EL - EXERCICES SUR LES FONCTIONS CIRCULAIRES RECIPROQUES ET HYPERBOLIQUES

Calculer les nombres suivants

$$a)\quad \arcsin\left(\sin\frac{18\pi}{5}\right) \qquad b)\quad \arccos\left(\sin\frac{18\pi}{5}\right)$$

$$c)\quad \arcsin\left(\sin\frac{15\pi}{7}\right) \qquad d)\quad \arcsin\left(\sin\frac{10\pi}{3}\right)$$

$$e)\quad \sin\left(\arcsin\frac{1}{3}\right) \qquad f)\quad \tan\left(\arctan\frac{\pi}{2}\right)$$

a) On sait que

$$\arcsin(\sin\theta) = \theta$$

si et seulement si θ appartient à l'intervalle $[-\pi/2,\, \pi/2]$. On cherche donc un angle θ dans cet intervalle, tel que

$$\sin\theta = \sin\frac{18\pi}{5}\,.$$

Or

$$\frac{18\pi}{5} = \frac{20\pi - 2\pi}{5} = 4\pi - \frac{2\pi}{5}\,.$$

Comme $-2\pi/5$ appartient à $[-\pi/2,\, \pi/2]$, on aura donc

$$\arcsin\left(\sin\frac{18\pi}{5}\right) = -\frac{2\pi}{5}\,.$$

b) On peut utiliser la formule

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}\,.$$

On a alors

$$\arccos\left(\sin\frac{18\pi}{5}\right) = \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\sin\frac{18\pi}{5}\right)\,,$$

et d'après a)

$$\arccos\left(\sin\frac{18\pi}{5}\right) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{9\pi}{10}\,.$$

On constate bien que ce résultat appartient à l'intervalle $[0,\, \pi]$.

c) On procède comme dans a)

$$\frac{15\pi}{7} = \frac{14\pi + \pi}{7} = 2\pi + \frac{\pi}{7}\,,$$

donc

$$\arcsin\left(\sin\frac{15\pi}{7}\right) = \frac{\pi}{7}\,.$$

d) On procède comme dans a)

$$\frac{10\pi}{3} = \frac{6\pi + 4\pi}{3} = 2\pi + \frac{4\pi}{3}\,.$$

Mais $4\pi/3$ n'appartient pas à $[-\pi/2,\, \pi/2]$. On utilise alors l'angle supplémentaire :

$$\sin\frac{4\pi}{3} = \sin\left(\pi - \frac{4\pi}{3}\right) = \sin\frac{-\pi}{3}\,,$$

et $-\pi/3$ appartient à $[-\pi/2,\, \pi/2]$, donc

$$\arcsin\left(\sin\frac{10\pi}{3}\right) = -\frac{\pi}{3}\,.$$

e) Le nombre $1/3$ étant compris entre -1 et 1, on a

$$\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}\,.$$

f) le nombre $\pi/2$ étant réel, on a

$$\tan\left(\arctan\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\,.$$

Calculer

a)	$\cos(\arctan x)$	*b)*	$\sin(\arctan x)$
c)	$\cos(\arcsin x)$	*d)*	$\sin(\arccos x)$
e)	$\tan(\arcsin x)$	*f)*	$\tan(\arccos x)$

a) On part de la relation

$$\tan(\arctan x) = x$$

vraie pour tout x réel.

On a tout d'abord

$$\cos^2(\arctan x) = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1 + x^2}\,,$$

mais $\arctan x$ appartient à $]-\pi/2,\, \pi/2[$, et donc $\cos(\arctan x)$ est positif. Alors

$$\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}\,.$$

b) On écrit

$$\sin(\arctan x) = (\cos(\arctan x))(\tan(\arctan x))\,,$$

et en utilisant a), on obtient

$$\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,.$$

c) On part de la relation

$$\sin(\arcsin x) = x$$

vraie pour tout x de l'intervalle $[-1,\,1]$.

On a tout d'abord

$$\cos^2(\arcsin x) = 1 - \sin^2(\arcsin x) = 1 - x^2\,,$$

mais $\arcsin x$ appartient à $[-\pi/2,\,\pi/2]$, et donc $\cos(\arcsin x)$ est positif. Alors

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}\,.$$

d) On part de la relation

$$\cos(\arccos x) = x$$

vraie pour tout x de l'intervalle $[0,\,\pi]$.

