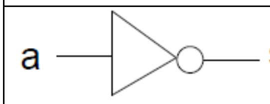
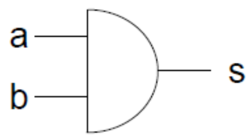
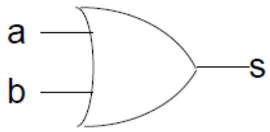
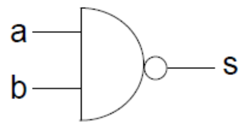
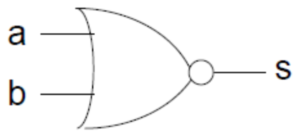
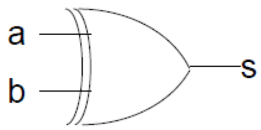
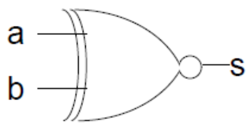
Chapitre I : Introduction à la conception des Circuits Logiques

1-définition :

Les circuits logiques sont caractérisés par des variables binaires, qui affectent des transitions entre deux états possibles, Ces deux états sont appelés niveau haut (vrai) et niveau bas (faux) ou niveau 1 et niveau 0.

Pour étudier d'une manière systématique ces variables binaires, on utilise une algèbre différente de l'algèbre classique, dite algèbre de Boole, du nom du mathématicien anglais, inventeur de concept (George Boole 1815-1864).

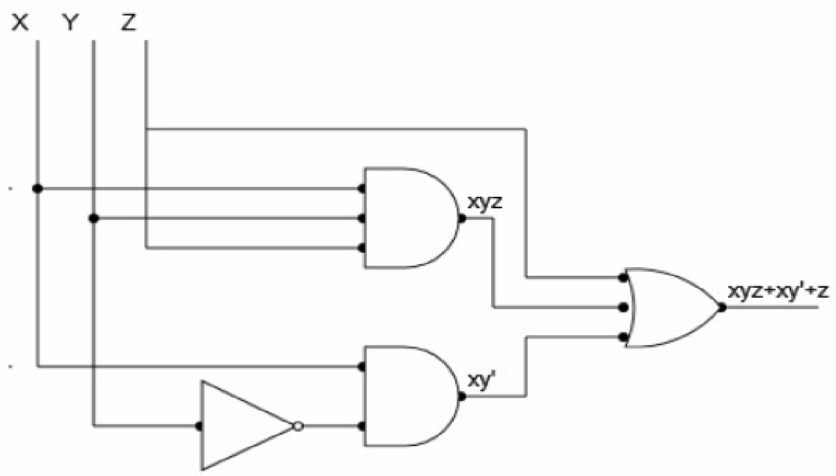
2- les opérateurs logiques de base :

opérateur	nom
	**NON - NOT** $s=\overline{a}$
	**ET – AND** $s=ab$
	**OU - OR** $s=a+b$
	**NONET – NAND** $s=\overline{a.b}$
	**NONOU - NOR** $s=\overline{a+b}$
	**OU exclusif - XOR** $s=a\oplus b=a\overline{b}+\overline{a}b$
	**NONOU exclusif - XNOR** $s=a\otimes b=\overline{a\oplus b}=ab+\overline{a}\overline{b}$

3- représentation des fonctions logiques :

Les différentes fonctions booliennes sont décrites sous plusieurs formes :

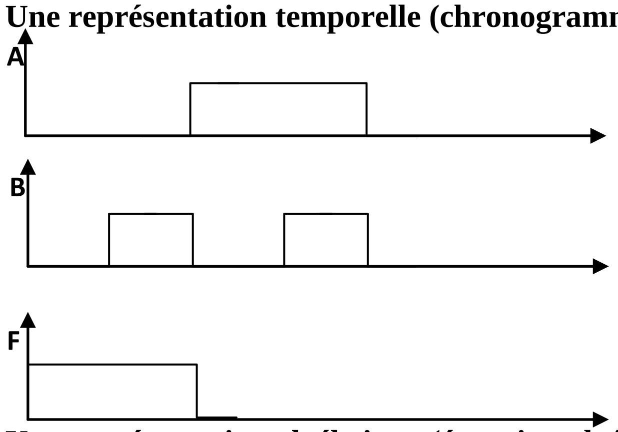
- **Une représentation logique (symbole logique= logigramme)**



- **Une représentation arithmétique (table de vérité)**

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

- **Une représentation temporelle (chronogramme)**



- **Une représentation algébrique (équation algébrique)**

$$F(A,B,C) = AB\overline{C} + \overline{A}C + ABC$$

4- propriétés de base de l'algèbre de Boole

$A + A = A$

$\overline{\overline{A}} = A$

$A.A = A$

$A.\overline{A} = 0$

$A + \overline{A} = 1$

$A.1 = A$

$A + 0 = A$

$A + 1 = 1$

$A.0 = 0$

$A.(B.C) = (A.B).C$

$A + (B + C) = (A + B) + C$

$A.(B + C) = (A.B) + (A.C)$

$A + (B.C) = (A + B)(A + C)$

$\overline{A + B} = \overline{A}.\overline{B}$

$\overline{A.B} = \overline{A} + \overline{B}$

5- table de vérité d'une fonction logique

Une table de vérité définit les relations entrées/sorties en faisant la liste de toutes les possibilités, une ligne à la fois dans la table. $F(A,B,C) = AB\overline{C} + \overline{A}C + ABC$

1ère méthode :

				1		2	3	1 + 2 + 3
A	**B**	**C**	$\overline{C}$	$AB\overline{C}$	$\overline{A}$	$\overline{A}C$	ABC	**F**
0	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**
0	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**
0	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**
0	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**
1	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
1	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
1	**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**
1	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**

2ème méthode :

$F(A,B,C) = AB\overline{C} + \overline{A}C + ABC$

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

6- les formes canoniques d'une fonction logique

Il existe deux formes canoniques pour chaque fonction booléenne.

