EXERCICES SUR LES DEVELOPPEMENTS LIMITES

CALCUL DE DEVELOPPEMENTS LIMITES

1. Calculer le développement limité en 0 des fonctions f définies ci-dessous.

$a)$	$f(x) = (1 + 2\arctan x)(2e^x - \sin x)$	ordre 3	$b)$	$f(x) = (x+1)(x-2)(x-3)$	ordre 2
$c)$	$f(x) = \dfrac{2 + \arctan x}{\operatorname{ch} x}$	ordre 4	$d)$	$f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$	ordre 3
$e)$	$f(x) = \dfrac{\ln(1+x^3)}{\tan x - x}$	ordre 3	$f)$	$f(x) = \sqrt{2 + \cos x}$	ordre 2
$g)$	$f(x) = e^{\sqrt{2+\cos x}}$	ordre 2	$h)$	$f(x) = (1+2x)^{1/x}$	ordre 2
$i)$	$f(x) = \ln \dfrac{\ln(1+x)}{x}$	ordre 2	$j)$	$f(x) = \sqrt[3]{1 + \sin x}$	ordre 3
$k)$	$f(x) = \cos(e^x)$	ordre 2	$l)$	$f(x) = \operatorname{argsh} \sqrt{1+x}$	ordre 2

2. Calculer le développement limité en 0 des fonctions f définies ci-dessous.

$a)$	$f(x) = (1 + \arctan x)(e^x + 2\sin x)$	ordre 3	$b)$	$f(x) = (x-1)(x-2)(x-4)$	ordre 2
$c)$	$f(x) = \dfrac{1 + \arctan x}{\cos x}$	ordre 4	$d)$	$f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$	ordre 5
$e)$	$f(x) = \dfrac{\ln(1+x^3)}{x - \sin x}$	ordre 3	$f)$	$f(x) = \sqrt{1 + 2\cos x}$	ordre 2
$g)$	$f(x) = e^{\sqrt{1+2\cos x}}$	ordre 2	$h)$	$f(x) = (1+x)^{1/x}$	ordre 2
$i)$	$f(x) = \ln \dfrac{\sin x}{x}$	ordre 4	$j)$	$f(x) = \sqrt[3]{1 + \ln(1+x)}$	ordre 3
$k)$	$f(x) = \cos(e^{\frac{x}{\cos x}})$	ordre 4	$l)$	$f(x) = \operatorname{argch} \sqrt{2+x}$	ordre 2

3. Calculer le développement limité en 0 des fonctions f définies ci-dessous.

$a)$	$f(x) = (\cos(x+x^2))^2$	ordre 3	$b)$	$f(x) = x(x-1)(x-2)$	ordre 2, puis 10
$c)$	$f(x) = e^x(1+x+x^2)$	ordre 2	$d)$	$f(x) = \sin^2 x$	ordre 5
$e)$	$f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$	ordre 3	$f)$	$f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{1+t}\,dt$	ordre 5
$g)$	$f(x) = \exp \dfrac{\sin x}{x}$	ordre 5	$h)$	$f(x) = \ln(\cos x + \sin x)$	ordre 2
$i)$	$f(x) = \left(\dfrac{1}{\cos x}\right)^{1/x^2}$	ordre 3	$j)$	$f(x) = \sqrt{1+\sqrt{1+x}}$	ordre 2
$k)$	$f(x) = \sqrt{2+x^2}$	ordre 5	$l)$	$f(x) = \operatorname{argch}\sqrt{2+x^2}$	ordre 5
$m)$	$f(x) = (1+2\cos(2x))(x-\ln(1+x))$	ordre 5	$n)$	$f(x) = \dfrac{2\sin x - \arctan x}{\ln(1+x)}$	ordre 2

4. Calculer le développement limité en 0 des fonctions f définies ci-dessous.

$a)$	$f(x) = \dfrac{e^{\operatorname{ch} x} - e^{\cos x}}{x^2}$	ordre 2	$b)$	$f(x) = (1+x)^{\frac{1}{\sin x}}$	ordre 3
$c)$	$f(x) = \dfrac{e^{e^x} - e^{e^{-x}}}{\ln(1+x)}$	ordre 2	$d)$	$f(x) = \dfrac{e^{\left(\frac{1}{\cos x}+\frac{x^2}{\sin x}\right)} - e}{\ln(1+x)}$	ordre 2
$e)$	$f(x) = \dfrac{\arctan x + \ln(1+x)}{\sin x}$	ordre 3			

5. En utilisant la formule de Taylor-Young, calculer le *d.l.* de $\arctan x$ à l'ordre 3 au voisinage de 1. Puis retrouver ce résultat à partir du *d.l.* de la dérivée d'$\arctan x$ au voisinage de 1 sans utiliser la formule de Taylor-Young .

6. Calculer le développement limité des fonctions f définies ci-dessous.

a)	$f(x) = \cos x$	à l'ordre 3	en $\pi/3$
b)	$f(x) = (x+1)(x+2)(x+3)$	à l'ordre 2	en -1
c)	$f(x) = \sin x$	à l'ordre 3	en $\pi/6$
d)	$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$	à l'ordre 2	en 1
e)	$f(x) = \ln x$	à l'ordre 2	en 3 puis en 4
f)	$f(x) = (\tan x)^{\tan(2x)}$	à l'ordre 3	en $\pi/4$.
g)	$f(x) = (x-4)(x+3)(x-1)(x^2+2)$	à l'ordre 2 puis 2000	en 1
h)	$f(x) = (1+\sin x)^x$	à l'ordre 2	en $\pi/2$
i)	$f(x) = \sqrt{2e - e^x}$	à l'ordre 2	en 1
j)	$f(x) = \sqrt[4]{2-\ln x}$	à l'ordre 2	en 1

7. Montrer que l'on a, près de 0,

$$\arcsin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4^k}\binom{2k}{k}\frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \circ(x^{2n+1})\,.$$

8. Déterminer le développement limité d'ordre 13 en 0 de $\arctan(1/x^2)$.

9. Montrer que, quel que soit $n > 0$, le développement limité d'ordre n en 0 de $\operatorname{th}(1/x^2)$ est

$$\operatorname{th}(1/x^2) = 1 + \circ(x^n)\,.$$

10. En la justifiant, donner la réponse aux questions suivantes :

a) La fonction $x \mapsto \ln x$ a-t-elle un développement limité en zéro ?

b) La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ a-t-elle un développement limité d'ordre 1 en zéro ?

c) La fonction $x \mapsto \sqrt{x^5}$ possède-t-elle un développement limité en zéro d'ordre 1 ? d'ordre 2 ? d'ordre 3 ?

d) La fonction $x \mapsto e^{-1/x^2}$ possède-t-elle un développement limité en zéro d'ordre n ?

11. Deux fonctions f et g définies près de 0 admettent les développements limités suivants :

$$f(x) = x^2 + 2x^3 + x^4 + \circ(x^4) \quad \text{et} \quad g(x) = -x^3 + 3x^4 + \circ(x^4)\,.$$

Déterminer, avec le plus grand ordre possible, un développement limité de $f \times g$, $\dfrac{g}{f}$ et $g \circ f$ en 0.

RECHERCHE D'EQUIVALENTS ET DE LIMITES AVEC LES DEVELOPPEMENTS LIMITES

12. Trouver un équivalent simple, lorsque x tend vers zéro des fonctions f définies ci-dessous.

a) $f(x) = x(2 - \cos x) - \arctan x$

b) $f(x) = e^{\cos x} + e^{\operatorname{ch} x} - 2e$

c) $f(x) = \sqrt{\tan x} - \sqrt[4]{x \sin x}$

d) $f(x) = 1 + \dfrac{\ln \operatorname{ch} x}{\ln \cos x}$

13. Trouver un équivalent simple, lorsque x tend vers zéro des fonctions f définies ci-dessous.

a) $f(x) = x(1 + \cos x) - 2\tan x$

b) $f(x) = e^{\cos x} - e^{\operatorname{ch} x}$

c) $f(x) = \sqrt{\sin x} - \sqrt[4]{x \tan x}$

d) $f(x) = 1 + \dfrac{\ln \cos x}{\ln \operatorname{ch} x}$

e) $f(x) = (2e\cos x - e^{x+1})^{\ln x}$

f) $f(x) = \dfrac{2 - \tan x}{1 + e^{-x}} - \dfrac{4}{4 + x^2}$

14. Calculer la limite en 0 des fonctions f définies ci-dessous.

$$a)\quad f(x) = \frac{\sin x - \arcsin x}{\sin^3 x} \qquad b)\quad f(x) = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\sin x}\right)^{1/x^2}$$

$$c)\quad f(x) = \frac{5^x - 3^x}{4^x - 2^x} \qquad d)\quad f(x) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1/x}$$

$$e)\quad f(x) = \operatorname{cotan}^2 x - \frac{1}{x^2} \qquad f)\quad f(x) = \frac{(\operatorname{ch} x)^{-1/x^2} - (\cos x)^{1/x^2}}{\operatorname{ch} x - \cos x}$$

15. Calculer la limite en 0 des fonctions f définies ci-dessous.

$$a)\quad f(x) = \frac{x - \arcsin x}{\sin^3 x} \qquad b)\quad f(x) = \left(\frac{\sin x}{\operatorname{sh} x}\right)^{1/x^2}$$

$$c)\quad f(x) = \frac{8^x - 4^x}{3^x - 2^x} \qquad d)\quad f(x) = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{1/x}$$

16. Calculer la limite en e des fonctions f définies ci-dessous.

$$a)\quad f(x) = \frac{x^e - e^x}{(x-e)^2} \qquad b)\quad f(x) = \frac{x^e - e^x}{1 - \cos(x-e)} \qquad c)\quad f(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{e}}{\ln x - 1}$$

17. Calculer la limite en 1 de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{(2x - x^3)^{1/3} - \sqrt{x}}{1 - x^{3/4}}\,.$$

18. Déterminer la limite en 0 des fonctions f définies ci-dessous.

$$a)\quad f(x) = \frac{\ln(\cos x\ \operatorname{ch} x)}{x^4} \qquad b)\quad f(x) = \frac{\operatorname{sh} x + \sin x - 2x}{x(\operatorname{ch} x + \cos x - 2)}$$

$$c)\quad f(x) = \frac{1}{x} - \frac{\ln(1+x)}{x^2} \qquad d)\quad f(x) = \frac{\sin x - x}{x \ln(1-x^2)}$$

$$e)\quad f(x) = \frac{\sin x - \tan x}{\operatorname{th} x - \tan x} \qquad f)\quad f(x) = \frac{(\sin x - x)\ln|x|}{|x|^{5/2}}$$

$$g)\quad f(x) = \frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x} \qquad h)\quad f(x) = \left(\frac{1}{\ln(1+x)}\right)^2 - \frac{e^x}{x^2}$$

$$i)\quad f(x) = \frac{(\arctan x)^2 - \tan x\ \sin x}{(1-\cos x)^2} \qquad j)\quad f(x) = (\cos x)^{1/x^2}$$

$$k)\quad f(x) = \frac{\sqrt{\sin x} - \sqrt{x}}{\sin\sqrt{x} - \sqrt{x}} \qquad l)\quad f(x) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{\cos(x+x^2)}{1+x+x^2} - e^{-x}\right)$$

19. Calculer la limite en 0 de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{e^{\sqrt{4+x}} + e^{\sqrt{4-x}} - 2e^2}{\tan^2 x}\,.$$

20. Calculer la limite en $\pi/2$ de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{3-\sin^2 x}}{\cos^2 x}\,.$$

21. Calculer les limites des suites dont le terme général est donné ci-dessous.

$$a)\quad u_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \quad (x \text{ réel})$$

$$b)\quad u_n = \left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n \quad (a, b \text{ réels positifs}).$$

ETUDE LOCALE DE FONCTIONS AVEC LES DEVELOPPEMENTS LIMITES

22. Etudier au voisinage de zéro, les fonctions f définies ci-dessous (tangente, position par rapport à la tangente, dessin).

$a)\quad f(x) = \dfrac{e^{-x}-1}{x}$ $\qquad b)\quad f(x) = \dfrac{3\ln(1+x)-\ln(1+x^3)}{3x}$

$c)\quad f(x) = \dfrac{1}{x}\left(e^x - \dfrac{6}{6-x^3}\right)$ $\qquad d)\quad f(x) = \dfrac{1}{x}\ln\dfrac{e^x-1}{x}$

23. Etudier au voisinage de 1, la fonction f définie par

$$f(x) = x + 2\sqrt{x} - \sqrt{3+x}\,.$$

(tangente, position par rapport à la tangente, dessin)

ETUDE A L'INFINI DE FONCTIONS AVEC LES DEVELOPPEMENTS LIMITES

24. Etudier à l'infini (asymptote à la courbe représentative, position par rapport à l'asymptote et dessin), les fonctions f définies ci-dessous.

$a)\quad f(x) = \sqrt{x(1+x)}\,e^{3/(2x)}$ $\qquad b)\quad f(x) = \sqrt{x(2+x)}\,e^{1/x}$

$c)\quad f(x) = x\sqrt{\dfrac{x-3}{x+1}}$ $\qquad d)\quad f(x) = x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

$e)\quad f(x) = \ln(e^{2x}-e^x+3e^{-3x}+e^{-x}+1)$ $\qquad f)\quad f(x) = \ln(e^{2x}-e^x+3e^{-3x}+1)$

$g)\quad f(x) = \dfrac{x^3+2x^2-x+1}{x^2-x+2}$

25. Etudier à l'infini (asymptote à la courbe représentative, position par rapport à l'asymptote), les fonctions f définies ci-dessous.

$a)\quad f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+x+1}$ $\qquad b)\quad f(x) = \dfrac{2x^3-3x^2+4x}{x^2-x+1}$

$c)\quad f(x) = (2x+1)\, e^{\frac{1}{x-1}}$ $\qquad d)\quad f(x) = x(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$

$e)\quad f(x) = x\left(\dfrac{\pi}{2} - \arctan x - \dfrac{3x^2}{1+3x^2}\right)$ $\qquad f)\quad f(x) = (x-1)\, e^{\frac{1}{x+1}}$

$g)\quad f(x) = \sqrt[3]{x^3+x^2+1}$

26. a) Ecrire le développement limité à l'ordre 2 en zéro de la fonction g définie par

$$g(u) = \ln \frac{\ln(1+2u)}{\ln(1+u)}\,.$$

(On justifiera le choix de l'ordre auquel on commence les calculs, et on détaillera les calculs intermédiaires).

b) En déduire le comportement à $+\infty$ de la fonction f définie par

$$f(x) = x \ln \frac{\ln(2+x)-\ln x}{\ln(1+x)-\ln x}\,.$$

(Equation de l'asymptote, position de la courbe par rapport à l'asymptote et dessin (on prendra $\ln 2 = 0,7$)).

27. a) Soit a et b deux réels. Donner le développement limité à l'ordre n en 0 de

$$g(x) = \ln \frac{1+ax}{1+bx}\,.$$

b) Soit f la fonction définie, lorsque cela a un sens, par

$$f(x) = (3x^2+6x-10) \ln \frac{x+4}{x+2}\,.$$

Montrer qu'elle admet un développement asymptotique lorsque x tend vers l'infini, de la forme

$$f(x) = \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{x^2} + \circ\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

où α, β et γ sont des réels non nuls.

En déduire le comportement de la courbe représentative de f à $+\infty$ et à $-\infty$. (Asymptote, position par rapport à l'asymptote et dessin).

28. Soit la fonction f définie par

$$f(x) = x\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}\,.$$

a) Montrer qu'au voisinage de l'infini, on a

$$f(x) = \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{x} + \circ\left(\frac{1}{x}\right)\,.$$

Interpréter géométriquement ce résultat en faisant le dessin correspondant.

b) Etudier et représenter graphiquement la fonction f. (On pourra prendre le nombre 2 comme valeur approchée de $\sqrt{5}$).

Corrigé

1. a) On part des *d.l.* de $\arctan x$, e^x et $\sin x$ à l'ordre 3 en zéro. On obtient

$$1 + 2\arctan x = 1 + 2x - \frac{2x^3}{3} + \circ(x^3)\,,$$

et

$$2e^x - \sin x = \left(2 + 2x + x^2 + \frac{x^3}{3}\right) - \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \circ(x^3) = 2 + x + x^2 + \frac{x^3}{2} + \circ(x^3)\,.$$

On effectue le produit en tronquant à l'ordre 3, ce qui donne

$$(1 + 2\arctan x)(2e^x - \sin x) = 2 + 5x + 3x^2 + \frac{7x^3}{6} + \circ(x^3)\,.$$

b) On développe et on tronque à l'ordre 2. On obtient

$$(x+1)(x-2)(x-3) = 6 + x - 4x^2 + x^3 = 6 + x - 4x^2 + \circ(x^2)\,.$$

c) Le dénominateur de la fraction ne s'annulant pas en zéro, on effectue la division suivant les puissances croissantes à l'ordre 4,

$$\begin{array}{rrrrr|rrrrr}
2 & +x & & -x^3/3 & & 1 & & +x^2/2 & & +x^4/24 \\ \cline{6-10}
-2 & & -x^2 & & -x^4/12 & 2 & +x & -x^2 & -5x^3/6 & +5x^4/12 \\ \cline{1-5}
 & x & -x^2 & -x^3/3 & -x^4/12 & & & & & \\
 & -x & & -x^3/2 & & & & & & \\ \cline{2-5}
 & & -x^2 & -5x^3/6 & -x^4/12 & & & & & \\
 & & x^2 & & +x^4/2 & & & & & \\ \cline{3-5}
 & & & -5x^3/6 & +5x^4/12 & & & & & \\
 & & & 5x^3/6 & & & & & & \\ \cline{4-5}
 & & & & +5x^4/12 & & & & & \\
 & & & & -5x^4/12 & & & & & \\ \cline{5-5}
 & & & & 0 & & & & &
\end{array}$$

ce qui donne

$$\frac{2 + \arctan x}{\operatorname{ch} x} = 2 + x - x^2 - \frac{5x^3}{6} + \frac{5x^4}{12} + \circ(x^4)\,.$$

d) Le premier terme non nul du *d.l.* du dénominateur étant de degré 1, on part de l'ordre 4. On obtient

$$e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \circ(x^4)\,,$$

et donc

$$\frac{x}{e^x - 1} = \frac{1}{1 + \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{6} + \dfrac{x^3}{24} + \circ(x^3)}\,.$$