On a tout d'abord

$$\sin^2(\arccos x) = 1 - \cos^2(\arccos x) = 1 - x^2\,,$$

mais $\arccos x$ appartient à $[0,\,\pi]$, et donc $\sin(\arccos x)$ est positif. Alors

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}\,.$$

e) En utilisant c)

$$\tan(\arcsin x) = \frac{\sin(\arcsin x)}{\cos(\arcsin x)} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

f) En utilisant d)

$$\tan(\arccos x) = \frac{\sin(\arccos x)}{\cos(\arccos x)} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\,.$$

Résoudre les équations suivantes :

$$a)\quad \arctan(2x) + \arctan x = \frac{\pi}{4}$$

$$b)\quad \arcsin x + \arcsin(x\sqrt{3}) = \frac{\pi}{2}$$

$$c)\quad (\arcsin x - 5)\arcsin x = -4$$

EL 4

a) Remarquons tout d'abord qu'une solution de l'équation est nécessairement positive, car $\arctan x$ a le même signe que x. Transformons l'équation par implications successives.

$$\arctan(2x) + \arctan x = \frac{\pi}{4}$$

En prenant la tangente des deux membres, cela implique

$$\tan(\arctan(2x) + \arctan x) = 1\,,$$

d'où, en utilisant la formule donnant la tangente d'une somme

$$\frac{2x + x}{1 - 2x \cdot x} = 1\,.$$

Finalement, on obtient l'équation

$$2x^2 + 3x - 1 = 0\,,$$

qui possède une solution unique positive

$$x_0 = \frac{-3 + \sqrt{17}}{4}\,.$$

On peut seulement dire que si l'équation de départ possède une solution c'est x_0. Pour montrer que x_0 est effectivement solution de cette équation, on peut étudier les variations de la fonction f définie par

$$f(x) = \arctan(2x) + \arctan x - \frac{\pi}{4}\,.$$

Sa dérivée vaut

$$f'(x) = \frac{2}{1 + 4x^2} + \frac{1}{1 + x^2} > 0\,.$$

Donc f est une fonction strictement croissante. On a

$$f(0) = -\frac{\pi}{4} < 0\,,$$

et

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} > 0\,.$$

Le théorème des valeurs intermédiaires et la croissance stricte de f assurent alors que f s'annule une fois et une seule. Donc sa racine est x_0.

b) Transformons l'équation par implications successives.

$$\arcsin x + \arcsin(x\sqrt{3}) = \frac{\pi}{2}\,,$$

équivaut à

$$\arcsin(x\sqrt{3}) = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$$

En prenant le sinus des deux membres, cela implique

$$x\sqrt{3} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right) = \cos(\arcsin x)\,.$$

Alors en utilisant l'exercice précédent, on trouve

$$x\sqrt{3} = \sqrt{1-x^2}\,,$$

qui implique

$$4x^2 - 1 = 0\,.$$

Cette équation possède deux solutions $x_1 = 1/2$ et $x_2 = -1/2$.
Les solutions de l'équation de départ, si elles existent, sont dans l'ensemble $\{x_1\ x_2\}$. Cherchons lesquelles se ses solutions conviennent. On constate que

$$\arcsin\frac{1}{2} + \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}\,.$$

Donc x_1 convient. Par contre x_2 ne convient pas, car $\arcsin x$ et x étant de même signe le nombre $-1/2$ donne une valeur négative.

c) L'équation

$$(\arcsin x - 5)\arcsin x = -4\,,$$

équivaut au système

$$\begin{cases} U = \arcsin x \\ U^2 - 5U + 4 = 0 \end{cases}$$

L'équation du second degré a deux racines $U_1 = 1$ et $U_2 = 4$. Mais $\arcsin x$ étant compris entre $-\pi/2$ et $\pi/2$, l'équation $\arcsin x = 4$ n'a pas de solution. Par contre l'équation $\arcsin x = 1$ a une solution $x = \sin 1$, qui est la seule solution de l'équation initiale.

