\sqrt{3}\right)}dt \\
&= -\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{t+2+\sqrt{3}}dt+\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{t+2-\sqrt{3}}dt \\
&= -\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|t+2+\sqrt{3}\right|+\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|t+2-\sqrt{3}\right|+C \\
&= -\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\tanh\left(\frac{x}{2}\right)+2+\sqrt{3}\right|+\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\tanh\left(\frac{x}{2}\right)+2-\sqrt{3}\right|+C.
\end{aligned}
$$