On effectue la division suivant les puissances croissantes à l'ordre 3,

$$\begin{array}{rrrr|llll}
1 & & & & 1 & +x/2 & +x^2/6 & +x^3/24 \\ \cline{5-8}
-1 & -x/2 & -x^2/6 & -x^3/24 & 1 & -x/2 & +x^2/12 & \\ \cline{1-4}
 & -x/2 & -x^2/6 & -x^3/24 & & & & \\
 & x/2 & +x^2/4 & +x^3/12 & & & & \\ \cline{2-4}
 & & x^2/12 & +x^3/24 & & & & \\
 & & -x^2/12 & -x^3/24 & & & & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 & & & &
\end{array}$$

ce qui donne

$$\frac{x}{e^x-1} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + \circ(x^3)\,.$$

e) Le premier terme non nul du *d.l.* du dénominateur est de degré 3. On part donc de *d.l.* à l'ordre 6. On obtient

$$\tan x - x = \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \circ(x^6) \quad \text{et} \quad \ln(1+x^3) = x^3 - \frac{x^6}{2} + \circ(x^6)\,.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\frac{\ln(1+x^3)}{\tan x - x} &= \frac{x^3 - \dfrac{x^6}{2} + \circ(x^6)}{\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + \circ(x^6)} = \frac{1 - \dfrac{x^3}{2} + \circ(x^3)}{1 + \dfrac{2x^2}{5} + \circ(x^3)} \\
&= 3\left(1 - \frac{x^3}{2} + \circ(x^3)\right)\left(1 - \frac{2x^2}{5} + \circ(x^3)\right) \\
&= 3 - \frac{6x^2}{5} - \frac{3x^3}{2} + \circ(x^3)\,.
\end{aligned}$$

f) On a tout d'abord

$$2 + \cos x = 3 - \frac{x^2}{2} + \circ(x^2)\,,$$

donc

$$\sqrt{2+\cos x} = \sqrt{3 - \frac{x^2}{2} + \circ(x^2)} = \sqrt{3}\,\left(1 - \frac{x^2}{6} + \circ(x^2)\right)^{1/2}\,.$$

On utilise le *d.l.* de $(1+u)^m$ en zéro avec $m = 1/2$. On obtient

$$\sqrt{2+\cos x} = \sqrt{3}\left(1 - \frac{1}{2}\,\frac{x^2}{6} + \circ(x^2)\right) = \sqrt{3}\left(1 - \frac{x^2}{12} + \circ(x^2)\right)\,.$$

g) En utilisant l'exercice précédent

$$e^{\sqrt{2+\cos x}} = e^{\sqrt{3}\left(1-\frac{x^2}{12}+\circ(x^2)\right)} = e^{\sqrt{3}}\, e^{\left(-\frac{\sqrt{3}\,x^2}{12}+\circ(x^2)\right)}.$$

On utilise alors le *d.l.* de e^x en zéro, d'où

$$e^{\sqrt{2+\cos x}} = e^{\sqrt{3}}\left(1-\frac{\sqrt{3}\,x^2}{12}\right)+\circ(x^2)\,.$$

h) On écrit

$$(1+2x)^{1/x} = e^{\left(\frac{\ln(1+2x)}{x}\right)}.$$

Puisque l'on divise par x, on part d'un *d.l.* de $\ln(1+2x)$ à l'ordre 3. On obtient

$$\ln(1+2x) = 2x-2x^2+\frac{8x^3}{3}+\circ(x^3)\,,$$

puis

$$e^{\left(\frac{\ln(1+2x)}{x}\right)} = e^{\left(2-2x+\frac{8x^2}{3}+\circ(x^2)\right)} = e^2\, e^{\left(-2x+\frac{8x^2}{3}+\circ(x^2)\right)}.$$

On utilise alors le *d.l.* de e^x à l'ordre 2 en zéro.

$$e^{\left(\frac{\ln(1+2x)}{x}\right)} = e^2\left[1+\left(-2x+\frac{8x^2}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(-2x+\frac{8x^2}{3}\right)^2\right]+\circ(x^2) = e^2\left(1-2x+\frac{14x^2}{3}\right)+\circ(x^2)\,.$$

i) Puisque l'on divise par x, on part d'un *d.l.* de $\ln(1+x)$ à l'ordre 3. On obtient

$$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\circ(x^3)\,,$$

donc

$$\ln\frac{\ln(1+x)}{x} = \ln\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\circ(x^2)\right).$$

On utilise alors le *d.l.* à l'ordre 2 en zéro de $\ln(1+x)$ pour obtenir

$$\ln\frac{\ln(1+x)}{x} = \left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}\right)^2+\circ(x^2) = -\frac{x}{2}+\frac{5x^2}{24}+\circ(x^2)\,.$$

j) En partant du *d.l.* à l'ordre 3 en zéro de $\sin x$, on a donc

$$\sqrt[3]{1+\sin x} = \left(1+x-\frac{x^3}{6}+\circ(x^3)\right)^{1/3}.$$

On utilise le *d.l.* de $(1+u)^{1/3}$ à ł'ordre 3 en zéro qui s'écrit

$$(1+u)^{1/3} = 1+\frac{u}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\frac{u^2}{2}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)\frac{u^3}{6}+\circ(u^3) = 1+\frac{u}{3}-\frac{u^2}{9}+\frac{5u^3}{81}+\circ(u^3)\,.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{1+\sin x} &= 1+\frac{1}{3}\left(x-\frac{x^3}{6}\right)-\frac{1}{9}\left(x-\frac{x^3}{6}\right)^2+\frac{5}{81}\left(x-\frac{x^3}{6}\right)^3+\circ(x^3)\\
&= 1+\frac{1}{3}\left(x-\frac{x^3}{6}\right)-\frac{x^2}{9}+\frac{5x^3}{81}+\circ(x^3)\\
&= 1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}+\frac{x^3}{162}+\circ(x^3)\,.
\end{aligned}$$

k) On part du *d.l.* en zéro à l'ordre 2 de e^x qui s'écrit

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+\circ(x^2)\,.$$

Alors

$$\cos(e^x) = \cos\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\circ(x^2)\right)\,.$$

On en déduit

$$\cos(e^x) = \cos 1\,\cos\left(x+\frac{x^2}{2}+\circ(x^2)\right)-\sin 1\,\sin\left(x+\frac{x^2}{2}+\circ(x^2)\right)\,.$$

En utilisant le *d.l.* en zéro à l'ordre 2 du cosinus et du sinus, on a

$$\begin{aligned}
\cos(e^x) &= \cos 1\left(1-\frac{x^2}{2}+\circ(x^2)\right)-\sin 1\left(x+\frac{x^2}{2}+\circ(x^2)\right)\\
&= \cos 1 - x\sin 1-\frac{\cos 1+\sin 1}{2}\,x^2+\circ(x^2)\,.
\end{aligned}$$

l) On cherche un *d.l.* de la dérivée à l'ordre 1. On obtient

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}\,\frac{1}{\sqrt{2+x}} = \frac{1}{2}(2+3x+x^2)^{-1/2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(1+\frac{3x}{2}+\frac{x^2}{2}\right)^{-1/2}\,,$$

donc

$$f'(x) = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(1-\frac{3x}{4}+\circ(x)\right)\,.$$

Puis en calculant la primitive, qui vaut $\operatorname{argsh} 1 = \ln(1+\sqrt{2})$ en 0,

$$\operatorname{argsh}\sqrt{1+x} = \ln(1+\sqrt{2})+\frac{\sqrt{2}}{4}x-\frac{3\sqrt{2}}{32}x^2+\circ(x^2)\,.$$

2. a) On part des *d.l.* de $\arctan x$, e^x et $\sin x$ à l'ordre 3 en zéro. On obtient

$$1+\arctan x = 1 + x - \frac{x^3}{3} + \circ(x^3)\,,$$

et

$$e^x + 2\sin x = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) + 2\left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \circ(x^3) = 1 + 3x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \circ(x^3)\,.$$

On effectue le produit en tronquant à l'ordre 3, ce qui donne

$$(1+\arctan x)(e^x + 2\sin x) = 1 + 4x + \frac{7x^2}{2} + \circ(x^3)\,.$$

b) On développe et on tronque à l'ordre 2. On obtient

$$(x-1)(x-2)(x-4) = -8 + 14x - 7x^2 + x^3 = -8 + 14x - 7x^2 + \circ(x^2)\,.$$

c) Le dénominateur de la fraction ne s'annulant pas en zéro, on effectue la division suivant les puissances croissantes à l'ordre 4,

$$
\begin{array}{rrrrr|lllll}
1 & +x & & -x^3/3 & & 1 & & -x^2/2 & & +x^4/24 \\ \cline{6-10}
-1 & & +x^2/2 & & -x^4/24 & 1 & +x & +x^2/2 & +x^3/6 & +5x^4/24 \\ \cline{1-5}
 & x & +x^2/2 & -x^3/3 & -x^4/24 & & & & & \\
 & -x & & +x^3/2 & & & & & & \\ \cline{2-5}
 & & x^2/2 & +x^3/6 & -x^4/24 & & & & & \\
 & & -x^2/2 & & +x^4/4 & & & & & \\ \cline{3-5}
 & & & x^3/6 & +5x^4/24 & & & & & \\
 & & & -x^3/6 & & & & & & \\ \cline{4-5}
 & & & & +5x^4/24 & & & & & \\
 & & & & -5x^4/24 & & & & & \\ \cline{5-5}
 & & & & 0 & & & & &
\end{array}
$$

ce qui donne

$$\frac{1+\arctan x}{\cos x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{5x^4}{24} + \circ(x^4)\,.$$

d) Le premier terme non nul du *d.l.* du dénominateur étant de degré 1, on part de l'ordre 6. On obtient

$$e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + \circ(x^6)\,,$$

et donc

$$\frac{x}{e^x-1} = \frac{1}{1 + \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{6} + \dfrac{x^3}{24} + \dfrac{x^4}{120} + \dfrac{x^5}{720} + \circ(x^5)}\,.$$

On effectue la division suivant les puissances croissantes à l'ordre 5,

$$
\begin{array}{rrrrrr|rrrrrr}
1 & & & & & & 1 & +x/2 & +x^2/6 & +x^3/24 & +x^4/120 & +x^5/720 \\ \cline{7-12}
-1 & -x/2 & -x^2/6 & -x^3/24 & -x^4/120 & -x^5/720 & 1 & -x/2 & +x^2/12 & & -x^4/720 & \\ \cline{1-6}
 & -x/2 & -x^2/6 & -x^3/24 & -x^4/120 & -x^5/720 & & & & & & \\
 & x/2 & +x^2/4 & +x^3/12 & +x^4/48 & +x^5/240 & & & & & & \\ \cline{2-6}
 & & x^2/12 & +x^3/24 & +x^4/80 & +x^5/360 & & & & & & \\
 & & -x^2/12 & -x^3/24 & -x^4/72 & -x^5/288 & & & & & & \\ \cline{3-6}
 & & & & -x^4/720 & -x^5/1440 & & & & & & \\
 & & & & x^4/720 & +x^5/1440 & & & & & & \\ \cline{5-6}
 & & & & & 0 & & & & & &
\end{array}
$$

ce qui donne

$$\frac{x}{e^x-1} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{720}x^4 + \circ(x^5)\,.$$

e) Le premier terme non nul du *d.l.* du dénominateur est de degré 3. On part donc de *d.l.* à l'ordre 6. On obtient

$$x - \sin x = \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} + \circ(x^6) \quad \text{et} \quad \ln(1+x^3) = x^3 - \frac{x^6}{2} + \circ(x^6)\,.$$

Alors

$$
\begin{aligned}
\frac{\ln(1+x^3)}{x - \sin x} &= \frac{x^3 - \dfrac{x^6}{2} + \circ(x^6)}{\dfrac{x^3}{6} - \dfrac{x^5}{120} + \circ(x^6)} = 6\,\frac{1 - \dfrac{x^3}{2} + \circ(x^3)}{1 - \dfrac{x^2}{20} + \circ(x^3)} \\
&= 6\left(1 - \frac{x^3}{2} + \circ(x^3)\right)\left(1 + \frac{x^2}{20} + \circ(x^3)\right) \\
&= 6 + \frac{3x^2}{10} - 3x^3 + \circ(x^3)\,.
\end{aligned}
$$

f) On a tout d'abord

$$1 + 2\cos x = 3 - x^2 + \circ(x^2)\,,$$

donc

$$\sqrt{1+2\cos x} = \sqrt{3 - x^2 + \circ(x^2)} = \sqrt{3}\,\left(1 - \frac{x^2}{3} + \circ(x^2)\right)^{1/2}\,.$$

On utilise le *d.l.* de $(1+u)^m$ en zéro avec $m = 1/2$. On obtient

$$\sqrt{1+2\cos x} = \sqrt{3}\left(1 - \frac{1}{2}\,\frac{x^2}{3} + \circ(x^2)\right) = \sqrt{3}\left(1 - \frac{x^2}{6} + \circ(x^2)\right)\,.$$

g) En utilisant l'exercice précédent

$$e^{\sqrt{1+2\cos x}} = e^{\sqrt{3}\left(1 - \frac{x^2}{6} + \circ(x^2)\right)} = e^{\sqrt{3}}\,e^{\left(-\frac{\sqrt{3}\,x^2}{6} + \circ(x^2)\right)}\,.$$

On utilise alors le *d.l.* de e^x en zéro, d'où

$$e^{\sqrt{1+2\cos x}} = e^{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{\sqrt{3}\,x^2}{6}\right) + \circ(x^2)\,.$$

h) On écrit

$$(1+x)^{1/x} = e^{\dfrac{\ln(1+x)}{x}}\,.$$

Puisque l'on divise par x, on part d'un *d.l.* de $\ln(1+x)$ à l'ordre 3. On obtient

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \circ(x^3)\,,$$

puis

$$e^{\dfrac{\ln(1+x)}{x}} = e^{\left(1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3} + \circ(x^2)\right)} = e\, e^{\left(-\dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3} + \circ(x^2)\right)}\,.$$

On utilise alors le *d.l.* de e^x à l'ordre 2 en zéro.

$$e^{\dfrac{\ln(1+x)}{x}} = e\left[1 + \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3}\right)^2\right] + \circ(x^2) = e\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{11x^2}{24}\right) + \circ(x^2)\,.$$

i) Puisque l'on divise par x, on part d'un *d.l.* de $\sin x$ à l'ordre 5. On obtient

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \circ(x^5)\,,$$

donc

$$\ln\frac{\sin x}{x} = \ln\left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \circ(x^4)\right)\,.$$

On utilise alors le *d.l.* à l'ordre 4 en zéro de $\ln(1+x)$. (En tenant compte du fait que l'expression ne dépend que de x^2, l'ordre 2 suffira).

$$\ln\frac{\sin x}{x} = \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}\right)^2 + \circ(x^4) = -\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} + \circ(x^4)\,.$$

j) En partant du *d.l.* à l'ordre 3 en zéro de $\ln(1+x)$, on a donc

$$\sqrt[3]{1+\ln(1+x)} = \left(1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \circ(x^3)\right)^{1/3}\,.$$

On utilise le *d.l.* de $(1+u)^{1/3}$ à l'ordre 3 en zéro qui s'écrit

$$(1+u)^{1/3} = 1 + \frac{u}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - 1\right)\frac{u^2}{2} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - 1\right)\left(\frac{1}{3} - 2\right)\frac{u^3}{6} + \circ(u^3) = 1 + \frac{u}{3} - \frac{u^2}{9} + \frac{5u^3}{81} + \circ(u^3)\,.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{1+\ln(1+x)} &= 1+\frac{1}{3}\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)-\frac{1}{9}\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)^2+\frac{5}{81}\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)^3+\circ(x^3)\\
&= 1+\frac{1}{3}\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)-\frac{1}{9}(x^2-x^3)+\frac{5}{81}x^3+\circ(x^3)\\
&= 1+\frac{x}{3}-\frac{5x^2}{18}+\frac{23x^3}{81}+\circ(x^3)\,.
\end{aligned}$$

k) On part du *d.l.* en zéro à l'ordre 3 de $\cos x$ qui s'écrit

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+\circ(x^3)\,.$$

Donc

$$\frac{x}{\cos x}=\frac{x}{1-\dfrac{x^2}{2}+\circ(x^3)}=x\left(1+\frac{x^2}{2}+\circ(x^3)\right)=x+\frac{x^3}{2}+\circ(x^4)\,.$$

Alors

$$f(x)=e^{\left(\dfrac{x}{\cos x}\right)}=e^{\left(x+\dfrac{x^3}{2}+\circ(x^4)\right)}\,.$$

En utilisant le *d.l.* en zéro à l'ordre 4 de l'exponentielle, on a

$$\begin{aligned}
e^{\left(\dfrac{x}{\cos x}\right)} &= 1+\left(x+\frac{x^3}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(x+\frac{x^3}{2}\right)^2+\frac{1}{6}\left(x+\frac{x^3}{2}\right)^3+\frac{1}{24}\left(x+\frac{x^3}{2}\right)^4+\circ(x^4)\\
&= 1+x+\frac{x^3}{2}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\circ(x^4)\\
&= 1+u(x)\,,
\end{aligned}$$

où

$$u(x)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{2x^3}{3}+\frac{13x^4}{24}+\circ(x^4)\,.$$

Alors

$$\cos f(x)=\cos(1+u(x))=\cos 1\cos u(x)-\sin 1\sin u(x)\ .$$

Comme $u(0)=0$, on peut utiliser maintenant les *d.l.* de $\sin x$ et $\cos x$ à l'ordre 4 en zéro. On a donc

$$\begin{aligned}
\cos u(x) &= 1-\frac{1}{2}\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{2x^3}{3}+\frac{13x^4}{24}\right)^2+\frac{1}{24}\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{2x^3}{3}+\frac{13x^4}{24}\right)^4+\circ(x^4)\\
&= 1-\frac{1}{2}\left(x^2+x^3+\frac{x^4}{4}+\frac{4x^4}{3}\right)+\frac{x^4}{24}+\circ(x^4)\\
&= 1-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{2}-\frac{3x^4}{4}+\circ(x^4)\,,
\end{aligned}$$

ainsi que

$$\begin{aligned}\sin u(x) &= \left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{2x^3}{3}+\frac{13x^4}{24}\right)-\frac{1}{6}\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{2x^3}{3}+\frac{13x^4}{24}\right)^3+\circ(x^4)\\ &= x+\frac{x^2}{2}+\frac{2x^3}{3}+\frac{13x^4}{24}-\frac{1}{6}\left(x^3+\frac{3x^4}{2}\right)+\circ(x^4)\\ &= x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}+\frac{7x^4}{24}+\circ(x^4)\,.\end{aligned}$$

Alors, en remplaçant,

$$\cos(e^{\frac{x}{\cos x}}) = \cos 1 - x\sin 1 - \frac{\cos 1+\sin 1}{2}x^2 - \frac{\cos 1+\sin 1}{2}x^3 - \frac{18\cos 1+7\sin 1}{24}x^4+\circ(x^4)\,.$$

l) On cherche un *d.l.* de la dérivée à l'ordre 1. On obtient

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2+x}}\,\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{2}(2+3x+x^2)^{-1/2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(1+\frac{3x}{2}+\frac{x^2}{2}\right)^{-1/2}\,,$$

donc

$$f'(x) = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(1-\frac{3x}{4}+\circ(x)\right)\,.$$