Montrer que l'on a la relation suivante, si et seulement si $ab < 1$:

$$\arctan a + \arctan b = \arctan\frac{a+b}{1-ab}\,.$$

Application : calculer

$$S = 2\arctan\frac{1}{4} + \arctan\frac{1}{7} + 2\arctan\frac{1}{13}\,.$$

Posons

$$A = \arctan a + \arctan b \quad \text{et} \quad B = \arctan\frac{a+b}{1-ab}\,.$$

On a alors, en appliquant la formule de la tangente d'une somme

$$\tan A = \frac{a+b}{1-ab}\,,$$

mais aussi
$$\tan B = \frac{a+b}{1-ab}\,.$$
Les nombres A et B ont donc la même tangente.

Par ailleurs B appartient à l'intervalle $\left]-\pi/2,\,\pi/2\right[$, et A appartient à l'intervalle $\left]-\pi,\,\pi\right[$. Alors A et B seront égaux si et seulement si $\cos A > 0$. Mais, en utilisant le deuxième exercice,
$$\cos A = \cos(\arctan a)\cos(\arctan b) - \sin(\arctan a)\sin(\arctan b) = \frac{1-ab}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}}\,,$$
et cette expression est positive si et seulement si $ab < 1$.

On peut appliquer en particulier la formule si $a = b$ lorsque $a^2 < 1$, ce qui donne
$$2\arctan a = \arctan\frac{2a}{1-a^2}\,.$$
Application : dans les calculs suivants, les nombres utilisés sont compris entre 0 et 1, donc la condition $ab < 1$ sera vérifiée. On obtient successivement
$$\arctan\frac{1}{4} + \arctan\frac{1}{13} = \arctan\frac{1}{3}$$
$$2\arctan\frac{1}{3} = \arctan\frac{3}{4}$$
$$\arctan\frac{3}{4} + \arctan\frac{1}{7} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}\,.$$
Finalement
$$S = \frac{\pi}{4}\,.$$

Etudier et représenter graphiquement la fonction f définie par
$$f(x) = \arctan\frac{2(1-x)}{2x-x^2}\,,$$
et exprimer $f(x)$ en fonction de $\arctan(x-1)$.

La fonction est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0,2\}$. On a également
$$f(2-x) = \arctan\frac{2(1-(2-x))}{2(2-x)-(2-x)^2} = \arctan\frac{2(x-1)}{2x-x^2}\,,$$
et comme la fonction arctangente est impaire, on a donc
$$f(2-x) = -f(x)\,.$$

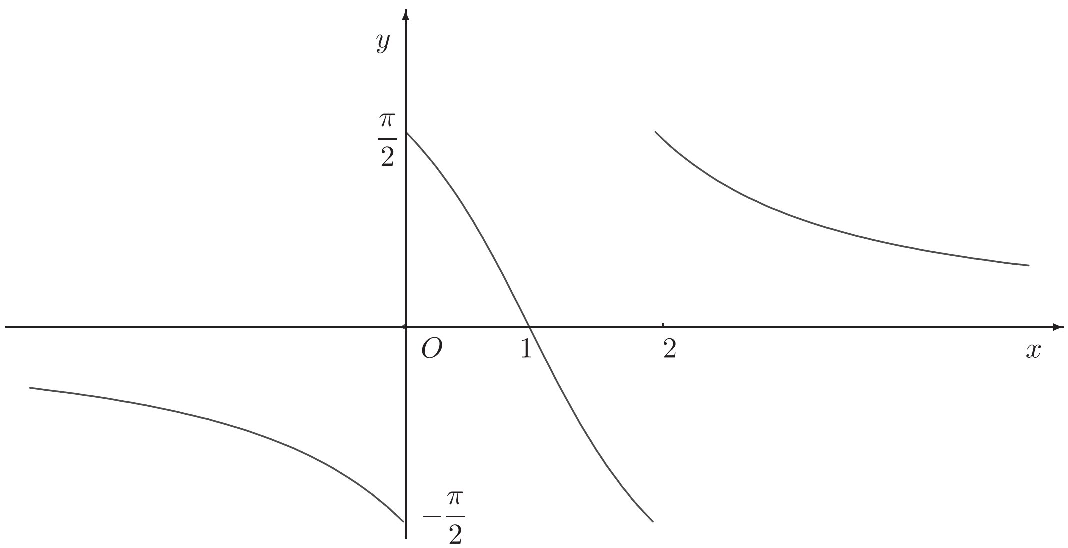
La courbe représentative est symétrique par rapport au point de coordonnées $(1, 0)$. Calculons la dérivée. On a

$$f'(x) = 2\frac{(2x-x^2)(-1)-(1-x)(2-2x)}{(2x-x^2)^2}\frac{1}{1+\left(\dfrac{2(1-x)}{2x-x^2}\right)^2} = -2\frac{x^2-2x+2}{(2x-x^2)^2+4(1-x)^2}\,.$$