- La première forme canonique conjonctive :
  FND: mintermes = somme des produits
- La deuxième forme canonique disjonctive :
  FNC : maxtermes = produits des sommes

Exemple :

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

$$F(A,B,C) = AB\overline{C} + \overline{A}C + ABC$$

$$F_{FND}(A,B,C) = \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}BC + AB\overline{C} + ABC$$

$$F_{FNC}(A,B,C) = (A+B+C)(A+\overline{B}+C)(\overline{A}+B+C)(\overline{A}+B+\overline{C})$$

2ème méthode pour la forme FND :

$$\begin{aligned} F(A,B,C) &= AB\overline{C} + \overline{A}C + ABC \\ &= AB\overline{C} + \overline{A}C(B+\overline{B}) + ABC \\ &= AB\overline{C} + \overline{A}BC + \overline{A}\,\overline{B}C + ABC \end{aligned}$$

7-simplification d'une fonction logique :

La simplification d'une fonction consiste à obtenir son expression la plus compacte possible afin de minimiser le nombre d'opérateurs logiques nécessaires à sa réalisation.

On distingue trois méthodes de simplification :

7.1. Simplification algébrique :

Les théorèmes de l'algèbre de Boole étudiés précédemment peuvent nous être utiles pour simplifier une expression logique.

Exemple :

$$
\begin{aligned}
F(A,B,C) &= AB\overline{C} + A\overline{B}C + ABC \\
&= AB(\overline{C} + C) + A\overline{B}C \\
&= AB + A\overline{B}C \\
&= A(B + \overline{B}C) \\
&= A((B + \overline{B})(B + C)) \\
&= AB + AC
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
G(A,B,C) &= \overline{A}\,\overline{B} + A\overline{B} + \overline{A}B \\
&= \overline{B}(\overline{A} + A) + \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}B \\
&= \overline{B} + \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}B \\
&= \overline{B} + \overline{A}(\overline{B} + B) \\
&= \overline{B} + \overline{A}
\end{aligned}
$$

7.2. Simplification par tableau de Karnaugh (Méthode graphique) :

Cette méthode repose sur l'utilisation des tableaux de Karnaugh.

a. Tableau de Karnaugh

C'est une table de vérité à deux dimensions. L'intersection d'une ligne avec une colonne constitue une case. Les variables sont divisées en deux groupes: des variables lignes et des variables colonnes. Le tableau est construit tel que deux cases adjacentes correspondent à deux combinaisons adjacentes. Voilà des exemples de tableaux de Karnaugh représentants 2, 3, 4 ou 5 variables logiques d'entrée:

Y \ X	0	1
0		
1		

Tableau à 2 variables

Z \ XY	00	01	11	10
0				
1				

Tableau à 3 variables

ZT \ XY	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

Tableau à 4 variables

On utilise obligatoirement le code Gray

TU \ XYZ	000	001	011	010	110	111	101	100
00								
01								
11								
10								

Tableau à 5 variables

b. Règles de regroupement

1. On ne regroupe que les points vrais de la fonction qui sont adjacents (contenant des 1).
2. On ne peut regrouper que 2k cases adjacentes (nombre pair).
3. Un point vrai peut être utilisé plusieurs fois dans des groupements différents.
4. On doit utiliser au moins une fois tout les points vrais de la fonction.
5. On doit rechercher les groupements les plus grands possible pour minimiser le nombre des variables.
6. Si une fonction est exprimée avec N variables, un regroupement de 2^k cases conduit à un terme produit simplifié de (N – k) variables. Les k variables éliminés sont celle qui ont varié dans le regroupement.
7. La fonction simplifiée est la réunion des différents regroupements.

c. Principe de simplification

- Réaliser des groupements de '1' adjacents, dans l'ordre, par 16, 8, 4 ,2 ou 1. Il faut toujours s'arranger à regrouper le maximum de '1' pour diminuer la taille des termes.
- Lorsqu'il ne reste plus de '1' isolé, les regroupements sont terminés.
- L'équation simplifiée est déduite de ces groupements
- Il et également possible et c'est parfois facile de regrouper les états 0 de la fonction F et de considérer que nous étudions F

Exemples :

C \ AB	00	01	11	10
0			1	
1	1	1	1	1

$$F(A,B,C) = C + AB$$

cde \ ab	00	01	11	10
000				1
001	1	1		1
011	1	1		
010	1	1		
110				
111				
101	1	1		
100	1	1		

$$F(a,b,c,d,e) = \bar{a}c\bar{d} + \bar{a}\,\bar{c}e + \bar{a}\,\bar{c}d + a\bar{b}\bar{c}\bar{d}$$

d \ abc	000	001	011	010	110	111	101	100
0	1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0

$$F(a,b,c,d) = \bar{b}\bar{d} + a\bar{d}$$

CD \ AB	00	01	11	10
00				1
01	1	1	1	1
11				
10		1		

$$F(A,B,C,D) = \bar{C}.D + A.\bar{B}.\bar{C} + \bar{A}.B.C.\bar{D}$$

ab \ cd	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	0	0	1
11	1	0	0	1
10	1	0	0	1

$$S_2 = \bar{d}$$

ab \ cd	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	1	0	0	1

$$S_3 = \bar{b}.\bar{d}$$

ab \ cd	00	01	11	10
00	0	1	1	1
01	0	0	1	1
11	0	0	1	1
10	0	1	1	1

$$S_4 = c + \bar{b}.d$$