Puis en calculant la primitive, qui vaut $\operatorname{argch}\sqrt{2} = \ln(1+\sqrt{2})$ en 0,

$$\operatorname{argch}\sqrt{2+x} = \ln(1+\sqrt{2})+\frac{\sqrt{2}}{4}x-\frac{3\sqrt{2}}{32}x^2+\circ(x^2)\,.$$

3. a) On part du *d.l.* à l'ordre 3 en 0 de $\cos x$, c'est-à-dire

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+\circ(x^3)\,.$$

Donc, en remplaçant x par $x+x^2$ et en tronquant à l'ordre 2,

$$\begin{aligned}\cos(x+x^2) &= 1-\frac{(x+x^2)^2}{2}+\circ(x^3)\\ &= 1-\frac{1}{2}(x^2+2x^3)+\circ(x^3)\\ &= 1-\frac{x^2}{2}-x^3+\circ(x^3)\,.\end{aligned}$$

Alors, en élevant au carré et en tronquant à l'ordre 2, on obtient

$$\begin{aligned}(\cos(x+x^2))^2 &= \left(1-\frac{x^2}{2}-x^3+\circ(x^3)\right)^2\\ &= 1-x^2-2x^3+\circ(x^3)\,.\end{aligned}$$

b) On effectue le produit en tronquant à l'ordre voulu, donc

$$x(x-1)(x-2) = 2x - 3x^2 + \circ(x^2) = 2x - 3x^2 + x^3 + \circ(x^{10})\,.$$

c) On effectue le produit en tronquant à l'ordre 2, et on obtient

$$\begin{aligned} e^x(1+x+x^2) &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \circ(x^2)\right)(1+x+x^2) \\ &= 1 + 2x + \frac{5}{2}x^2 + \circ(x^2)\,. \end{aligned}$$

d) On peut partir de la relation

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}\,.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= \frac{1}{2}\left(1 - \left(1 - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^4}{24} + \circ(x^5)\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(2x^2 - \frac{2x^4}{3} + \circ(x^5)\right) \\ &= x^2 - \frac{x^4}{3} + \circ(x^5)\,. \end{aligned}$$

e) On effectue le produit en tronquant à l'ordre 3. On obtient

$$\begin{aligned} \frac{\ln(1+x)}{1+x} &= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \circ(x^3)\right)(1 - x + x^2 - x^3 + \circ(x^3)) \\ &= x - \frac{3x^2}{2} + \frac{11x^3}{6} + \circ(x^3)\,. \end{aligned}$$

f) On effectue le produit en tronquant à l'ordre 4. On obtient

$$\begin{aligned} \frac{\sin t}{1+t} &= \left(t - \frac{t^3}{6} + \circ(t^4)\right)(1 - t + t^2 - t^3 + t^4 + \circ(t^4)) \\ &= t - t^2 + \frac{5t^3}{6} - \frac{5t^4}{6} + \circ(t^4)\,. \end{aligned}$$

Puis en calculant la primitive nulle en zéro,

$$\int_0^x \frac{\sin t}{1+t}\,dt = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{5x^4}{24} - \frac{x^5}{6} + \circ(x^5)\,.$$

g) On part du *d.l.* de $\sin x$ à l'ordre 6. La division par x ramène à l'ordre 5. On obtient

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \circ(x^5)\,.$$

Alors

$$\exp\frac{\sin x}{x} = e\,\exp\left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \circ(x^5)\right)\,.$$

En remplaçant dans le *d.l.* à l'ordre 5 de l'exponentielle (en fait l'ordre 2 suffit car les termes suivants donnent en composant des degrés supérieurs à 6) et en tronquant à l'ordre 5. On trouve

$$\begin{aligned}
\exp\frac{\sin x}{x} &= e\left(1 + \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}\right)^2\right) + \circ(x^5)\\
&= e\left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \frac{1}{2}\frac{x^4}{36}\right) + \circ(x^5)\\
&= e\left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{45}\right) + \circ(x^5)\,.
\end{aligned}$$

h) On a tout d'abord

$$\sin x + \cos x = 1 + x - \frac{x^2}{2} + \circ(x^2)\,,$$

puis en remplaçant dans le *d.l.* à l'ordre 2 de $\ln(1+x)$ et en tronquant à l'ordre 2,

$$\begin{aligned}
\ln(\sin x + \cos x) &= \ln\left(1 + \left(x - \frac{x^2}{2} + \circ(x^2)\right)\right)\\
&= x - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^2}{2}\right)^2 + \circ(x^2)\\
&= x - x^2 + \circ(x^2)\,.
\end{aligned}$$

i) On écrit

$$\left(\frac{1}{\cos x}\right)^{1/x^2} = \exp\left(-\frac{\ln\cos x}{x^2}\right)\,.$$

En raison de la division par x^2, on part d'un *d.l.* à l'ordre 5 de $\cos x$, c'est-à-dire

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \circ(x^5)\,.$$

Alors

$$\ln\cos x = \ln\left(1 + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \circ(x^5)\right)\right)\,.$$

On utilise un *d.l.* à l'ordre 5 de $\ln(1+x)$ (en fait l'ordre 2 suffit quand on compose).

$$\begin{aligned}
\ln\cos x &= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2 + \circ(x^5)\\
&= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{2}\frac{x^4}{4} + \circ(x^5)\\
&= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + \circ(x^5)\,.
\end{aligned}$$

Alors
$$-\frac{\ln\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} + \frac{x^2}{12} + \circ(x^3)\,,$$
donc
$$\exp\left(-\frac{\ln\cos x}{x^2}\right) = e^{1/2}\,\exp\left(\frac{x^2}{12} + \circ(x^3)\right)\,,$$
et en utilisant le *d.l.* à l'ordre 3 de e^x (en fait l'ordre 1 suffit en composant),
$$\left(\frac{1}{\cos x}\right)^{1/x^2} = \sqrt{e}\left(1 + \frac{x^2}{12}\right) + \circ(x^3)\,.$$

j) On part du *d.l.* à l'ordre 2 de $\sqrt{1+x}$. On a
$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \circ(x^2)\,,$$
donc
$$\sqrt{1+\sqrt{1+x}} = \left(2 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \circ(x^2)\right)^{1/2}\,.$$
En mettant $\sqrt{2}$ en facteur, on a
$$\sqrt{1+\sqrt{1+x}} = \sqrt{2}\,\left(1 + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{16} + \circ(x^2)\right)^{1/2}\,.$$
On utilise de nouveau le *d.l.* à l'ordre 2 de $\sqrt{1+x}$
$$\begin{aligned}
\sqrt{1+\sqrt{1+x}} &= \sqrt{2}\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{4} - \frac{x^2}{16}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{x}{4} - \frac{x^2}{16}\right)^2 + \circ(x^2)\right)\\
&= \sqrt{2}\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{4} - \frac{x^2}{16}\right) - \frac{1}{8}\,\frac{x^2}{16} + \circ(x^2)\right)\\
&= \sqrt{2}\left(1 + \frac{x}{8} - \frac{5x^2}{128}\right) + \circ(x^2)\,.
\end{aligned}$$

k) On écrit
$$\sqrt{2+x^2} = \sqrt{2}\left(1 + \frac{x^2}{2}\right)^{1/2}\,,$$
et l'on a
$$\begin{aligned}
\sqrt{2+x^2} &= \sqrt{2}\left(1 + \frac{x^2}{4} - \frac{1}{8}\left(\frac{x^2}{2}\right)^2 + \circ(x^5)\right)\\
&= \sqrt{2}\left(1 + \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{32}\right) + \circ(x^5)\,.
\end{aligned}$$

l) On cherche un *d.l.* à l'ordre 4 de la dérivée

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \frac{x}{\sqrt{2+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{2}}(1+x^2)^{-1/2}\left(1+\frac{x^2}{2}\right)^{-1/2}.$$

Compte tenu de la multiplication par x, il suffit de partir de *d.l.* à l'ordre 3 des deux racines, ce qui donne

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{x^2}{2}+\circ(x^3)\right)\left(1-\frac{x^2}{4}+\circ(x^3)\right) \\ &= \frac{x}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{3x^2}{4}+\circ(x^3)\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{3x^3}{4}+\circ(x^4)\right). \end{aligned}$$

Puis en calculant la primitive, qui vaut $\operatorname{argch}\sqrt{2} = \ln(1+\sqrt{2})$ en 0,

$$\operatorname{argch}\sqrt{2+x^2} = \ln(1+\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{4}x^2 - \frac{3\sqrt{2}}{32}x^4 + \circ(x^5).$$

m) On part du *d.l.* à l'ordre 5 de $\ln(1+x)$, ce qui donne

$$x - \ln(1+x) = x - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}\right) + \circ(x^5).$$

Le premier terme non nul du *d.l.* de $x-\ln(1+x)$ est de degré 2. On peut donc mettre x^2 en facteur.

$$x-\ln(1+x) = x^2\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{3}+\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{5}+\circ(x^3)\right) = x^2 g(x).$$

Il suffira donc du *d.l.* de $1+2\cos 2x$ à l'ordre 3. Tout d'abord

$$\cos u = 1 - \frac{u^2}{2} + \circ(u^3),$$

donc, en posant $u = 2x$,

$$\cos 2x = 1 - 2x^2 + \circ(x^3),$$

d'où

$$1 + 2\cos 2x = 3 - 4x^2 + \circ(x^3).$$

On effectue, en le tronquant à l'ordre 3, le produit $g(x)(1+2\cos 2x)$, ce qui donne

$$g(x)(1+2\cos 2x) = \left(3-4x^2+\circ(x^3)\right)\left(\frac{1}{2}+-\frac{x}{3}+\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{5}+\circ(x^3)\right),$$

et l'on obtient

$$g(x)(1+2\cos 2x) = \frac{3}{2} - x - \frac{5x^2}{4} + \frac{11x^3}{15} + \circ(x^3).$$

Alors

$$(1+2\cos 2x)(x-\ln(1+x)) = x^2\left(\frac{3}{2}-x-\frac{5x^2}{4}+\frac{11x^3}{15}+\circ(x^3)\right) = \frac{3x^2}{2}-x^3-\frac{5x^4}{4}+\frac{11x^5}{15}+\circ(x^5).$$

n) On a au dénominateur $\ln(1+x) = x + \circ(x)$, donc pour obtenir un développement limité d'ordre 2, on part de l'ordre 3. On a

$$2\sin x - \arctan x = 2\left(x - \frac{x^3}{6}\right) - \left(x - \frac{x^3}{3}\right) + \circ(x^3) = x + \circ(x^3)\,,$$

d'où

$$f(x) = \frac{x + \circ(x^3)}{x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \circ(x^3)} = \frac{1 + \circ(x^2)}{1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3} + \circ(x^2)}\,.$$

On a alors

$$f(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{3}\right)^2 + \circ(x^2) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{4} + \circ(x^2)\,,$$

d'où finalement

$$\frac{2\sin x - \arctan x}{\ln(1+x)} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} + \circ(x^2)\,.$$

4. a) En raison de la division par x^2, on commence avec des développements limités à l'ordre 4. On obtient

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \circ(x^4) \quad \text{et} \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \circ(x^4)\,,$$

donc

$$e^{\operatorname{ch} x} = e^{\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \circ(x^4)\right)} = e\, e^{\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \circ(x^4)\right)}\,.$$

Comme $\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \circ(x^4)$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0, on peut utiliser le développement limité de l'exponentielle en 0, *a priori* à l'ordre 4, mais en fait l'ordre 2 suffit. On obtient

$$\begin{aligned}
e^{\operatorname{ch} x} &= e\left(1 + \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2 + \circ(x^4)\right)\\
&= e\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^2}{8} + \circ(x^4)\right)\\
&= e\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + \circ(x^4)\right)\,.
\end{aligned}$$

De la même manière (seul le signe des coefficients de x^2 change),

$$e^{\cos x} = e\, e^{\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \circ(x^4)\right)}\,,$$

puis

$$e^{\cos x} = e\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + \circ(x^4)\right)\,.$$

Alors
$$e^{\operatorname{ch} x} - e^{\cos x} = e\,x^2 + \circ(x^4)\,,$$
et finalement
$$\frac{e^{\operatorname{ch} x} - e^{\cos x}}{x^2} = e + \circ(x^2)\,.$$

b) On écrit
$$f(x) = e^{\left(\dfrac{\ln(1+x)}{\sin x}\right)}\,,$$
et l'on cherche le *d.l.* à l'ordre 3 en zéro de
$$g(x) = \frac{\ln(1+x)}{\sin x}\,.$$
Comme le dénominateur $\sin x = x + \circ(x)$, a une partie principale de degré 1, on commence les calculs à l'ordre 4. On a donc
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \circ(x^4) \quad \text{et} \quad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + \circ(x^4)\,,$$
d'où
$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \circ(x^4)}{x - \dfrac{x^3}{6} + \circ(x^4)} = \frac{1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{x^3}{4} + \circ(x^3)}{1 - \dfrac{x^2}{6} + \circ(x^3)} \\
&= \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4}\right)\left(1 + \frac{x^2}{6}\right) + \circ(x^3) \\
&= 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \circ(x^3)\,.
\end{aligned}$$
Alors
$$f(x) = e^{\left(1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} + \circ(x^2)\right)} = e\,e^{\left(-\dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} + \circ(x^3)\right)}\,,$$
et, en utilisant le *d.l.* à l'ordre 3 en zéro de l'exponentielle,
$$\begin{aligned}
f(x) &= e\left(1 + \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)^3\right) + \circ(x^3) \\
&= e\left(1 + \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}\,\frac{x^3}{8}\right) + \circ(x^3)\,,
\end{aligned}$$
d'où,
$$(1+x)^{\frac{1}{\sin x}} = e\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{5x^2}{8} - \frac{29x^3}{48}\right) + \circ(x^3)\,.$$

c) On a au dénominateur $\ln(1+x) = x + \circ(x)$. On commencera donc le calcul à l'ordre 3. On a

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \circ(x^3)\,,$$

donc

$$\begin{aligned}
e^{e^x} &= e^{\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\circ(x^3)\right)} = e\,e^{\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\circ(x^3)\right)}\\
&= e\left(1+\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right)+\frac{1}{2}\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right)^2+\frac{1}{6}\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right)^3+\circ(x^3)\right)\\
&= e\left(1+\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right)+\frac{1}{2}(x^2+x^3)+\frac{x^3}{6}\right)+\circ(x^3)\\
&= e\left(1+x+x^2+\frac{5x^3}{6}\right)+\circ(x^3)\,.
\end{aligned}$$

En changeant alors x en $-x$ dans la formule précédente, on obtient

$$e^{e^{-x}} = e\left(1 - x + x^2 - \frac{5x^3}{6}\right) + \circ(x^3)\,,$$

donc

$$e^{e^x} - e^{e^{-x}} = e\left(2x + \frac{5x^3}{3}\right) + \circ(x^3)\,.$$

On aura alors

$$f(x) = \frac{e\left(2x+\frac{5x^3}{3}\right)+\circ(x^3)}{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\circ(x^3)} = \frac{e\left(2+\frac{5x^2}{3}\right)+\circ(x^2)}{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\circ(x^2)}\,.$$

On effectue la division suivant les puissances croissantes,

$$\begin{array}{rrr|lll}
2 & & +5x^2/3 & 1 & -x/2 & +x^2/3\\ \cline{4-6}
-2 & +x & -2x^2/3 & 2 & +x & +3x^2/2\\ \cline{1-3}
 & x & +x^2 & & & \\
 & -x & +x^2/2 & & & \\ \cline{2-3}
 & & 3x^2/2 & & & \\
 & & -3x^2/2 & & & \\ \cline{3-3}
 & & 0 & & &
\end{array}$$

et finalement

$$\frac{e^{e^x} - e^{e^{-x}}}{\ln(1+x)} = e\left(2 + x + \frac{3x^2}{2}\right) + \circ(x^2)\,.$$

d) Le dénominateur $\ln(1+x)$ a un *d.l.* qui commence par une terme de degré 1. On développe donc le numérateur à l'ordre 3. On a successivement

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + \circ(x^3)} = 1 + \frac{x^2}{2} + \circ(x^3)\,,$$

et

$$\frac{x^2}{\sin x}=\frac{x^2}{x-\dfrac{x^3}{6}+\circ(x^3)}=\frac{x}{1-\dfrac{x^2}{6}+\circ(x^2)}=x\left(1+\frac{x^2}{6}+\circ(x^2)\right)=x+\frac{x^3}{6}+\circ(x^3)\,,$$

donc

$$\frac{1}{\cos x}+\frac{x^2}{\sin x}=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\circ(x^3)\,.$$

Alors

$$e^{\left(\frac{1}{\cos x}+\frac{x^2}{\sin x}\right)}=e^{\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\circ(x^3)\right)}=e\,e^{\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\circ(x^3)\right)}\,.$$

En utilisant le *d.l.* de l'exponentielle en zéro à l'ordre 3, on obtient

$$\begin{aligned}
e^{\left(\frac{1}{\cos x}+\frac{x^2}{\sin x}\right)} &= e\left[1+\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right)+\frac{1}{2}\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right)^2+\frac{1}{6}\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right)^3+\circ(x^3)\right]\\
&= e\left[1+\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right)+\frac{1}{2}(x^2+x^3)+\frac{x^3}{6}\right]+\circ(x^3)\\
&= e\left[1+x+x^2+\frac{5x^3}{6}\right]+\circ(x^3)\,.
\end{aligned}$$

Finalement

$$e^{\left(\frac{1}{\cos x}+\frac{x^2}{\sin x}\right)}-e=e\left[x+x^2+\frac{5x^3}{6}\right]+\circ(x^3)\,.$$

Alors

$$f(x)=\frac{e\left[x+x^2+\dfrac{5x^3}{6}\right]+\circ(x^3)}{x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+\circ(x^3)}=\frac{e\left[1+x+\dfrac{5x^2}{6}\right]+\circ(x^2)}{1-\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{3}+\circ(x^2)}\,.$$

En effectuant la divisions suivant les puissances croissantes,

$$\begin{array}{ccc|ccc}
1 & +x & +5x^2/6 & 1 & -x/2 & +x^2/3\\ \cline{4-6}
-1 & +x/2 & -x^2/3 & 1 & +3x/2 & +5x^2/4\\ \cline{1-3}
 & 3x/2 & +x^2/2 & & & \\
 & -3x/2 & +3x^2/4 & & & \\ \cline{2-3}
 & & 5x^2/4 & & & \\
 & & -5x^2/4 & & & \\ \cline{3-3}
 & & 0 & & &
\end{array}$$

on a donc finalement

$$\frac{e^{\left(\frac{1}{\cos x}+\frac{x^2}{\sin x}\right)}-e}{\ln(1+x)}==e\left[1+\frac{3x}{2}+\frac{5x^2}{4}\right]+\circ(x^2)\,.$$

e) Le dénominateur $\sin x$ a un *d.l.* qui commence par x. Il faut donc partir de *d.l.* d'ordre 4 pour obtenir un *d.l.* de f à l'ordre 3.