La fonction f' est donc négative. On forme alors le tableau de variation suivant.

x	1		2		$+\infty$
y'	-2	$-$	-1	$-$	
y	0	$\searrow$	$-\frac{\pi}{2} \;\Vert\; \frac{\pi}{2}$	$\searrow$	0

On remarque que $f'(x)$ a pour limite -1 quand x tend vers 2. Cela donne pour la courbe des demi-tangentes à gauche et à droite du point de discontinuité. On a alors la courbe suivante.



EL 8

On peut simplifier la dérivée, en remarquant que

$$(2x - x^2)^2 + 4(1 - x)^2 = x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 8x + 4 = (x^2 - 2x + 2)^2 .$$

donc

$$f'(x) = \frac{-2}{x^2 - 2x + 2} = \frac{-2}{(x-1)^2 + 1} .$$

Alors, dans les trois intervalles où f est continue, elle est de la forme

$$f(x) = -2 \arctan(x - 1) + C ,$$

ou C est une constante qu'il reste à déterminer.

Tout d'abord, sur l'intervalle $]\,0,\, 2\,[$, puisque

$$f(1) = 0 = C ,$$

la constante est nulle et

$$f(x) = -2 \arctan(x - 1) .$$

Ensuite, sur l'intervalle $]\,2,\, +\infty\,[$, puisque

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 = -\pi + C ,$$

la constante vaut π et

$$f(x) = \pi - 2 \arctan(x - 1) .$$

Enfin, sur l'intervalle $]\,-\infty,\, 0\,[$, puisque

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 = \pi + C ,$$

la constante vaut $-\pi$ et

$$f(x) = -\pi - 2 \arctan(x - 1) .$$

Etudier et représenter graphiquement la fonction f définie par

$$f(x) = \arcsin(3x - 4x^3) ,$$

et exprimer $f(x)$ en fonction de $\arcsin x$.

La fonction est définie pour les valeurs de x telles que

$$-1 \leq 3x - 4x^3 \leq 1 ,$$

c'est-à-dire

$$1 - (3x - 4x^3)^2 \geq 0 .$$

Or

$$1-(3x-4x^3)^2=(1-3x+4x^3)(1+3x-4x^3)=(1-x^2)(4x^2-1)^2\ .$$

Cette expression est positive si et seulement si x appartient à l'intervalle $[-1,\,1]$ qui est donc le domaine de définition de f, et la fonction est continue sur ce domaine. De plus la fonction est impaire.

La fonction est dérivable si

$$-1<3x-4x^3<1,$$

donc, d'après le calcul précédent, sur $]-1,\,1[\setminus\{\pm 1/2\}$.

On a alors

$$f'(x)\quad=\quad\frac{3-12x^2}{\sqrt{1-(3x-4x^3)^2}}=\frac{3-12x^2}{|1-4x^2|\sqrt{1-x^2}}=\frac{1-4x^2}{|1-4x^2|}\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$$

donc

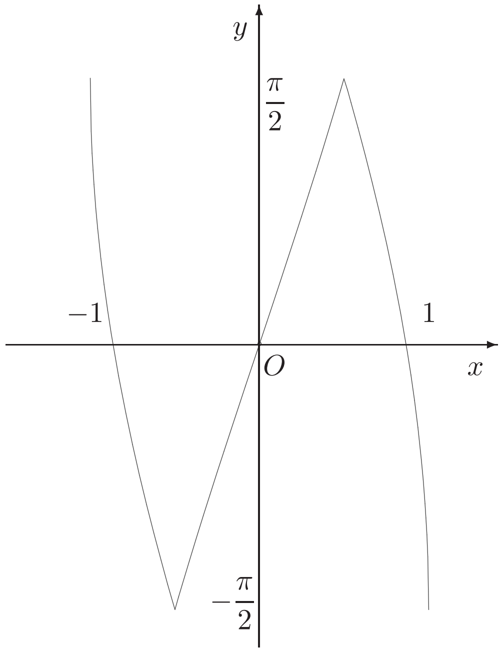
$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si } 1-4x^2>0\\ -\dfrac{3}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si } 1-4x^2<0\end{cases}$$

On en déduit le tableau de variation suivant.

x	0		$\frac{1}{2}$		1
y'	3	$+$	$2\sqrt{3}\ \Vert\ -2\sqrt{3}$	$-$	$-\infty$
y	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	$-\frac{\pi}{2}$

On remarquera qu'en $1/2$ la fonction n'est pas dérivable, mais la courbe admet des demi-tangentes à gauche et à droite. On a le graphe suivant.

EL 10



Sur l'intervalle $[\,-1/2,\ 1/2\,]$, on a

$$f(x) = 3\arcsin x + C\,,$$

mais

$$f(0) = 0 = C\,.$$

La constante est nulle et

$$f(x) = 3\arcsin x\,.$$

Ensuite, sur l'intervalle $[\,1/2,\ 1\,]$,

$$f(x) = -3\arcsin x + C\,,$$

mais

$$f(1) = -\frac{\pi}{2} = -3\frac{\pi}{2} + C\,,$$

la constante vaut π et

$$f(x) = \pi - 3\arcsin x\,.$$

Enfin, sur l'intervalle $[\,-1,\ -1/2\,]$,

$$f(x) = -3\arcsin x + C\,,$$

mais

$$f(-1) = \frac{\pi}{2} = 3\frac{\pi}{2} + C\,,$$

la constante vaut $-\pi$ et

$$f(x) = -\pi - 3\arcsin x\,.$$

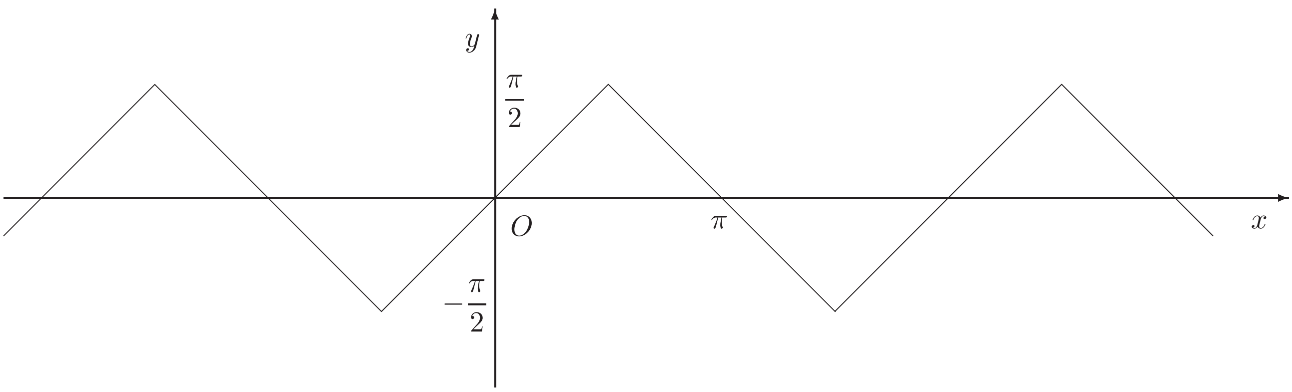
Etudier et représenter graphiquement les fonctions f et g définies par