En partant de

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \circ(x^4) \quad \text{et} \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \circ(x^4)\,,$$

on obtient

$$\arctan x + \ln(1+x) = 2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + \circ(x^4)\,.$$

Par ailleurs

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \circ(x^4)\,,$$

donc, après simplification par x, on trouve

$$f(x) = \frac{2 - \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^3}{4} + \circ(x^3)}{1 - \dfrac{x^2}{6} + \circ(x^3)}\,,$$

d'où

$$\begin{aligned}
\frac{\arctan x + \ln(1+x)}{\sin x} &= \left(2 - \frac{x}{2} - \frac{x^3}{4} + \circ(x^3)\right)\left(1 + \frac{x^2}{6} + \circ(x^3)\right) \\
&= 2 - \frac{x}{2} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{12} + \circ(x^3) \\
&= 2 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{3} + \circ(x^3)\,.
\end{aligned}$$

On pouvait également effectuer la division suivant les puissances croissantes

$$\begin{array}{rrrr|rrrr}
2 & -x/2 & & -x^3/4 & 1 & & -x^2/6 & \\ \cline{5-8}
-2 & & +x^2/3 & + & 2 & -x/2 & +x^2/3 & -x^3/3 \\ \cline{1-4}
 & -x/2 & +x^2/3 & -x^3/4 & & & & \\
 & x/2 & & -x^3/12 & & & & \\ \cline{2-4}
 & & x^2/3 & -x^3/3 & & & & \\
 & & -x^3/3 & & & & & \\ \cline{3-4}
 & & & -x^3/3 & & & & \\
 & & & +x^3/3 & & & & \\ \cline{4-4}
 & & & 0 & & & &
\end{array}$$

5. On calcule les dérivées successives de la fonction $x \mapsto \arctan x$.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}\,,\ f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} = (-2x)(1+x^2)^{-2}\,,$$

puis

$$f^{(3)}(x) = -2(1+x^2)^{-2} + (-2x)(-2)(2x)(1+x^2)^{-3}\,.$$

On en déduit
$$f(1)=\pi/4\,,\ f'(1)=1/2\,,\ f''(1)=-1/2\,,\ f^{(3)}(1)=1/2\,,$$
d'où, en utilisant la formule de Taylor,
$$f(x)=f(1)+\frac{f'(1)}{1!}\,(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}\,(x-1)^2+\frac{f^{(3)}(1)}{3!}\,(x-1)^3+\circ((x-1)^3)\,,$$
on trouve
$$f(x)=\frac{\pi}{4}+\frac{(x-1)}{2}-\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(x-1)^3}{12}+\circ((x-1)^3)\,.$$

Partons maintenant d'un *d.l.* à l'ordre 2 de f'. En posant $x=1+u$, on obtient
$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{2+2u+u^2}=\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+u+u^2/2}\,.$$
Alors
$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{2}\left[1-\left(u+\frac{u^2}{2}\right)+\left(u+\frac{u^2}{2}\right)^2+\circ(u^2)\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[1-\left(u+\frac{u^2}{2}\right)+u^2+\circ(u^2)\right]\\
&= \frac{1}{2}\left(1-u+\frac{u^2}{2}\right)+\circ(u^2)\\
&= \frac{1}{2}-\frac{u}{2}+\frac{u^2}{4}+\circ(u^2)\,.
\end{aligned}$$
Alors, en intégrant terme à terme
$$f(x)=f(1)+\frac{u}{2}-\frac{u^2}{4}+\frac{u^3}{12}+\circ(u^3)\,,$$
ce qui redonne le même résultat.

6. a) On se ramène à un *d.l.* en zéro en posant $h=x-\pi/3$. On a alors
$$f(x)=\cos\left(h+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\,\cos h-\frac{\sqrt{3}}{2}\,\sin h\,,$$
d'où
$$f(x)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{h^2}{2}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(h-\frac{h^3}{6}\right)+\circ(h^3)\,,$$
et finalement
$$\cos x=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{1}{4}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2+\frac{\sqrt{3}}{12}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3+\circ\left(\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3\right)\,.$$

b) On se ramène à un *d.l.* en zéro en posant $h = x + 1$. On a alors

$$f(x) = h(h+1)(h+2) = 2h + 3h^2 + h^3 = 2h + 3h^2 + \circ(h^2)\,,$$

donc

$$(x+1)(x+2)(x+3) = 2(x+1) + 3(x+1)^2 + \circ((x+1)^2)\,.$$

c) On se ramène à un *d.l.* en zéro en posant $h = x - \pi/6$. On a alors

$$f(x) = \sin\left(h + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\sin h + \frac{1}{2}\,\cos h\,,$$

d'où

$$f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(h - \frac{h^3}{6} + \circ(h^3)\right) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{h^2}{2} + \circ(h^3)\right)\,,$$

et finalement

$$\sin x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{12}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3 + \circ\left(\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3\right)\,.$$

d) On se ramène à un *d.l.* en zéro en posant $h = x - 1$. On a alors

$$f(x) = h(h-1)(h-2) = 2h - 3h^2 + h^3 = 2h - 3h^2 + \circ(h^2)\,,$$

donc

$$(x-1)(x-2)(x-3) = 2(x-1) - 3(x-1)^2 + \circ((x-1)^2)\,.$$

e) En 3, on se ramène à un *d.l.* en zéro en posant $h = x - 3$. On obtient alors

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(3+h) = \ln 3 + \ln\left(1 + \frac{h}{3}\right) \\ &= \ln 3 + \frac{h}{3} - \frac{1}{2}\left(\frac{h}{3}\right)^2 + \circ(h^2)\,, \end{aligned}$$

donc

$$\ln x = \ln 3 + \frac{x-3}{3} - \frac{(x-3)^2}{18} + \circ((x-3)^2)\,.$$

De même en 4. On se ramène à un *d.l.* en zéro en posant $h = x - 4$. On obtient alors

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(4+h) = \ln 4 + \ln\left(1 + \frac{h}{4}\right) \\ &= \ln 4 + \frac{h}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{h}{4}\right)^2 + \circ(h^2)\,, \end{aligned}$$

donc
$$\ln x = 2\ln 2 + \frac{x-4}{4} - \frac{(x-4)^2}{32} + \circ((x-4)^2)\,.$$

f) On se ramène à un *d.l.* en zéro en posant $h = x - \pi/4$. On obtient alors
$$\tan x = \tan\left(h + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan h + \tan\frac{\pi}{4}}{1 - \tan h \tan\frac{\pi}{4}} = \frac{1+\tan h}{1-\tan h}\,.$$

Par ailleurs,
$$\tan 2x = \tan\left(\frac{\pi}{2} + 2h\right) = \frac{1}{\tan(-2h)} = -\frac{1}{\tan 2h}\,.$$

Donc
$$f(x) = f\left(h + \frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{1+\tan h}{1-\tan h}\right)^{-1/\tan 2h} = e^{-g(h)}\,,$$

où
$$g(h) = \frac{1}{\tan 2h}\ln\left(\frac{1+\tan h}{1-\tan h}\right)\,.$$

Comme $\tan 2h$ s'annule en zéro, et que le premier terme non nul de son *d.l.* est de degré 1, il faut donc commencer le calcul avec un *d.l.* d'ordre 4 en zéro de $\tan h$:
$$\tan h = h + \frac{h^3}{3} + \circ(h^4)\,.$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\ln(1+\tan h) &= \ln\left(1 + h + \frac{h^3}{3} + \circ(h^4)\right)\\
&= \left(h + \frac{h^3}{3}\right) - \frac{1}{2}\left(h + \frac{h^3}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(h + \frac{h^3}{3}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(h + \frac{h^3}{3}\right)^4 + \circ(h^4)\\
&= h + \frac{h^3}{3} - \frac{1}{2}\left(h^2 + \frac{2h^4}{3}\right) + \frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4} + \circ(h^4)\\
&= h - \frac{h^2}{2} + \frac{2h^3}{3} - \frac{7h^4}{12} + \circ(h^4)\,.
\end{aligned}$$

Alors en changeant h en $-h$,
$$\ln(1-\tan h) = -h - \frac{h^2}{2} - \frac{2h^3}{3} - \frac{7h^4}{12} + \circ(h^4)\,,$$

et finalement
$$\ln\frac{1+\tan h}{1-\tan h} = \ln(1+\tan h) - \ln(1-\tan h) = 2h + \frac{4h^3}{3} + \circ(h^4)\,.$$

(Remarque : la fonction qui à h associe $\ln\dfrac{1+\tan h}{1+\tan h}$ étant impaire, il est normal que son *d.l.* le soit également).

Par ailleurs
$$\tan 2h = 2h + \frac{8h^3}{3} + \circ(h^4)\,.$$
On a alors
$$\begin{aligned} g(h) &= \frac{2h + \dfrac{4h^3}{3} + \circ(h^4)}{2h + \dfrac{8h^3}{3} + \circ(h^4)} = \frac{1 + \dfrac{2h^2}{3} + \circ(h^3)}{1 + \dfrac{4h^2}{3} + \circ(h^3)} \\ &= \left(1 + \frac{2h^2}{3}\right)\left(1 - \frac{4h^2}{3}\right) + \circ(h^3) \\ &= 1 - \frac{2h^2}{3} + \circ(h^3)\,. \end{aligned}$$
Ensuite
$$\begin{aligned} f\left(h + \frac{\pi}{4}\right) &= e^{-g(h)} \\ &= e^{\left(-1 + \frac{2h^2}{3} + \circ(h^3)\right)} \\ &= e^{-1}\, e^{\left(\frac{2h^2}{3} + \circ(h^3)\right)}\,. \end{aligned}$$
Il ne reste plus qu'à utiliser le *d.l.* de e^x en zéro pour obtenir
$$f\left(h + \frac{\pi}{4}\right) = e^{-1}\left(1 + \frac{2h^2}{3}\right) + \circ(h^3)\,.$$
Finalement
$$(\tan x)^{\tan(2x)} = e^{-1}\left(1 + \frac{2}{3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2\right) + \circ\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3\right)\,.$$

g) On se ramène à un *d.l.* en zéro en posant $h = x - 1$. On obtient alors
$$f(x) = f(1 + h) = (h - 3)(h + 4)h((h + 1)^2 + 2) = -36h - 21h^2 - 7h^3 + 3h^4 + h^5\,,$$
donc en tronquant à l'ordre 2
$$f(1 + h) = -36h - 21h^2 + \circ(h^2)\,,$$
soit
$$(x - 4)(x + 3)(x - 1)(x^2 + 2) = -36(x - 1) - 21(x - 1)^2 + \circ((x - 1)^2)\,.$$
Par contre à l'ordre 2000, la partie régulière de f est f.

h) On se ramène à un *d.l.* en zéro en posant $h = x - \pi/2$. On obtient alors
$$f(x) = f\left(h + \frac{\pi}{2}\right) = \left(1 + \sin\left(h + \frac{\pi}{2}\right)^{h+\pi/2}\right) = (1+\cos h)^{h+\pi/2} = \exp\left(\left(h + \frac{\pi}{2}\right)\ln(1 + \cos h)\right)\,.$$
Tout d'abord
$$1 + \cos h = 2 - \frac{h^2}{2} + \circ(h^2) = 2\left(1 - \frac{h^2}{4} + \circ(h^2)\right)\,,$$

puis

$$\ln(1+\cos h) = \ln 2 + \ln\left(1 - \frac{h^2}{4} + \circ(h^2)\right) = \ln 2 - \frac{h^2}{4} + \circ(h^2)\,.$$

Ensuite

$$\left(h + \frac{\pi}{2}\right)\ln(1+\cos h) = \left(h + \frac{\pi}{2}\right)\,\left(\ln 2 - \frac{h^2}{4} + \circ(h^2)\right) = \frac{\pi}{2}\ln 2 + h\ln 2 - \frac{\pi h^2}{8} + \circ(h^2)\,.$$

Finalement

$$\begin{aligned}
f\left(h + \frac{\pi}{2}\right) &= \exp\left(\frac{\pi}{2}\ln 2\right)\,\exp\left(h\ln 2 - \frac{\pi h^2}{8} + \circ(h^2)\right) \\
&= 2^{\pi/2}\left(1 + \left(h\ln 2 - \frac{\pi h^2}{8}\right) + \frac{1}{2}\,\left(h\ln 2 - \frac{\pi h^2}{8}\right)^2 + \circ(h^2)\right) \\
&= 2^{\pi/2}\left(1 + h\ln 2 + h^2\left(\frac{(\ln 2)^2}{2} - \frac{\pi}{8}\right)\right) + \circ(h^2)\,,
\end{aligned}$$

donc

$$(1+\sin x)^x = 2^{\pi/2}\left(1 + \ln 2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \left(\frac{(\ln 2)^2}{2} - \frac{\pi}{8}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2\right) + \circ\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2\right)\,.$$

i) On se ramène à un *d.l.* en zéro en posant $h = x - 1$. On obtient alors

$$f(h+1) = \sqrt{2e - e^{h+1}}\,.$$

Mais

$$2e - e^{h+1} = 2e - e\cdot e^h = 2e - e\left(1 + h + \frac{h^2}{2} + \circ(h^2)\right) = e\left(1 - h - \frac{h^2}{2} + \circ(h^2)\right)\,.$$

Alors

$$f(h+1) = \sqrt{e}\,\left(1 - h - \frac{h^2}{2} + \circ(h^2)\right)^{1/2}\,,$$

et en utilisant le développement limité $(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \circ(x^2)$, on a

$$\begin{aligned}
f(h+1) &= \sqrt{e}\,\left(1 + \frac{1}{2}\,\left(-h - \frac{h^2}{2}\right) - \frac{1}{8}\,\left(-h - \frac{h^2}{2}\right)^2 + \circ(h^2)\right) \\
&= \sqrt{e}\,\left(1 - \frac{h}{2} - \frac{h^2}{4} - \frac{h^2}{8} + \circ(h^2)\right) \\
&= \sqrt{e}\,\left(1 - \frac{h}{2} - \frac{3h^2}{8} + \circ(h^2)\right)\,.
\end{aligned}$$

On obtient donc finalement

$$\sqrt{2e - e^x} = \sqrt{e} - \frac{\sqrt{e}}{2}\,(x-1) - \frac{3\sqrt{e}}{8}\,(x-1)^2 + \circ((x-1)^2)\,.$$

j) On se ramène à un *d.l.* en zéro en posant $h = x - 1$. On obtient tout d'abord

$$2 - \ln(1+h) = 2 - h + \frac{h^2}{2} + \circ(h^2)\,,$$

donc

$$f(1+h) = \left(2 - h + \frac{h^2}{2} + \circ(h^2)\right)^{1/4} = 2^{1/4}\left(1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{4} + \circ(h^2)\right)^{1/4}.$$

D'autre part

$$(1+h)^{1/4} = 1 + \frac{1}{4}\,h + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} - 1\right)\frac{h^2}{2} + \circ(h^2) = 1 + \frac{h}{4} - \frac{3h^2}{32} + \circ(h^2)\,.$$

Alors

$$\begin{aligned} f(1+h) &= 2^{1/4}\left[1 + \frac{1}{4}\left(-\frac{h}{2} + \frac{h^2}{4}\right) - \frac{3}{32}\left(-\frac{h}{2} + \frac{h^2}{4}\right)^2 + \circ(h^2)\right] \\ &= 2^{1/4}\left[1 - \frac{h}{8} + \frac{h^2}{16} - \frac{3}{32}\,\frac{h^2}{4} + \circ(h^2)\right] \\ &= 2^{1/4}\left[1 - \frac{h}{8} + \frac{5h^2}{128} + \circ(h^2)\right], \end{aligned}$$

donc

$$\sqrt[4]{2 - \ln x} = 2^{1/4}\left[1 - \frac{x-1}{8} + \frac{5(x-1)^2}{128} + \circ((x-1)^2)\right].$$

7. Posons $f(x) = \arcsin x$. On a alors

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2}\,.$$

En utilisant le *d.l.* de $(1+u)^m$ avec $m = -1/2$ on obtient

$$(1+u)^{-1/2} = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)u + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\left(-\frac{1}{2}\right)-1\right)}{2!}u^2 + \cdots + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\left(-\frac{1}{2}\right)-1\right)\cdots\left(\left(-\frac{1}{2}\right)-n+1\right)}{n!}u^n + \circ(x^n)\,.$$

Appliquons cette relation avec $u = -x^2$. Le monôme $K_k(x)$ de degré $2k$ vaut donc

$$K_k(x) = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\left(-\frac{1}{2}\right)-1\right)\cdots\left(\left(-\frac{1}{2}\right)-k+1\right)}{k!}(-x^2)^k\,.$$

Les k premiers facteurs sont négatifs. Comme l'on multiplie par $(-1)^k$, le résultat final sera positif. On obtient alors

$$\begin{aligned} K_k(x) &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+k-1\right)}{k!}x^{2k} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\cdots\left(\frac{2k-1}{2}\right)}{k!}x^{2k} \\ &= \frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2^k\,k!}x^{2k} \end{aligned}$$

Si l'on multiplie le numérateur et le dénominateur par $2^k\,k! = 2\cdot 4\cdots(2k)$, Il apparaît au numérateur le produit des nombres entre 1 et $2k$, soit $(2k)!$ et au dénominateur $(2^k\,k!)^2$. Mais, puisque l'on a,

$$\binom{2k}{k} = \frac{(2k)!}{(k!)^2}\,,$$

on obtient finalement

$$K_k(x) = \frac{1}{4^k}\binom{2k}{k}x^{2k}\,,$$

donc

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4^k}\binom{2k}{k}x^{2k} + \circ(x^{2n})\,.$$

Alors, en prenant la primitive, en tenant compte du fait que $f(0) = 0$, on obtient

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4^k}\binom{2k}{k}\frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \circ(x^{2n+1})\,.$$

8. Pour $x > 0$, on a la relation

$$\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}\,,$$

donc

$$\arctan\frac{1}{x^2} = \frac{\pi}{2} - \arctan(x^2) = \frac{\pi}{2} - x^2 + \frac{x^6}{3} - \frac{x^{10}}{5} + \circ(x^{13})\,.$$

9. On a

$$\operatorname{th}\frac{1}{x^2} = \frac{1 - e^{-2/x^2}}{1 + e^{-2/x^2}}\,,$$

donc

$$\operatorname{th}\frac{1}{x^2} - 1 = \frac{-2e^{-2/x^2}}{1 + e^{-2/x^2}}\,.$$

Alors

$$x^{-n}\left(\operatorname{th}\frac{1}{x^2} - 1\right) = \frac{-2x^{-n}e^{-2/x^2}}{1 + e^{-2/x^2}}\,.$$

En posant $u = 2/x^2$,

$$x^{-n}e^{-2/x^2} = 2^{-n/2}\,e^{-u}u^{n/2}\,,$$

et cette expression admet pour limite 0 lorsque u tend vers $+\infty$ donc lorsque x tend vers 0. Alors

$$\lim_{x\to 0} x^{-n}\left(\operatorname{th}\frac{1}{x^2} - 1\right) = 0\,,$$

donc

$$\operatorname{th}\frac{1}{x^2} - 1 = \circ(x^n)\,,$$

et l'on a bien

$$\operatorname{th}\frac{1}{x^2} = 1 + \circ(x^n)\,.$$

10. a) La fonction $x \mapsto \ln x$ n'a pas de limite finie en zéro, donc pas de *d.l.* d'ordre 0, ni d'aucun autre ordre.

b) La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en zéro, donc n'a pas de *d.l.* d'ordre 1 en zéro, ni d'aucun ordre supérieur à 1.

c) On a
$$\sqrt{x^5} = x^2\sqrt{x} = \circ(x^2)\,,$$
donc la fonction possède des *d.l.* d'ordre 1 et 2 en zéro. Si elle possédait un *d.l.* d'ordre 3, il serait de la forme
$$\sqrt{x^5} = ax^3 + \circ(x^3)\,,$$
et l'on aurait
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x^5}}{x^3} = a\,,$$
ce qui n'est pas le cas, puisque cette limite est infinie. Donc la fonction ne possède pas de *d.l.* d'ordre 3 en zéro.

d) On a, pour tout entier n positif,
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^n} e^{-1/x^2} = 0\,,$$
donc
$$e^{-1/x^2} = \circ(x^n)\,.$$
La fonction possède un *d.l.* d'ordre n pour tout entier n.