$$f(x) = \arcsin(\sin x) \quad \text{et} \quad g(x) = \arctan(\tan x)\,.$$

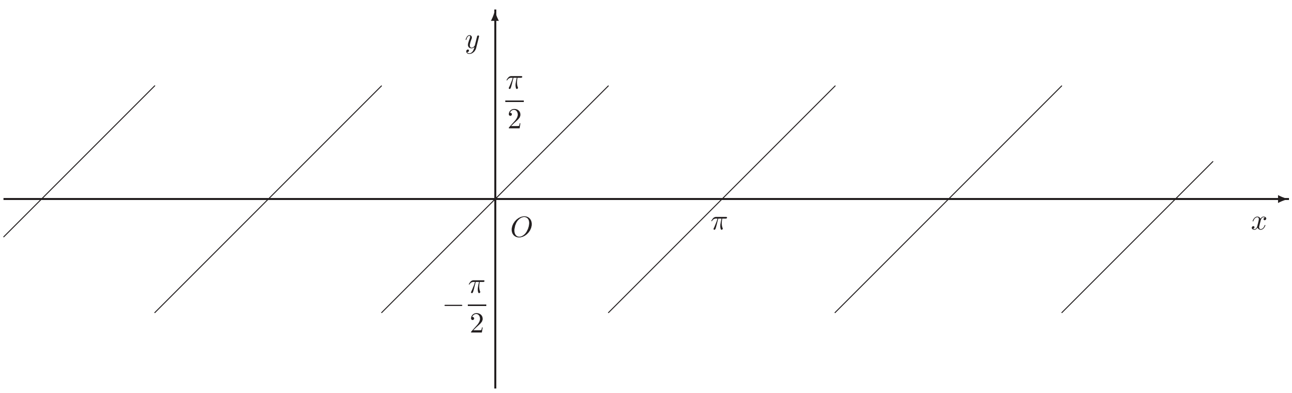
La fonction f est impaire et $2\pi-$périodique. De plus, quel que soit x réel

$$f(\pi - x) = f(x)\,.$$

Il suffit donc de l'étudier sur $[\,0,\,\pi/2\,]$ et d'effectuer une symétrie par rapport au point $(\pi/2, 0)$ puis une autre par rapport à l'origine et de compléter par périodicité. Comme sur l'intervalle $[\,0,\,\pi/2\,]$ on a $f(x) = x$, on trouve donc le graphe suivant.



La fonction g est impaire, non définie aux points $\pi/2 + k\pi$ où k est entier, et $\pi-$périodique. Il suffit donc de l'étudier sur $[\,0,\,\pi/2\,[$ et d'effectuer une symétrie par rapport à l'origine et de compléter par périodicité. Comme sur l'intervalle $[\,0,\,\pi/2\,[$ on a $g(x) = x$, on obtient donc le graphe suivant.



EL 12

Soit x réel. On pose $t = \arctan \operatorname{sh} x$.
Montrer que : $\tan t = \operatorname{sh} x$, $\sin t = \operatorname{th} x$, $\cos t = \dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$.

Si l'on a $t = \arctan \operatorname{sh} x$, on en déduit donc que

$$\tan t = \tan(\arctan \operatorname{sh} x) = \operatorname{sh} x\,.$$

On sait que $\operatorname{ch} x$ est positif. Par ailleurs t appartient à l'intervalle $\,]-\pi/2,\, \pi/2\,[$, donc $\cos t$ est positif. Mais

$$\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t = 1 + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch}^2 x\,,$$

on en déduit donc

$$\frac{1}{\cos t} = \operatorname{ch} x\,.$$

Alors

$$\sin t = \tan t \cos t = \operatorname{sh} x \frac{1}{\operatorname{ch} x} = \operatorname{th} x\,.$$

Montrer que si x est réel, on a $\operatorname{ch}\, ix = \cos x$ et $\operatorname{sh}\, ix = i\, \sin x$. Exprimer de même $\cos ix$ et $\sin ix$, en fonction de $\operatorname{ch} x$ et de $\operatorname{sh} x$, et indiquer comment l'on passe des formules trigonométriques usuelles aux formules de trigonométrie hyperbolique.
Ecrire par exemple : $\operatorname{ch}(x+y)$, $\operatorname{ch}\, 2x$ et $\operatorname{sh}\, 2x$.

On a, par définition du sinus et du cosinus hyperboliques,

$$\operatorname{ch} ix = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos x\,,$$

et

$$\operatorname{sh} ix = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2} = i \sin x\,.$$

De même

$$\cos ix = \frac{e^{i(ix)} + e^{-i(i(x)}}{2} = \operatorname{ch} x\,,$$

et

$$\sin ix = \frac{e^{i(ix)} - e^{-i(i(x)}}{2i} = -i\frac{e^{-x} - e^{x}}{2} = i \operatorname{sh} x\,.$$

On passe des formules de trigonométrie usuelle à celle de trigonométrie hyperbolique, en remplaçant cos par ch et sin par $i\,$sh. Donc chaque fois que l'on trouve un produit de deux sinus, le signe change.

Par exemple

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y\,,$$

donne
$$\mathrm{ch}(x+y) = \mathrm{ch}\, x\, \mathrm{ch}\, y + \mathrm{sh}\, x\, \mathrm{sh}\, y\,.$$
De même
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \quad \text{et} \quad \sin 2x = 2\sin x \cos x$$
donnent
$$\mathrm{ch}\, 2x = \mathrm{ch}^2\, x + \mathrm{sh}^2\, x \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}\, 2x = 2\,\mathrm{sh}\, x\, \mathrm{ch}\, x\,.$$

Montrer que si $x \leq -1$, on a
$$\mathrm{argch}(-x) = -\ln|x + \sqrt{x^2-1}|\,.$$

Posons $y = -x$. C'est un nombre supérieur à 1. On a alors
$$\mathrm{argch}\, y = \ln(y + \sqrt{y^2-1}) = \ln \frac{1}{y - \sqrt{y^2-1}} = -\ln(y - \sqrt{y^2-1})\,.$$
Mais
$$y - \sqrt{y^2-1} = -(x + \sqrt{x^2-1}) = |x + \sqrt{x^2-1}|\,,$$
et finalement
$$\mathrm{argch}(-x) = \ln|x + \sqrt{x^2-1}|\,.$$

Etudier et représenter graphiquement la fonction f définie par
$$f(x) = x + 2\ln(\mathrm{ch}\ x)\,.$$

La fonction est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier. Sa dérivée vaut
$$f'(x) = 1 + 2\frac{\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{ch}\, x} = \frac{3e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{3e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}\,.$$
Elle s'annule pour
$$x_0 = -\frac{1}{2}\ln 3\,,$$
et la courbe possède un minimum en ce point. Pour le calculer, on peut écrire
$$f(x) = x + 2\ln\left[e^{-x}\left(\frac{1+e^{2x}}{2}\right)\right] = -x - 2\ln 2 + 2\ln(1+e^{2x})\,,$$

et puisque $e^{2x_0} = 1/3$, on obtient

$$\alpha = f(x_0) = \frac{\ln 3}{2} + 2\ln\frac{4}{3} - 2\ln 2 = 2\ln 2 - \frac{3}{2}\,\ln 3\,.$$

On a alors le tableau de variation suivant.

x	$-\infty$		$-\dfrac{\ln 3}{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	α	$\nearrow$	$+\infty$

Lorsque x tend vers $+\infty$, on écrit

$$f(x) = x + 2\ln\left[e^x\left(\frac{1+e^{-2x}}{2}\right)\right] = 3x - 2\ln 2 + 2\ln(1+e^{-2x})\,,$$

et $\ln(1+e^{-2x})$ tend vers zéro. La courbe admet comme asymptote la droite d'équation

$$y = 3x - 2\ln 2\,,$$

et elle se trouve située au dessus de cette asymptote car $\ln(1+e^{-2x})$ est positif.