11. Mettons tout d'abord en facteur dans $f(x)$ et $g(x)$ leur terme de plus bas degré.
$$f(x) = x^2(1 + 2x + x^2 + \circ(x^2)) \quad \text{et} \quad g(x) = -x^3(1 - 3x + \circ(x))\,.$$
Alors
$$f(x)g(x) = -x^5(1 + 2x + x^2 + \circ(x^2))(1 - 3x + \circ(x))\,.$$
Le produit $(1 + 2x + x^2 + \circ(x^2))(1 - 3x + \circ(x))$ donnera un *d.l.* d'ordre 1 seulement, donc
$$f(x)g(x) = -x^5(1 + 2x + \circ(x))(1 - 3x + \circ(x)) = -x^5(1 - x + \circ(x)) = -x^5 + x^6 + \circ(x^6)\,.$$
Le résultat obtenu est un *d.l.* d'ordre 6.

Pour le quotient,
$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{-x^3(1 - 3x + \circ(x))}{x^2(1 + 2x + x^2 + \circ(x^2))} = -x\frac{1 - 3x + \circ(x)}{1 + 2x + x^2 + \circ(x^2)}\,.$$
Le quotient $\dfrac{1 - 3x + \circ(x)}{1 + 2x + x^2 + \circ(x^2)}$ sera d'ordre 1. On a
$$\frac{1 - 3x + \circ(x)}{1 + 2x + x^2 + \circ(x^2)} = \frac{1 - 3x + \circ(x)}{1 + 2x + \circ(x)} = (1 - 3x + \circ(x))(1 - 2x + \circ(x)) = 1 - 5x + \circ(x)\,,$$

d'où
$$\frac{g(x)}{f(x)} = -x + 5x^2 + \circ(x^2)\,.$$
Le résultat est un *d.l.* d'ordre 2.

Pour la composée, on a

$$g\circ f(x) = -\left(x^2[1+2x+x^2+\circ(x^2)]\right)^3 + 3\left(x^2[1+2x+x^2+\circ(x^2)]\right)^4 + \circ\left(\left(x^2[1+2x+x^2+\circ(x^2)]\right)^4\right)\,,$$

donc

$$\begin{aligned} g\circ f(x) &= -x^6(1+2x+x^2+\circ(x^2))^3 + 3x^8(1+2x+x^2+\circ(x^2))^4 + \circ(x^8) \\ &= -x^6(1+2x+x^2+\circ(x^2))^3 + 3x^8 + \circ(x^8)\,. \end{aligned}$$

Le résultat final sera donc à l'ordre 8. Il reste à développer l'expression $[1+2x+x^2+\circ(x^2)]^3$ à l'ordre 2, . On obtient

$$[1+(2x+x^2)+\circ(x^2)]^3 = 1+3(2x+x^2)+3(2x+x^2)^2+\circ(x^2) = 1+6x+15x^2+\circ(x^2)\,,$$

d'où
$$g\circ f(x) = -x^6 - 6x^7 - 12x^8 + \circ(x^8)\,.$$

12. Remarque : dans les exercices suivants on ne peut savoir *a priori* à quel ordre choisir les *d.l.* que l'on utilise, les démonstrations sont données avec l'ordre nécessaire pour obtenir l'équivalent cherché. En général, on choisit un ordre de départ, et, s'il est insuffisant pour conclure, on recommence les calculs en augmentant l'ordre.

a) En effectuant un *d.l.* à l'ordre 3,

$$x(2-\cos x) - \arctan x = x\left(2-1+\frac{x^2}{2}+\circ(x^2)\right) - \left(x-\frac{x^3}{3}+\circ(x^3)\right) = \frac{5x^3}{6}+\circ(x^3) \sim \frac{5x^3}{6}\,.$$

b) En effectuant un *d.l.* à l'ordre 4,

$$\begin{aligned} e^{\cos x} &= e^{\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\circ(x^4)\right)} \\ &= e\,e^{\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\circ(x^4)\right)} \\ &= e\left[1+\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)^2+\circ(x^4)\right] \\ &= e\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{6}\right)+\circ(x^4)\,. \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}
e^{\operatorname{ch} x} &= e^{\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\circ(x^4)\right)} \\
&= e\, e^{\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\circ(x^4)\right)} \\
&= e\left[1+\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)^2+\circ(x^4)\right] \\
&= e\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{6}\right)+\circ(x^4)\,.
\end{aligned}$$

Alors

$$e^{\cos x}+e^{\operatorname{ch} x}-2e=\frac{ex^4}{3}+\circ(x^4)\sim\frac{ex^4}{3}\,.$$

c) Pour x tendant vers 0^+, on a

$$\sqrt{\tan x}=\sqrt{x+\frac{x^3}{3}+\circ(x^3)}=\sqrt{x}\,\left(1+\frac{x^2}{3}+\circ(x^2)\right)^{1/2}\,.$$

En utilisant le *d.l.* en zéro à l'ordre 1 de $(1+u)^{1/2}$, on obtient

$$\sqrt{\sin x}=\sqrt{x}\left(1+\frac{x^2}{6}+\circ(x^2)\right)\,.$$

De même,

$$\sqrt[4]{x\sin x}=\sqrt[4]{x^2-\frac{x^4}{6}+\circ(x^4)}=\sqrt{x}\,\left(1-\frac{x^2}{6}+\circ(x^2)\right)^{1/4}\,,$$

donc, en utilisant le *d.l.* en zéro à l'ordre 1 de $(1+u)^{1/4}$,

$$\sqrt{\tan x}=\sqrt{x}\left(1-\frac{x^2}{24}+\circ(x^2)\right)\,.$$

Alors

$$\sqrt{\tan x}-\sqrt[4]{x\sin x}=\sqrt{x}\left(\frac{5x^2}{24}+\circ(x^2)\right)=\frac{5x^{5/2}}{24}+\circ(x^{5/2})\sim\frac{5x^{5/2}}{24}\,.$$

d) On part de *d.l.* à l'ordre 4.

$$\begin{aligned}
\ln\cos x &= \ln\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\circ(x^4)\right) \\
&= \left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)^2+\circ(x^4) \\
&= -\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+\circ(x^4)\,.
\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}
\ln \operatorname{ch} x &= \ln\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\circ(x^4)\right)\\
&= \left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)^2+\circ(x^4)\\
&= \frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+\circ(x^4)\,.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\frac{\ln \operatorname{ch} x}{\ln\cos x} &= \frac{\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^4}{12}+\circ(x^4)}{-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^4}{12}+\circ(x^4)} = -\frac{1-\dfrac{x^2}{6}+\circ(x^2)}{1+\dfrac{x^2}{6}+\circ(x^2)}\\
&= -\left(1-\frac{x^2}{6}\right)\left(1-\frac{x^2}{6}\right)+\circ(x^2)\\
&= -1+\frac{x^2}{3}+\circ(x^2)\,.
\end{aligned}$$

On en déduit donc

$$1+\frac{\ln \operatorname{ch} x}{\ln\cos x}=\frac{x^2}{3}+\circ(x^2)\sim\frac{x^2}{3}\,.$$

13. a) En effectuant un *d.l.* à l'ordre 3,

$$x(1+\cos x)-2\tan x = x\left(1+1-\frac{x^2}{2}+\circ(x^2)\right)-2\left(x+\frac{x^3}{3}+\circ(x^3)\right)=-\frac{7x^3}{6}+\circ(x^3)\sim-\frac{7x^3}{6}\,.$$

b) En effectuant un *d.l.* à l'ordre 2,

$$\begin{aligned}
e^{\cos x} &= e^{\left(1-\frac{x^2}{2}+\circ(x^2)\right)}\\
&= e\,e^{-\frac{x^2}{2}+\circ(x^2)}\\
&= e\left(1-\frac{x^2}{2}+\circ(x^2)\right)\,.
\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}
e^{\operatorname{ch} x} &= e^{\left(1+\frac{x^2}{2}+\circ(x^2)\right)}\\
&= e\,e^{\frac{x^2}{2}+\circ(x^2)}\\
&= e\left(1+\frac{x^2}{2}+\circ(x^2)\right)\,.
\end{aligned}$$

Alors

$$e^{\cos x}-e^{\operatorname{ch} x}=-ex^2+\circ(x^2)\sim -ex^2\,.$$

c) Pour x tendant vers 0^+, on a

$$\sqrt{\sin x} = \sqrt{x - \frac{x^3}{6} + \circ(x^3)} = \sqrt{x}\,\left(1 - \frac{x^2}{6} + \circ(x^2)\right)^{1/2}.$$

En utilisant le *d.l.* en zéro à l'ordre 1 de $(1+u)^{1/2}$, on obtient

$$\sqrt{\sin x} = \sqrt{x}\left(1 - \frac{x^2}{12} + \circ(x^2)\right).$$

De même,

$$\sqrt[4]{x\tan x} = \sqrt[4]{x^2 + \frac{x^4}{3} + \circ(x^4)} = \sqrt{x}\,\left(1 + \frac{x^2}{3} + \circ(x^2)\right)^{1/4},$$

donc, en utilisant le *d.l.* en zéro à l'ordre 1 de $(1+u)^{1/4}$,

$$\sqrt{\tan x} = \sqrt{x}\left(1 + \frac{x^2}{12} + \circ(x^2)\right).$$

Alors

$$\sqrt{\sin x} - \sqrt[4]{x\tan x} = -\sqrt{x}\left(\frac{x^2}{6} + \circ(x^2)\right) = -\frac{x^{5/2}}{6} + \circ(x^{5/2}) \sim -\frac{x^{5/2}}{6}.$$

d) On part de *d.l.* à l'ordre 4.

$$\begin{aligned} \ln\cos x &= \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \circ(x^4)\right) \\ &= \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2 + \circ(x^4) \\ &= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + \circ(x^4). \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} \ln\operatorname{ch} x &= \ln\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \circ(x^4)\right) \\ &= \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2 + \circ(x^4) \\ &= \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + \circ(x^4). \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{\ln\cos x}{\ln\operatorname{ch} x} &= \frac{-\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{12} + \circ(x^4)}{\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{12} + \circ(x^4)} = \frac{-1 - \dfrac{x^2}{6} + \circ(x^2)}{1 - \dfrac{x^2}{6} + \circ(x^2)} \\ &= \left(-1 - \frac{x^2}{6}\right)\left(1 + \frac{x^2}{6}\right) + \circ(x^2) \\ &= -1 - \frac{x^2}{3} + \circ(x^2). \end{aligned}$$

On en déduit donc

$$1+\frac{\ln\cos x}{\ln \operatorname{ch} x} = -\frac{x^2}{3}+\circ(x^2) \sim -\frac{x^2}{3}\,.$$

e) On peut transformer l'expression en mettant e en facteur dans la parenthèse

$$\left(2e\,\cos x - e^{x+1}\right)^{\ln x} = e^{\ln x}\left(2\cos x - e^x\right)^{\ln x} = x\left(2\cos x - e^x\right)^{\ln x}\,.$$

Or, en utilisant un *d.l.* d'ordre 1 en zéro,

$$2\cos x - e^x = 2-(1+x)+\circ(x) = 1-x+\circ(x)\,,$$

donc

$$\ln(2\cos x - e^x) = \ln(1-x+\circ(x)) = -x+\circ(x) \sim x\,.$$

Alors

$$\ln x\ln(2\cos x - e^x) \sim -x\ln x\,,$$

et cette expression tend vers zéro lorsque x tend vers 0^+. Donc

$$e^{\ln x\ln(2\cos x - e^x)} = (2\cos x - e^x)^{\ln x}$$

tend vers 1, et il en résulte que

$$\left(2e\,\cos x - e^{x+1}\right)^{\ln x} = x\varepsilon(x)$$

où $\varepsilon(x)$ tend vers 1. Donc

$$\left(2e\,\cos x - e^{x+1}\right)^{\ln x} \sim x\,.$$

f) On part de *d.l.* à l'ordre 3. On a

$$2-\tan x = 2-x-\frac{x^3}{3}+\circ(x^3) \quad \text{et} \quad 1+e^{-x} = 2-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\circ(x^3)\,.$$

On effectue alors la division suivant les puissances croissantes pour obtenir un *d.l.* du quotient,

$$\begin{array}{rrrr|rrrr}
2 & -x & & -x^3/3 & 2 & -x & +x^2/2 & -x^3/6 \\ \cline{5-8}
-2 & +x & -x^2/2 & +x^3/6 & 1 & & -x^2/4 & -5x^3/24 \\ \cline{1-4}
 & & -x^2/2 & -x^3/6 & & & & \\
 & & +x^2/2 & -x^3/4 & & & & \\ \cline{3-4}
 & & & -5x^3/12 & & & & \\
 & & & +5x^3/12 & & & & \\ \cline{4-4}
 & & & 0 & & & &
\end{array}$$

donc

$$\frac{2-\tan x}{1+e^{-x}} = 1-\frac{x^2}{4}-\frac{5x^3}{24}+\circ(x^3)\,.$$

Par ailleurs

$$\frac{4}{4+x^2} = \frac{1}{1+\dfrac{x^2}{4}} = 1-\frac{x^2}{4}+\circ(x^3)\,.$$

Finalement
$$\frac{2-\tan x}{1+e^{-x}} - \frac{4}{4+x^2} = -\frac{5x^3}{24} + \circ(x^3) \sim -\frac{5x^3}{24}\,.$$

14. a) Le *d.l.* du dénominateur ayant son premier terme non nul de degré 3, on cherche un *d.l.* d'ordre 3 du numérateur. Pour obtenir le *d.l.* d'$\arcsin x$, on part du *d.l.* d'ordre 2 de la dérivée. On a
$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} = 1 + \frac{x^2}{2} + \circ(x^2)\,.$$
Donc en intégrant, et puisque $\arcsin 0 = 0$,
$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \circ(x^3)\,.$$
Alors
$$\sin x - \arcsin x = \left(x - \frac{x^3}{6} + \circ(x^3)\right) - \left(x + \frac{x^3}{6} + \circ(x^3)\right) = -\frac{x^3}{3} + \circ(x^3) \sim -\frac{x^3}{3}\,,$$
et
$$\sin^3 x \sim x^3\,,$$
d'où
$$\frac{\sin x - \arcsin x}{\sin^3 x} \sim -\frac{1}{3}\,,$$
et
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \arcsin x}{\sin^3 x} = -\frac{1}{3}\,.$$

b) Comme $\sin x$ a un *d.l.* en zéro dont le premier terme non nul est de degré 1, et que l'on effectue une division par x^2, on partira de *d.l.* d'ordre 3. On a
$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \circ(x^3) \quad \text{et} \quad \operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{6} + \circ(x^3)\,,$$
donc
$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sh} x}{\sin x} &= \frac{x + \frac{x^3}{6} + \circ(x^3)}{x - \frac{x^3}{6} + \circ(x^3)} = \frac{1 + \frac{x^2}{6} + \circ(x^2)}{1 - \frac{x^2}{6} + \circ(x^2)} \\
&= \left(1 + \frac{x^2}{6}\right)\left(1 + \frac{x^2}{6}\right) + \circ(x^2) \\
&= 1 + \frac{x^2}{3} + \circ(x^2)\,.
\end{aligned}$$
Alors
$$\ln \frac{\operatorname{sh} x}{\sin x} = \ln\left(1 + \frac{x^2}{3} + \circ(x^2)\right) = \frac{x^2}{3} + \circ(x^2)\,,$$
puis
$$\frac{1}{x^2} \ln \frac{\operatorname{sh} x}{\sin x} = \frac{1}{3} + \circ(1)\,.$$

Finalement
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sh} x}{\sin x}\right)^{1/x^2} = \lim_{x\to 0} e^{\left(\frac{1}{x^2}\ln\frac{\operatorname{sh} x}{\sin x}\right)} = e^{1/3}\,.$$

c) On part du *d.l.* d'ordre 1 en zéro de $\alpha^x = e^{x\ln\alpha}$ qui vaut $1 + x\ln\alpha + \circ(x)$. On a donc
$$5^x - 3^x = (1 + x\ln 5) - (1 + x\ln 3) + \circ(x) = x\ln\frac{5}{3} + \circ(x) \sim x\ln\frac{5}{3}\,,$$
et
$$4^x - 2^x = (1 + x\ln 4) - (1 + x\ln 2) + \circ(x) = x\ln 2 + \circ(x) \sim x\ \ln 2\,,$$
donc
$$\lim_{x\to 0}\frac{5^x - 3^x}{4^x - 3^x} = \frac{\ln(5/3)}{\ln 2}\,.$$

d) Comme dans le calcul figure une division par x, on part de *d.l.* à l'ordre 1. On a tout d'abord
$$\frac{1+x}{1-x} = (1+x)(1+x+\circ(x)) = 1 + 2x + \circ(x)\,,$$
puis
$$\frac{1}{x}\ln\frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{x}\ln(1+2x+\circ(x)) = \frac{1}{x}(2x+\circ(x)) = 2 + \circ(1)\ .$$
Alors
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1/x} = \lim_{x\to 0}\exp\left[\frac{1}{x}\ln\frac{1+x}{1-x}\right] = e^2\,.$$

e) On écrit
$$\operatorname{cotan}^2 x - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{\tan^2 x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - \tan^2 x}{x^2\tan^2 x} = \frac{(x+\tan x)(x-\tan x)}{x^2\tan^2 x}\,.$$
Or
$$x - \tan x = x - \left(x + \frac{x^3}{3} + \circ(x^3)\right) = -\frac{x^3}{3} + \circ(x^3) \sim -\frac{x^3}{3}\,,$$
$$x + \tan x = 2x + \circ(x) \sim 2x\,,$$
et
$$x^2\tan^2 x \sim x^4\,.$$
Alors
$$\operatorname{cotan}^2 x - \frac{1}{x^2} \sim \frac{2x\left(-\frac{x^3}{3}\right)}{x^4} = -\frac{2}{3}\,,$$
donc
$$\lim_{x\to 0}\left(\operatorname{cotan}^2 x - \frac{1}{x^2}\right) = -\frac{2}{3}\,.$$

f) Le premier terme non nul du *d.l.* du dénominateur est de degré 2, puisque

$$\operatorname{ch} x - \cos x = \left(1 + \frac{x^2}{2}\right) - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + \circ(x^2) = x^2 + \circ(x^2) \sim x^2\,.$$

Par ailleurs il existe dans l'expression de la fonction des divisions par x^2. On commence les calculs avec des *d.l.* d'ordre 4.

$$\begin{aligned}
\ln \operatorname{ch} x &= \ln\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \circ(x^4)\right)\\
&= \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2 + \circ(x^4)\\
&= \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} + \circ(x^4)\\
&= \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + \circ(x^4)\,.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
(\operatorname{ch} x)^{-1/x^2} &= e^{\left(-\frac{\ln \operatorname{ch} x}{x^2}\right)}\\
&= e^{\left(-\frac{1}{2} + \frac{x^2}{12} + \circ(x^2)\right)}\\
&= e^{-1/2}\, e^{\left(\frac{x^2}{12} + \circ(x^2)\right)}\\
&= e^{-1/2}\left(1 + \frac{x^2}{12}\right) + \circ(x^2)\,.
\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}
\ln \cos x &= \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \circ(x^4)\right)\\
&= \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2 + \circ(x^4)\\
&= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} + \circ(x^4)\\
&= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + \circ(x^4)\,.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
(\cos x)^{1/x^2} &= e^{\left(\frac{\ln \cos x}{x^2}\right)}\\
&= e^{\left(-\frac{1}{2} - \frac{x^2}{12} + \circ(x^2)\right)}\\
&= e^{-1/2}\, e^{\left(-\frac{x^2}{12} + \circ(x^2)\right)}\\
&= e^{-1/2}\left(1 - \frac{x^2}{12}\right) + \circ(x^2)\,.
\end{aligned}$$

On en déduit

$$(\operatorname{ch} x)^{-1/x^2} - (\cos x)^{1/x^2} = e^{-1/2} \left(\frac{x^2}{6} + \circ(x^2)\right) \sim e^{-1/2}\, \frac{x^2}{6}\,.$$

et finalement

$$\frac{(\operatorname{ch} x)^{-1/x^2} - (\cos x)^{1/x^2}}{\operatorname{ch} x - \cos x} \sim e^{-1/2}\, \frac{\frac{x^2}{6}}{x^2} = \frac{1}{6\sqrt{e}}\,,$$

donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\operatorname{ch} x)^{-1/x^2} - (\cos x)^{1/x^2}}{\operatorname{ch} x - \cos x} = \frac{1}{6\sqrt{e}}\,.$$

15. a) Le *d.l.* du dénominateur ayant son premier terme non nul de degré 3, on cherche un *d.l.* d'ordre 3 du numérateur. Pour obtenir le *d.l.* d'$\arcsin x$, on part du *d.l.* d'ordre 2 de la dérivée. On a

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} = 1 + \frac{x^2}{2} + \circ(x^2)\,.$$

Donc en intégrant, et puisque $\arcsin 0 = 0$,

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \circ(x^3)\,.$$

Alors

$$x - \arcsin x = -\frac{x^3}{6} + \circ(x^3) \sim -\frac{x^3}{6}\,,$$

et

$$\sin^3 x \sim x^3\,,$$

d'où

$$\frac{x - \arcsin x}{\sin^3 x} \sim -\frac{1}{6}\,,$$

et

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \arcsin x}{\sin^3 x} = -\frac{1}{6}\,.$$

b) Comme $\operatorname{sh} x$ a un *d.l.* en zéro dont le premier terme non nul est de degré 1, et que l'on effectue une division par x^2, on partira de *d.l.* d'ordre 3. On a

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \circ(x^3) \quad \text{et} \quad \operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{6} + \circ(x^3)\,,$$

donc

$$\begin{aligned}
\frac{\sin x}{\operatorname{sh} x} &= \frac{x - \frac{x^3}{6} + \circ(x^3)}{x + \frac{x^3}{6} + \circ(x^3)} = \frac{1 - \frac{x^2}{6} + \circ(x^2)}{1 + \frac{x^2}{6} + \circ(x^2)} \\
&= \left(1 - \frac{x^2}{6}\right)\left(1 - \frac{x^2}{6}\right) + \circ(x^2) \\
&= 1 - \frac{x^2}{3} + \circ(x^2)\,.
\end{aligned}$$

Alors
$$\ln\frac{\sin x}{\operatorname{sh} x} = \ln\left(1-\frac{x^2}{3}+\circ(x^2)\right) = -\frac{x^2}{3}+\circ(x^2)\,,$$
puis
$$\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{\operatorname{sh} x} = -\frac{1}{3}+\circ(1)\ .$$
Finalement
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{\operatorname{sh} x}\right)^{1/x^2} = \lim_{x\to 0} e^{\left(\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{\operatorname{sh} x}\right)} = e^{-1/3}\,.$$

c) On part du *d.l.* d'ordre 1 en zéro de $\alpha^x = e^{x\ln\alpha}$ qui vaut $1+x\ln\alpha+\circ(x)$. On a donc
$$8^x-4^x = (1+x\ln 8)-(1+x\ln 4)+\circ(x) = x\ln 2+\circ(x) \sim x\ln 2\,,$$
et
$$3^x-2^x = (1+x\ln 3)-(1+x\ln 2)+\circ(x) = x\ln\frac{3}{2}+\circ(x) \sim x\,\ln\frac{3}{2}\,,$$
donc
$$\lim_{x\to 0}\frac{8^x-4^x}{3^x-2^x} = \frac{\ln 2}{\ln(3/2)}\,.$$

d) Comme dans le calcul figure une division par x, on part de *d.l.* à l'ordre 1. On a tout d'abord
$$\frac{1-x}{1+x} = (1-x)(1-x+\circ(x)) = 1-2x+\circ(x)\,,$$
puis
$$\frac{1}{x}\ln\frac{1-x}{1+x} = \frac{1}{x}\ln(1-2x+\circ(x)) = \frac{1}{x}(-2x+\circ(x)) = -2+\circ(1)\ .$$
Alors
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{1/x} = \lim_{x\to 0}\exp\left[\frac{1}{x}\ln\frac{1-x}{1+x}\right] = e^{-2}$$

16. a) On pose tout d'abord $h = x-e$ et l'on cherche la limite lorsque h tend vers zéro de
$$f(e+h) = \frac{(e+h)^e - e^{e+h}}{h^2}\,.$$
On cherche un *d.l.* d'ordre 2 du numérateur. Tout d'abord
$$(h+e)^e = e^e\left(1+\frac{h}{e}\right)^e\,.$$
On utilise le *d.l.* de $(1+x)^\alpha$ en zéro, pour $\alpha = e$, et $x = h/e$, donc
$$\begin{aligned}(h+e)^e &= e^e\left(1+e\frac{h}{e}+\frac{e(e-1)}{2}\left(\frac{h}{e}\right)^2+\circ(h^2)\right)\\ &= e^e\left(1+h+\frac{e-1}{2e}h^2\right)+\circ(h^2)\,.\end{aligned}$$

En utilisant le *d.l.* de l'exponentielle, on aura

$$e^{h+e} = e^e e^h = e^e \left(1 + h + \frac{h^2}{2}\right) + \circ(h^2)\,,$$

d'où

$$(h+e)^e - e^{h+e} = -\frac{e^{e-1}}{2}\,h^2 + \circ(h^2) \sim -\frac{e^{e-1}}{2}\,h^2\,.$$

Alors

$$f(e+h) \sim -\frac{e^{e-1}}{2}\,,$$

et

$$\lim_{x\to e} \frac{x^e - e^x}{(x-e)^2} = -\frac{e^{e-1}}{2}\,.$$

b) On pose tout d'abord $h = x - e$ et l'on cherche la limite lorsque h tend vers zéro de

$$f(e+h) = \frac{(e+h)^e - e^{e+h}}{1 - \cos h}\,.$$

Pour le dénominateur on a

$$1 - \cos h = \frac{h^2}{2} + \circ(h^2) \sim \frac{h^2}{2}\,.$$

On effectue donc le développement du numérateur à l'ordre 2. Tout d'abord

$$(h+e)^e = e^e \left(1 + \frac{h}{e}\right)^e\,.$$

On utilise le *d.l.* de $(1+x)^\alpha$ en zéro, pour $\alpha = e$, et $x = h/e$, donc

$$\begin{aligned}(h+e)^e &= e^e \left(1 + e\frac{h}{e} + \frac{e(e-1)}{2}\left(\frac{h}{e}\right)^2 + \circ(h^2)\right)\\ &= e^e \left(1 + h + \frac{e-1}{2e}h^2\right) + \circ(h^2)\,.\end{aligned}$$

En utilisant le *d.l.* de l'exponentielle, on aura

$$e^{h+e} = e^e e^h = e^e \left(1 + h + \frac{h^2}{2}\right) + \circ(h^2)\,,$$

d'où

$$(h+e)^e - e^{h+e} = -\frac{e^{e-1}}{2}\,h^2 + \circ(h^2) \sim -\frac{e^{e-1}}{2}\,h^2\,.$$

Alors

$$f(e+h) \sim \frac{-\dfrac{e^{e-1}h^2}{2}}{\dfrac{h^2}{2}} = -e^{e-1}\,.$$

et

$$\lim_{x\to e} \frac{x^e - e^x}{1 - \cos(x-e)} = -e^{e-1}\,.$$

c) On pose tout d'abord $h = x - e$ et l'on cherche la limite lorsque h tend vers zéro de

$$f(e+h) = \frac{\sqrt{e+h} - \sqrt{e}}{\ln(e+h) - 1}.$$

Pour le dénominateur on obtient

$$\ln(e+h) - 1 = \ln\left(1 + \frac{h}{e}\right) \sim \frac{h}{e}.$$

On cherche donc un *d.l.* d'ordre 1 du numérateur.

$$\sqrt{e+h} - \sqrt{e} = \sqrt{e}\left(\sqrt{1 + \frac{h}{e}} - 1\right) = \sqrt{e}\left(1 + \frac{h}{2e} - 1 + \circ(h)\right) \sim \frac{h}{2\sqrt{e}},$$

d'où

$$f(e+h) \sim \frac{\dfrac{h}{2\sqrt{e}}}{\dfrac{h}{e}} = \frac{\sqrt{e}}{2},$$

et

$$\lim_{x \to e} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{1}}{\ln x - 1} = \frac{\sqrt{e}}{2}.$$

17. Posons tout d'abord $h = x - 1$. On cherche donc la limite quand h tend vers zéro de

$$f(1+h) = \frac{(2 + 2h - (1+h)^3)^{1/3} - \sqrt{1+h}}{1 - (1+h)^{3/4}}.$$

Le premier terme non nul du *d.l.* de $1 - (1+h)^{3/4}$ vaut $-3h/4$ et est de degré 1. On cherche un *d.l.* d'ordre 1 du numérateur.

$$(2 + 2h - (1+h)^3)^{1/3} = (2 + 2h - (1 + 3h + \circ(h)))^{1/3} = (1 - h + \circ(h))^{1/3} = 1 - \frac{h}{3} + \circ(h),$$

et

$$\sqrt{1+h} = 1 + \frac{h}{2} + \circ(h),$$

donc

$$(2 + 2h - (1+h)^3)^{1/3} - \sqrt{1+h} = -\frac{5h}{6} + \circ(h) \sim -\frac{5h}{6}.$$

Alors

$$f(1+h) \sim \frac{-\dfrac{5h}{6}}{-\dfrac{3h}{4}} = \frac{10}{9},$$

d'où l'on déduit

$$\lim_{x \to 1} \frac{(2x - x^3)^{1/3} - \sqrt{x}}{1 - x^{3/4}} = \frac{10}{9}.$$

18. a) En raison de la division par x^4, on cherche un *d.l.* d'ordre 4 du numérateur. On a

$$\begin{aligned}\cos x\ \mathrm{ch}\, x &= \left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\circ(x^4)\right)\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\circ(x^4)\right)\\ &= 1-\frac{x^4}{6}+\circ(x^4)\,.\end{aligned}$$

Alors

$$\ln(\cos x\ \mathrm{ch}\, x) = -\frac{x^4}{6}+\circ(x^4)\,,$$

donc

$$f(x) = -\frac{1}{6}+\circ(1)\,,$$

et

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x\ \mathrm{ch}\, x)}{x^4} = -\frac{1}{6}\,.$$

b) On cherche un équivalent du dénominateur. Compte tenu des *d.l.* de $\cos x$ et de $\mathrm{ch}\, x$, on constate qu'il faut partir à l'ordre 4, car

$$\mathrm{ch}\, x+\cos x-2 = \left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\circ(x^4)\right)+\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\circ(x^4)\right)-2 = \frac{x^4}{12}+\circ(x^4)\,.$$

Le dénominateur est donc équivalent à $x^5/12$. On cherche alors un *d.l.* d'ordre 5 du numérateur

$$\mathrm{sh}\, x+\sin x-2x = \left(x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+\circ(x^5)\right)+\left(1-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+\circ(x^5)\right)-2x = \frac{x^5}{60}+\circ(x^5)\,,$$

donc le numérateur est équivalent à $x^5/60$. Alors

$$f(x)\sim\frac{x^5/60}{x^5/12} = \frac{1}{5}\,,$$

et

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sh}\, x+\sin x-2x}{x(\mathrm{ch}\, x+\cos x-2)} = \frac{1}{5}\,.$$

c) On a

$$f(x) = \frac{x-\ln(1+x)}{x^2}\,,$$

et en raison de la division par x^2, on part d'un *d.l.* d'ordre 2 du numérateur, ce qui donne

$$x-\ln(1+x) = x-\left(x-\frac{x^2}{2}+\circ(x^2)\right) = \frac{x^2}{2}+\circ(x^2)\,,$$

donc

$$f(x) = \frac{1}{2}+\circ(1)\,,$$

et

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{\ln(1+x)}{x^2}\right) = \frac{1}{2}\,.$$

d) Puisque
$$x\ln(1-x^2) = -x^3 + \circ(x^3)\,,$$
le premier terme non nul du dénominateur est de degré 3. On part de *d.l.* d'ordre 3 du numérateur. On a
$$\sin x - x = \left(x - \frac{x^3}{6} + \circ(x^3)\right) - x = -\frac{x^3}{6} + \circ(x^3)\,,$$
donc
$$f(x) = \frac{-\dfrac{x^3}{6} + \circ(x^3)}{-x^3 + \circ(x^3)} = \frac{1}{6} + \circ(1)\,,$$
et
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x\ln(1-x^2)} = \frac{1}{6}\,.$$

e) On cherche un équivalent du dénominateur. Compte tenu des *d.l.* de $\operatorname{th} x$ et de $\tan x$, on constate qu'il faut partir à l'ordre 3. On a
$$\operatorname{th} x - \tan x = \left(x - \frac{x^3}{3} + \circ(x^3)\right) - \left(x + \frac{x^3}{3} + \circ(x^3)\right) = -\frac{2x^3}{3} + \circ(x^3)\,.$$
De même au numérateur
$$\sin x - \tan x = \left(x - \frac{x^3}{6} + \circ(x^3)\right) - \left(x + \frac{x^3}{3} + \circ(x^3)\right) = -\frac{x^3}{2} + \circ(x^3)\,.$$
Alors
$$f(x) = \frac{-\dfrac{x^3}{2} + \circ(x^3)}{-\dfrac{2x^3}{3} + \circ(x^3)} = \frac{3}{4} + \circ(1)\,,$$
et
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \tan x}{\operatorname{th} x - \tan x} = \frac{3}{4}\,.$$

f) En utilisant le *d.l.* d'ordre 3 de $\sin x$, on a
$$\sin x - x = -\frac{x^3}{6} + \circ(x^3) \sim -\frac{x^3}{6}\,,$$
donc
$$f(x) \sim \frac{-x^3\ln|x|}{6\,|x|^{5/2}}\,.$$
On en déduit donc
$$|f(x)| \sim \frac{|x|^{1/2}|\ln|x||}{6}\,,$$
et $|f|$ admet pour limite zéro, d'où
$$\lim_{x\to 0} \frac{(\sin x - x)\ln|x|}{|x|^{5/2}} = 0\,.$$

g) La fonction comporte une division par x^2, et une autre par x, on commence les calculs à l'ordre 3.