Lorsque x tend vers $-\infty$, on écrit

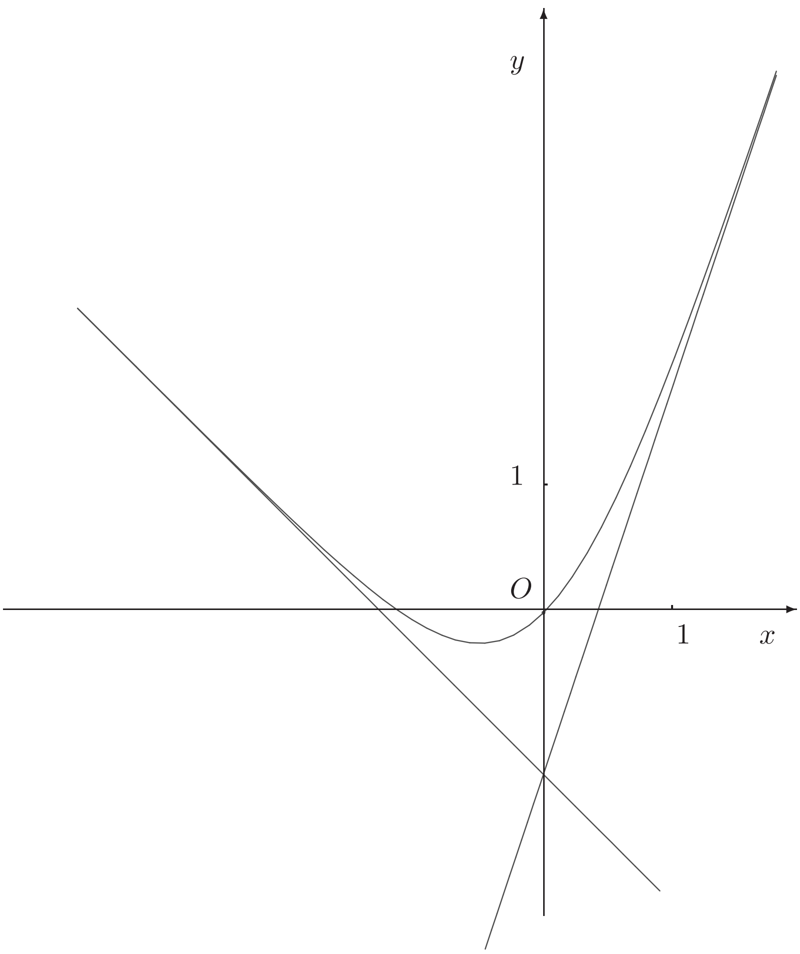
$$f(x) = x + 2\ln\left[e^{-x}\left(\frac{1+e^{2x}}{2}\right)\right] = -x - 2\ln 2 + 2\ln(1+e^{2x})\,,$$

et $\ln(1+e^{2x})$ tend vers zéro. La courbe admet comme asymptote la droite d'équation

$$y = -x - 2\ln 2\,,$$

et elle se trouve située au dessus de cette asymptote car $\ln(1+e^{2x})$ est positif.

On remarque de plus que la courbe passe par l'origine. On a le graphe suivant.



Calculer les limites suivantes

a) $2\,\mathrm{ch}\,^2 x - \mathrm{sh}\;2x\;(x \to +\infty)$ b) $e^{2x}(2\,\mathrm{ch}\,^2 x - \mathrm{sh}\;2x)\;(x \to -\infty)$

a) En écrivant la fonction à l'aide des exponentielles, on obtient

$$2\,\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}\,2x = 2\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = 1 + e^{-2x}\,,$$

et ceci tend vers 1 lorsque x tend vers $+\infty$.

b) Alors

$$e^{2x}(2\,\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}\,2x) = e^{2x} + 1\,,$$

et ceci tend vers 1 lorsque x tend vers $-\infty$.

EL 16

Etudier le domaine de définition de la fonction f définie par

$$f(x) = \operatorname{argch}\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right],$$

et simplifier son expression lorsqu'elle a un sens.

La fonction est définie si

$$\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right) \geq 1\,.$$

Cette inéquation s'écrit

$$x+\frac{1}{x} \geq 2\,,$$

ou encore

$$\frac{(x-1)^2}{x} \geq 0\,.$$

Le domaine de définition est donc $]\,0,\,+\infty\,[$. En utilisant l'expression de argch sous forme de logarithme,

$$\begin{aligned}
\operatorname{argch}\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right] &= \ln\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)+\sqrt{\frac{1}{4}\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-1}\right]\\
&= \ln\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)+\sqrt{\frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}\right]\\
&= \ln\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{2}\left|x-\frac{1}{x}\right|\right].
\end{aligned}$$

Si $x \geq 1$, le nombre $x - 1/x$ est positif ainsi que $\ln x$, et

$$\operatorname{argch}\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right] = \ln x = |\ln x|\,.$$

Si $0 < x \leq 1$, le nombre $x - 1/x$ est négatif ainsi que $\ln x$, et

$$\operatorname{argch}\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right] = \ln\frac{1}{x} = -\ln x = |\ln x|\,,$$

donc, pour tout $x > 0$

$$\operatorname{argch}\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right] = |\ln x|\,.$$