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{x - \dfrac{x^3}{6} + \circ(x^3)}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \circ(x^2)\,,$$

puis

$$\ln\frac{\sin x}{x} = \ln\left(1 - \frac{x^2}{6} + \circ(x^2)\right) = -\frac{x^2}{6} + \circ(x^2)\,,$$

et finalement

$$f(x) = -\frac{1}{6} + \circ(1)\,,$$

donc

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\,\ln\frac{\sin x}{x} = -\frac{1}{6}\,.$$

h) On peut écrire

$$f(x) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^2} - e^x\right).$$

En raison de la division par x^2. On cherche un *d.l.* d'ordre 2 de l'expression entre parenthèses. Pour avoir un *d.l.* d'ordre 2 de $\ln(1+x)/x$, on part d'un *d.l.* d'ordre 3 de $\ln(1+x)$, donc

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \circ(x^3)\,,$$

et

$$\begin{aligned}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^2 &= \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \circ(x^2)\right)^2 \\ &= 1 - x + \frac{11x^2}{12} + \circ(x^2)\,.\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}\left(\frac{x}{\ln(1+x)}\right)^2 &= \frac{1}{1 - \left(x - \dfrac{11x^2}{12} + \circ(x^2)\right)} \\ &= 1 + \left(x - \frac{11x^2}{12}\right) + \left(x - \frac{11x^2}{12}\right)^2 + \circ(x^2) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{12} + \circ(x^2)\,.\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\left(\frac{x}{\ln(1+x)}\right)^2 - e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{12} - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) + \circ(x^2) \\ &= -\frac{5x^2}{12} + \circ(x^2)\,,\end{aligned}$$

donc

$$f(x) = -\frac{5}{12} + \circ(1)\,,$$

et

$$\lim_{x\to 0}\left(\left(\frac{1}{\ln(1+x)}\right)^2 - \frac{e^x}{x^2}\right) = -\frac{5}{12}\,.$$

i) On a

$$(1-\cos x)^2 = \left(\frac{x^2}{2} + \circ(x^2)\right)^2 = \frac{x^4}{4} + \circ(x^4)\,.$$

On cherche un *d.l.* d'ordre 4 du numérateur. Tout d'abord

$$\arctan x = x\,\left(1 - \frac{x^2}{3} + \circ(x^2)\right)\,,$$

donc

$$\begin{aligned}(\arctan x)^2 &= x^2\,\left(1 - \frac{x^2}{3} + \circ(x^2)\right)^2\\ &= x^2\,\left(1 - \frac{2x^2}{3} + \circ(x^2)\right)\\ &= x^2 - \frac{2x^4}{3} + \circ(x^4)\,.\end{aligned}$$

Ensuite

$$\tan x = x\left(1 + \frac{x^2}{3} + \circ(x^2)\right) \quad \text{et} \quad \sin x = x\left(1 - \frac{x^2}{6} + \circ(x^2)\right)\,,$$

donc

$$\begin{aligned}\tan x\,\sin x &= x^2\left(1 + \frac{x^2}{3} + \circ(x^2)\right)\left(1 - \frac{x^2}{6} + \circ(x^2)\right)\\ &= x^2\left(1 + \frac{x^2}{6} + \circ(x^2)\right)\\ &= x^2 + \frac{x^4}{6} + \circ(x^4)\,.\end{aligned}$$

Finalement

$$(\arctan x)^2 - \tan x\,\sin x = -\frac{2x^4}{3} - \frac{x^4}{6} + \circ(x^4) = -\frac{5x^4}{6} + \circ(x^4)\,.$$

Alors

$$f(x) = \frac{-\dfrac{5x^4}{6} + \circ(x^4)}{\dfrac{x^4}{4} + \circ(x^4)} = -\frac{10}{3} + \circ(1)\,,$$

et

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\arctan x)^2 - \tan x\,\sin x}{(1-\cos x)^2} = -\frac{10}{3}\,.$$

j) On écrit

$$(\cos x)^{1/x^2} = \exp \frac{\ln \cos x}{x^2}\,.$$

En raison de la division par x^2, on commence par un *d.l.* d'ordre 2 de $\ln \cos x$. On a

$$\ln \cos x = \ln \left(1 - \frac{x^2}{2} + \circ(x^2)\right) = -\frac{x^2}{2} + \circ(x^2)\,,$$

et

$$f(x) = \exp\left(-\frac{1}{2} + \circ(1)\right)\,,$$

donc

$$\lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2} = e^{-1/2}\,.$$

k) En partant de l'égalité $\sin u - u = u^3/6 + \circ(u^3)$, on a donc en zéro,

$$\sin u - u \sim \frac{u^3}{6}\,,$$

et l'on obtient en posant $u = \sqrt{x}$, pour des $x > 0$,

$$\sin \sqrt{x} - \sqrt{x} \sim -\frac{x\sqrt{x}}{6}\,.$$

Par ailleurs, pour x voisin de 0 dans l'intervalle $[\,0,\,\pi\,]$,

$$\begin{aligned}
\sqrt{\sin x} &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \circ(x^3)\right)^{1/2} \\
&= \sqrt{x}\left(1 - \frac{x^2}{6} + \circ(x^2)\right)^{1/2} \\
&= \sqrt{x}\left(1 - \frac{x^2}{12} + \circ(x^2)\right)\,,
\end{aligned}$$

donc

$$\sqrt{\sin x} - \sqrt{x} = -\frac{x^2\sqrt{x}}{12} + \circ(x^2\sqrt{x})\,,$$

et

$$\sqrt{\sin x} - \sqrt{x} \sim -\frac{x^2\sqrt{x}}{12}\,.$$

Alors

$$f(x) \sim \frac{-\dfrac{x^2\sqrt{x}}{12}}{-\dfrac{x\sqrt{x}}{6}} = \frac{x}{2}\,,$$

et

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\sin x} - \sqrt{x}}{\sin \sqrt{x} - \sqrt{x}} = 0\,.$$

l) En raison de la division par x^2, on commence les calculs à l'ordre 2. Tout d'abord

$$\cos(x+x^2) = 1 - \frac{(x+x^2)^2}{2} + \circ(x^2) = 1 - \frac{x^2}{2} + \circ(x^2)\,.$$

Par ailleurs

$$\frac{1}{1+x+x^2} = 1 - (x+x^2) + (x+x^2)^2 + \circ(x^2) = 1 - x + \circ(x^2)\,,$$

donc

$$\frac{\cos(x+x^2)}{1+x+x^2} = \left(1 - \frac{x^2}{2} + \circ(x^2)\right)(1 - x + \circ(x^2)) = 1 - x - \frac{x^2}{2} + \circ(x^2)\,,$$

puis

$$\frac{\cos(x+x^2)}{1+x+x^2} - e^{-x} = 1 - x - \frac{x^2}{2} + \circ(x^2) - \left(1 - x + \frac{x^2}{2} + \circ(x^2)\right) = -x^2 + \circ(x^2)\,.$$

Finalement

$$f(x) = -1 + \circ(1)\,,$$

et

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\left(\frac{\cos(x+x^2)}{1+x+x^2} - e^{-x}\right) = -1\,.$$

19. Le dénominateur a un développement limité qui commence par un terme de degré 2. On effectue les calculs en partant de l'ordre 2 au numérateur. En utilisant le développement limité

$$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}\frac{u}{1!} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)\frac{u^2}{2!} + \circ(u^2) = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + \circ(u^2)\,,$$

on a tout d'abord, en remplaçant u par $x/4$,

$$\sqrt{4+x} = 2\sqrt{1+\frac{x}{4}} = 2\left(1 + \frac{x}{8} - \frac{x^2}{128}\right) + \circ(x^2) = 2 + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{64} + \circ(x^2)\,.$$

On a donc

$$e^x = e^2\, e^{\left(\frac{x}{4} - \frac{x^2}{64} + \circ(x^2)\right)}\,,$$

et comme l'exposant $\frac{x}{4} - \frac{x^2}{64} + \circ(x^2)$ tend vers zéro, on utilise le développement de l'exponentielle à l'ordre 2 en zéro, d'où

$$e^{\sqrt{4+x}} = e^2\left[1 + \left(\frac{x}{4} - \frac{x^2}{64}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{4} - \frac{x^2}{64}\right)^2\right] + \circ(x^2)\,.$$

On développe en ne conservant que les termes de degré plus petit que 2. Il vient

$$e^{\sqrt{4+x}} = e^2\left[1 + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{64}\right] + \circ(x^2)\,.$$

En changeant x en $-x$, on aura aussi

$$e^{\sqrt{4-x}} = e^2\left[1 - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{64}\right] + \circ(x^2)\,.$$

Alors

$$e^{\sqrt{4+x}} + e^{\sqrt{4-x}} - 2e^2 = \frac{e^2}{32}\,x^2 + \circ(x^2)\,.$$

Comme

$$\tan^2 x = x^2 + \circ(x^2)\,,$$

on en déduit que

$$f(x) = \frac{e^2}{32} + \circ(1)\,,$$

et

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sqrt{4+x}} + e^{\sqrt{4-x}} - 2e^2}{\tan^2 x} = \frac{e^2}{32}\,.$$

20. Posons $u = x - \pi/2$. En remarquant que

$$\sin\left(u + \frac{\pi}{2}\right) = \cos u \quad \text{et} \quad \cos\left(u + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin u\,,$$

on obtient

$$f(x) = f\left(u + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{1+\cos u} - \sqrt{3 - \cos^2 u}}{\sin^2 u}\,.$$

On a au dénominateur $\sin^2 u \sim u^2$. On va donc chercher le *d.l.* du numérateur à l'ordre 2, en utilisant les *d.l.* à l'ordre 2 de $\cos u$ et $\sqrt{1+u}$. On a donc

$$1 + \cos u = 2 - \frac{u^2}{2} + \circ(u^2)\,,$$

puis

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+\cos u} &= \sqrt{2 - \frac{u^2}{2} + \circ(u^2)}\\
&= \sqrt{2}\sqrt{1 - \frac{u^2}{4} + \circ(x^2)}\\
&= \sqrt{2}\left(1 - \frac{u^2}{8}\right) + \circ(u^2)\,.
\end{aligned}$$

D'autre part

$$3 - \cos^2 u = 2 + \sin^2 u = 2 + u^2 + \circ(u^2)\,,$$

donc

$$\begin{aligned}
\sqrt{3 - \cos^2 u} &= \sqrt{2 + u^2 + \circ(u^2)}\\
&= \sqrt{2}\sqrt{1 + \frac{u^2}{2} + \circ(u^2)}\\
&= \sqrt{2}\left(1 + \frac{u^2}{4}\right) + \circ(u^2)\,.
\end{aligned}$$

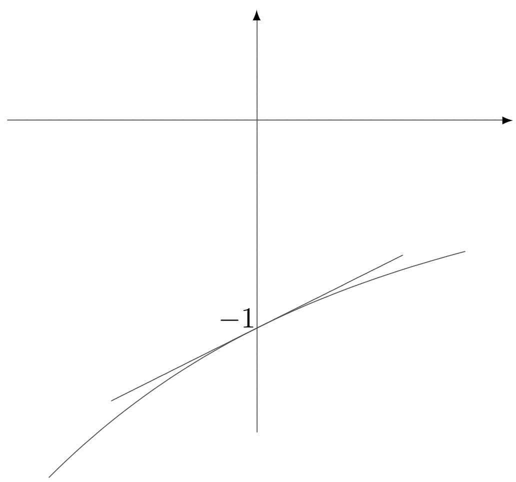
Alors
$$\sqrt{1+\cos u}-\sqrt{3-\cos^2 u}=-\frac{3}{8}\sqrt{2}\,u^2+\circ(u^2)\,,$$
et finalement
$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{3-\sin^2 x}}{\cos^2 x}=-\frac{3}{8}\sqrt{2}\,.$$

21. a) On écrit
$$u_n=e^{n\ln(1+x/n)}\,,$$
et en posant $u=1/n$, on utilise le développement de $\ln(1+u)$ en 0. On a donc
$$n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)=n\left(\frac{x}{n}+\circ\left(\frac{1}{n}\right)\right)=x+\circ(1)\,.$$
d'où l'on déduit
$$\lim_{n\to+\infty}u_n=e^x\,.$$

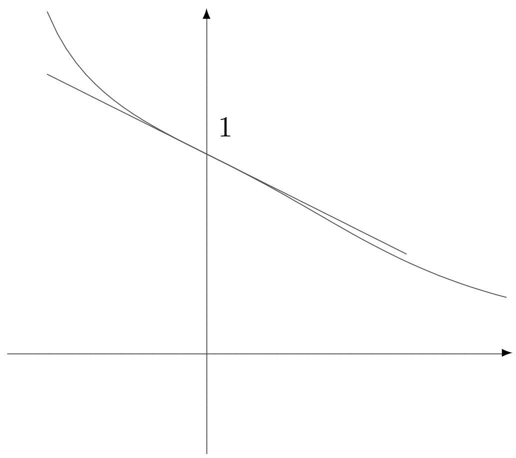
b) Posons tout d'abord $h=1/n$. On cherche la limite quand h tend vers zéro de
$$g(h)=\left(\frac{1}{2}(a^h+b^h)\right)^{1/h}\,.$$
Comme dans le calcul figure une division par h, on part de *d.l.* à l'ordre 1. En utilisant le fait que, si α est positif,
$$\alpha^h=e^{h\ln\alpha}=1+h\ln\alpha+\circ(h)\,,$$
on obtient
$$\frac{1}{2}(a^h+b^h)=\frac{1}{2}(1+h\ln a+1+h\ln b+\circ(h))=1+\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)h+\circ(h)=1+h\ln\sqrt{ab}+\circ(h)\,,$$
donc
$$\frac{1}{h}\ln\left(\frac{1}{2}(a^h+b^h)\right)=\frac{1}{h}\left(h\ln\sqrt{ab}+\circ(h)\right)=\ln\sqrt{ab}+\circ(1)\,,$$
et cette expression tend vers $\ln\sqrt{ab}$. Alors
$$g(h)=\exp\left[\frac{1}{h}\ln\left(\frac{1}{2}(a^h+b^h)\right)\right]$$
tend vers $e^{\ln\sqrt{ab}}=\sqrt{ab}$. Donc
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n=\sqrt{ab}\,.$$

22. a) On a
$$e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\circ(x^3)\,,$$

d'où
$$f(x) = -1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{6} + \circ(x^2)\,.$$
La fonction f se prolonge en zéro par la valeur -1. L'équation de la tangente à la courbe en 0 est donnée par le *d.l.* d'ordre 1 :
$$y = -1 + \frac{x}{2}\,.$$
Alors
$$f(x) - \left(-1 + \frac{x}{2}\right) = -\frac{x^2}{6} + \circ(x^2) \sim -\frac{x^2}{6}\,.$$
Lorsque x tend vers 0 la différence est négative et la courbe est en dessous de sa tangente.



b) On a
$$3\ln(1+x) - \ln(1+x^3) = 3\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right) - x^3 + \circ(x^4) = 3x - \frac{3x^2}{2} - \frac{3x^4}{4} + \circ(x^4)\,,$$
d'où
$$f(x) = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^3}{4} + \circ(x^3)\,.$$
La fonction f se prolonge en zéro par la valeur 1. L'équation de la tangente à la courbe en 0 est donnée par le *d.l.* d'ordre 1 :
$$y = 1 - \frac{x}{2}\,.$$
Alors
$$f(x) - \left(1 - \frac{x}{2}\right) = -\frac{x^3}{4} + \circ(x^3) \sim -\frac{x^3}{4}\,.$$
Lorsque x tend vers 0^+ la différence est négative et la courbe est en dessous de sa tangente, lorsque x tend vers 0^- la différence est positive et la courbe est au-dessus de sa tangente. La courbe admet un point d'inflexion au point d'abscisse 0.



c) On a

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{x}\left(e^x - \frac{1}{1-\dfrac{x^3}{6}}\right) \\
&= \frac{1}{x}\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} - \left(1 + \frac{x^3}{6}\right) + \circ(x^4)\right) \\
&= 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^3}{24} + \circ(x^3)\,.
\end{aligned}
$$

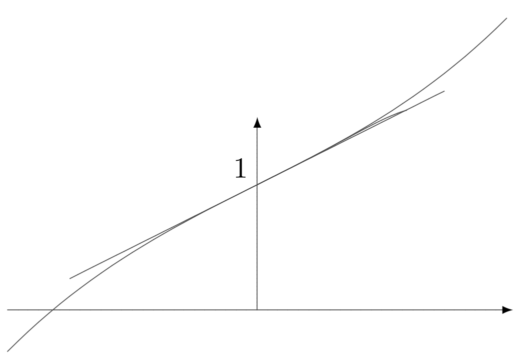
La fonction f se prolonge en zéro par la valeur 1. L'équation de la tangente à la courbe en 0 est donnée par le *d.l.* d'ordre 1 :

$$y = 1 + \frac{x}{2}\,.$$

Alors

$$f(x) - \left(1 + \frac{x}{2}\right) = \frac{x^3}{24} + \circ(x^3) \sim \frac{x^3}{24}\,.$$

Lorsque x tend vers 0^+ la différence est positive et la courbe est au-dessus de sa tangente, lorsque x tend vers 0^- la différence est négative et la courbe est en dessous de sa tangente. La courbe admet un point d'inflexion au point d'abscisse 0.



d) Il y a dans l'expression deux divisions par x. On commence le calcul avec des *d.l.* d'ordre 5.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \circ(x^5)\,,$$

donc

$$\frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} + \circ(x^4)\,,$$

et ce *d.l.* est à l'ordre 4. On utilise le *d.l.* en zéro à l'ordre 4

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \circ(u^4)\,,$$

dans lequel on remplace u par $\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120}$. On a alors

$$\begin{aligned} xf(x) \quad = \quad & \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} \\ & -\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120}\right)^2 \\ & +\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120}\right)^3 \\ & -\frac{1}{4}\left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120}\right)^4 + \circ(x^4) \end{aligned}$$

En mettant en facteur dans chaque parenthèse le terme de plus bas degré, on peut encore écrire

$$\begin{aligned} xf(x) \quad = \quad & \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} \\ & -\frac{x^2}{8}\left(1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{12}\right)^2 \\ & +\frac{x^3}{24}\left(1 + \frac{x}{3}\right)^3 \\ & -\frac{x^4}{64} + \circ(x^4)\,, \end{aligned}$$

et en développant

$$\begin{aligned} xf(x) \quad = \quad & \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} \\ & -\frac{x^2}{8}\left(1 + \frac{2x}{3} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^2}{9}\right) \\ & +\frac{x^3}{24}(1+x) \\ & -\frac{x^4}{64} + \circ(x^4)\,. \end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned} xf(x) \quad = \quad & \frac{x}{2} + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right)x^2 + \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{12} + \frac{1}{24}\right)x^3 \\ & + \left(\frac{1}{120} - \frac{1}{48} - \frac{1}{72} + \frac{1}{24} - \frac{1}{64}\right)x^4 + \circ(x^4)\,. \end{aligned}$$

On en déduit alors

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{24}x - \frac{1}{2880}x^3 + \circ(x^3)\,.$$

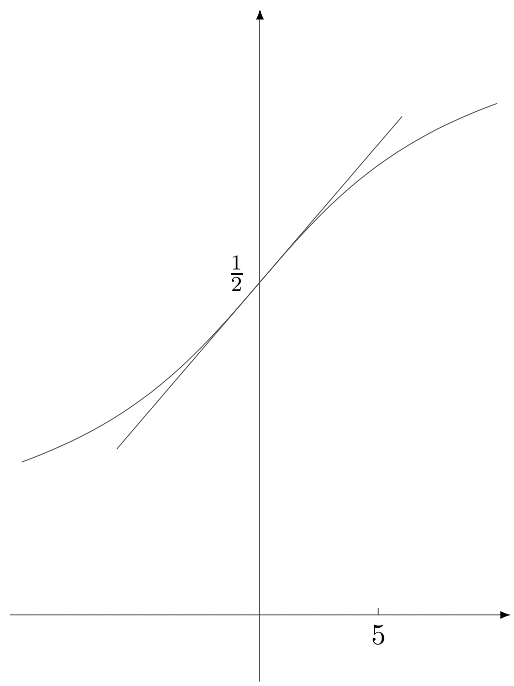
La fonction f se prolonge en zéro par la valeur $1/2$. L'équation de la tangente à la courbe en 0 est donnée par le *d.l.* d'ordre 1 :

$$y = \frac{1}{2} + \frac{1}{24}x\,.$$

Alors

$$f(x) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{24}x\right) = -\frac{1}{2880}x^3 + \circ(x^3) \sim -\frac{1}{2880}x^3\,.$$

Lorsque x tend vers 0^+ la différence est négative et la courbe est en dessous de sa tangente. Elle sera au-dessus lorsque x tend vers 0^- . La courbe admet donc un point d'inflexion en $x = 0$.



23. On pose $h = x - 1$. Alors

$$f(x) = f(1+h) = 1 + h + 2\sqrt{1+h} + 2\sqrt{1 + \frac{h}{4}}\,,$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} f(1+h) &= 1 + h + 2\left(1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + \circ(h^2)\right) - 2\left(1 + \frac{h}{8} - \frac{h^2}{16\times 8} + \circ(h^2)\right) \\ &= 1 + \frac{7h}{4} - \frac{15h^2}{64} + \circ(h^2)\,, \end{aligned}$$

donc

$$f(x) = 1 + \frac{7}{4}(x-1) - \frac{15}{64}(x-1)^2 + \circ((x-1)^2)\,.$$

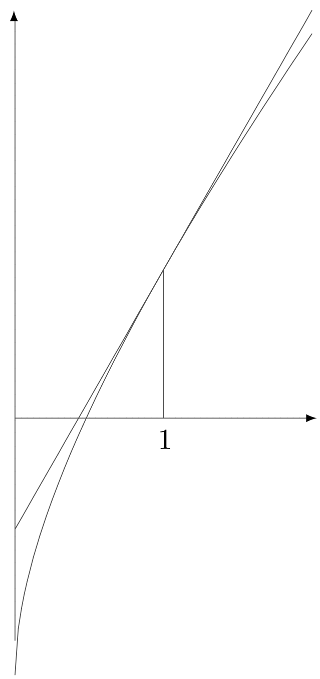
La courbe admet comme tangente la droite d'équation

$$y = 1 + \frac{7}{4}\,(x-1) = -\frac{3}{4} + \frac{7}{4}\,x\,.$$

Alors

$$f(x) - \left(1 + \frac{7}{4}\,(x-1)\right) = -\frac{15}{64}\,(x-1)^2 + \circ((x-1)^2) \sim -\frac{15}{64}\,(x-1)^2\,.$$

La position de la courbe par rapport à sa tangente au voisinage de 0, est donnée par le signe de $-\frac{15}{64}\,(x-1)^2$. La courbe est au-dessous de sa tangente au voisinage du point de coordonnées $(1, 1)$.



24. a) En mettant x^2 en facteur sous la racine, il vient

$$f(x) = \sqrt{x^2\left(1 + \frac{1}{x}\right)}\,e^{3/(2x)} = |x|\sqrt{1 + \frac{1}{x}}\,e^{3/(2x)}\,.$$

Posons $h = 1/x$, et faisons un *d.l.* de

$$\frac{f(x)}{|x|} = |h|f\left(\frac{1}{h}\right) = e^{3h/2}\sqrt{1+h}\,.$$

On obtient

$$\begin{aligned} e^{3h/2}\sqrt{1+h} &= \left(1 + \frac{3h}{2} + \frac{9h^2}{8}\right)\left(1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8}\right) + \circ(h^2) \\ &= 1 + 2h + \frac{7h^2}{4} + \circ(h^2)\,, \end{aligned}$$

donc, si x est positif

$$f(x) = x + 2 + \frac{7}{4x} + \circ\left(\frac{1}{x}\right)\,,$$

et si x est négatif

$$f(x) = -x - 2 - \frac{7}{4x} + \circ\left(\frac{1}{x}\right).$$

La courbe admet comme asymptote à $+\infty$ la droite d'équation

$$y = x + 2$$

et se trouve au-dessus de l'asymptote car

$$f(x) - (x+2) = \frac{7}{4x} + \circ\left(\frac{1}{x}\right) \sim \frac{7}{4x}$$

est du signe de $1/x$ donc positif.

Elle admet comme asymptote à $-\infty$ la droite d'équation

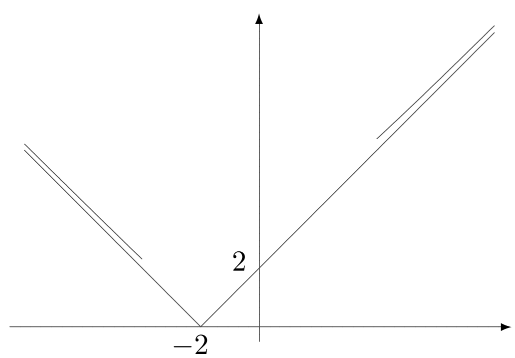
$$y = -x - 2$$

et se trouve également au-dessus de l'asymptote car

$$f(x) + (x+2) = -\frac{7}{4x} + \circ\left(\frac{1}{x}\right) \sim -\frac{7}{4x}$$

est du signe de $-1/x$ donc encore positif.

On a le dessin suivant.



b) En mettant x^2 en facteur sous la racine, il vient

$$f(x) = \sqrt{x^2\left(1 + \frac{2}{x}\right)}\, e^{1/x} = |x|\sqrt{1 + \frac{2}{x}}\, e^{1/x}.$$

Posons $h = 1/x$, et faisons un *d.l.* de

$$\frac{f(x)}{|x|} = |h| f\left(\frac{1}{h}\right) = e^h\sqrt{1+2h}.$$

On obtient

$$\begin{aligned} e^h\sqrt{1+2h} &= \left(1 + h + \frac{h^2}{2}\right)\left(1 + h - \frac{1}{8}(2h)^2\right) + \circ(h^2) \\ &= 1 + 2h + h^2 + \circ(h^2), \end{aligned}$$

donc, si x est positif

$$f(x) = x + 2 + \frac{1}{x} + \circ\left(\frac{1}{x}\right),$$

et si x est négatif

$$f(x) = -x - 2 - \frac{1}{x} + \circ\left(\frac{1}{x}\right).$$

La courbe admet comme asymptote à $+\infty$ la droite d'équation

$$y = x + 2\,,$$

et se trouve au-dessus de l'asymptote car

$$f(x) - (x+2) = \frac{1}{x} + \circ\left(\frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{x}$$

est du signe de $1/x$ donc positif.

Elle admet comme asymptote à $-\infty$ la droite d'équation

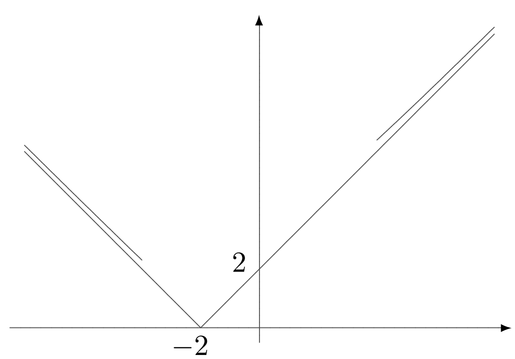
$$y = -x - 2\,,$$

et se trouve également au-dessus de l'asymptote car

$$f(x) + (x+2) = -\frac{1}{x} + \circ\left(\frac{1}{x}\right) \sim -\frac{1}{x}$$

est du signe de $-1/x$ donc encore positif.

On a le dessin suivant



c) Posons $h = 1/x$. On a alors

$$\frac{f(x)}{x} = hf\left(\frac{1}{h}\right) = \sqrt{\frac{1-3h}{1+h}}\,.$$

On effectue un *d.l.* à l'ordre 3. On a

$$\frac{1-3h}{1+h} = (1-3h)(1-h+h^2-h^3+\circ(h^3)) = 1 - 4h + 4h^2 - 4h^3 + \circ(h^3)\,.$$

Alors, en utilisant le développement en 0

$$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + \frac{u^3}{16} + \circ(u^3)\,,$$

on obtient

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{1-3h}{1+h}} &= (1-4h+4h^2-4h^3+\circ(h^3))^{1/2} \\
&= 1 + \frac{1}{2}(-4h+4h^2-4h^3) - \frac{1}{8}(-4h+4h^2-4h^3)^2 + \frac{1}{16}(-4h+4h^2-4h^3)^3 + \circ(h^3) \\
&= 1 + (-2h+2h^2-2h^3) - 2(h^2-2h^3) - 4h^3 + \circ(h^3) \\
&= 1 - 2h - 2h^3 + \circ(h^3)\,.
\end{aligned}$$

On a donc

$$f(x) = x - 2 - \frac{2}{x^2} + \circ\left(\frac{1}{x^2}\right)\,.$$

La courbe admet à $\pm\infty$ l'asymptote d'équation

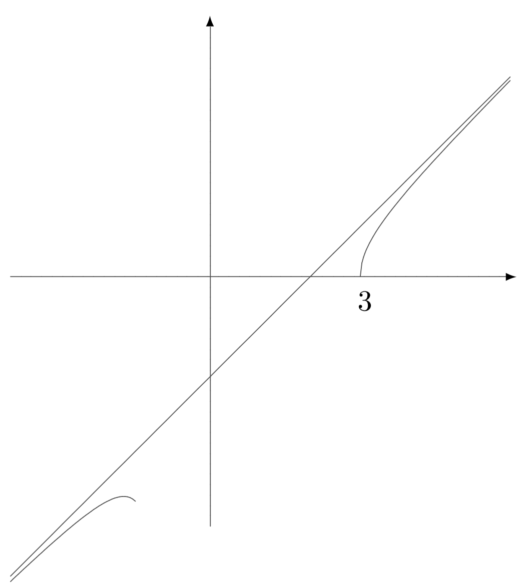
$$y = x - 2\,.$$

La différence

$$f(x) - (x-2) = -\frac{2}{x^2} + \circ\left(\frac{1}{x^2}\right) \sim -\frac{2}{x^2}\,,$$

est négative. La courbe est en dessous de l'asymptote à $+\infty$ et $-\infty$.

On a le dessin suivant



d) Posons $h = 1/x$. On a alors

$$\frac{f(x)}{x} = hf\left(\frac{1}{h}\right) = \sqrt{\frac{1-h}{1+h}}\,.$$

On effectue un *d.l.* à l'ordre 2. On a

$$\frac{1-h}{1+h} = (1-h)(1-h+h^2+\circ(h^2)) = 1-2h+2h^2+\circ(h^2)\,.$$

Alors

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{1-h}{1+h}} &= (1-2h+2h^2+\circ(h^2))^{1/2}\\ &= 1+\frac{1}{2}(-2h+2h^2)-\frac{1}{8}(-2h+2h^2)^2+\circ(h^2)\\ &= 1-h+\frac{h^2}{2}+\circ(h^2)\,.\end{aligned}$$

On a donc

$$f(x) = x-1+\frac{1}{2x}+\circ\left(\frac{1}{x}\right)\,.$$

La courbe admet à $\pm\infty$ l'asymptote d'équation

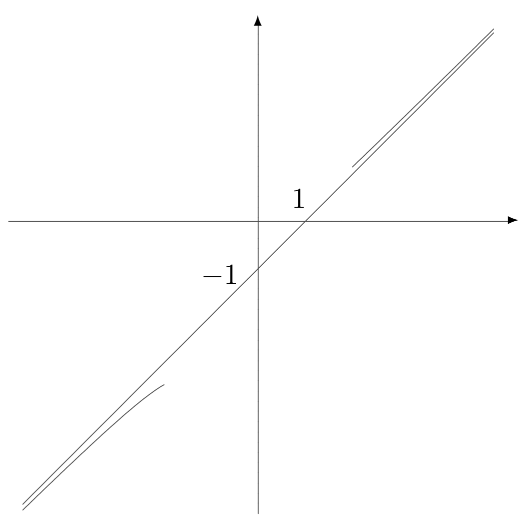
$$y = x-1\,.$$

La différence

$$f(x)-(x-1) = \frac{1}{2x}+\circ\left(\frac{1}{x^2}\right)\sim\frac{1}{2x}\,,$$

est du signe de $1/2x$. La courbe est en dessous de son asymptote à $-\infty$ et au-dessus à $+\infty$.

On a le dessin suivant.



e) Lorsque x tend vers $+\infty$ le terme prépondérant à l'intérieur du logarithme est e^{2x}. On le met en facteur. Alors

$$f(x) = \ln[e^{2x}(1-e^{-x}+3e^{-5x}+e^{-3x}+e^{-2x})] = 2x+\ln(1-e^{-x}+e^{-2x}+e^{-3x}+3e^{-5x})\,.$$

Posons $e^{-x} = h$. Cette quantité tend vers zéro. On peut effectuer un *d.l.* à l'ordre 1 en zéro de

$$\ln(1 - h + h^2 + h^3 + 3h^5) = \ln(1 - h + \circ(h)) = -h + \circ(h)\,,$$

donc

$$f(x) = 2x - e^{-x} + \circ(e^{-x})\,.$$

La courbe admet comme asymptote la droite d'équation

$$y = 2x\,,$$

et la différence

$$f(x) - 2x = -e^{-x} + \circ(e^{-x}) \sim -e^{-x}\,,$$

est du signe de $-e^{-x}$. La courbe est en dessous de son asymptote à $+\infty$.

Lorsque x tend vers $-\infty$ le terme prépondérant à l'intérieur du logarithme est $3e^{-3x}$. On le met en facteur. Alors

$$f(x) = \ln\left[3e^{-3x}\left(1 + \frac{1}{3}\left(e^{2x} + e^{3x} - e^{4x} + e^{5x}\right)\right)\right] = -3x + \ln 3 + \ln\left(1 + \frac{1}{3}\left(e^{2x} + e^{3x} - e^{4x} + e^{5x}\right)\right)\,.$$

Posons $e^{x} = h$. Cette quantité tend vers zéro. On peut effectuer un *d.l.* à l'ordre 3 en zéro de

$$\ln\left(1 + \frac{h^2}{3} + \frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{3} + \frac{h^5}{3}\right) = \ln\left(1 + \frac{h^2}{3} + \circ(h^2)\right) = \frac{h^2}{3} + \circ(h^2)\,.$$

Donc

$$f(x) = -3x + \ln 3 + \frac{1}{3}e^{2x} + \circ(e^{2x})\,.$$

La courbe admet comme asymptote la droite d'équation

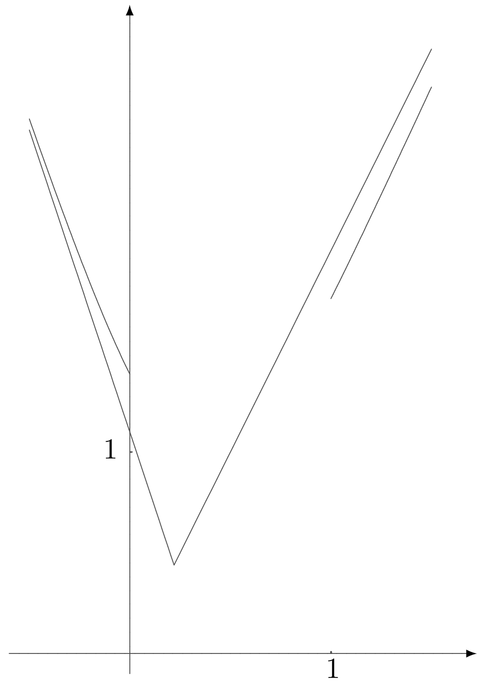
$$y = -3x + \ln 3\,,$$

et la différence

$$f(x) - (-3x + \ln 3) = \frac{1}{3}e^{2x} + \circ(e^{2x}) \sim \frac{1}{3}e^{2x}\,,$$

est du signe de $e^{2x}/3$. La courbe est au-dessus de son asymptote à $-\infty$.

On a le dessin suivant.



f) Lorsque x tend vers $+\infty$ le terme prépondérant à l'intérieur du logarithme est e^{2x}. On le met en facteur. Alors

$$f(x) = \ln[e^{2x}(1 - e^{-x} + e^{-2x} + 3e^{-5x})] = 2x + \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x} + 3e^{-5x}) .$$

Posons $e^{-x} = h$. Cette quantité tend vers zéro. On peut effectuer un *d.l.* à l'ordre 1 en zéro de

$$\ln(1 - h + h^2 + 3h^5) = \ln(1 - h + \circ(h)) .$$

On obtient

$$\ln(1 - h + h^2 + 3h^5) = -h + \circ(h) ,$$

donc

$$f(x) = 2x - e^{-x} + \circ(e^{-x}) .$$

La courbe admet comme asymptote la droite d'équation

$$y = 2x ,$$

et la différence

$$f(x) - 2x = -e^{-x} + \circ(e^{-x}) \sim -e^{-x} ,$$

est du signe de $-e^{-x}$. La courbe est en dessous de son asymptote à $+\infty$.

Lorsque x tend vers $-\infty$ le terme prépondérant à l'intérieur du logarithme est $3e^{-3x}$. On le met en facteur. Alors

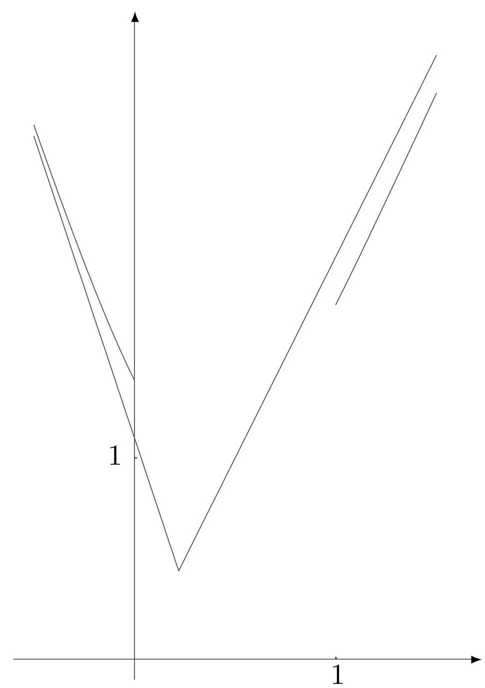
$$f(x) = \ln\left[3e^{-3x}\left(1 + \frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}e^{4x} + \frac{1}{3}e^{5x}\right)\right] = -3x + \ln 3 + \left(1 + \frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}e^{4x} + \frac{1}{3}e^{5x}\right) .$$

Posons $e^{x} = h$. Cette quantité tend vers zéro. On peut effectuer un *d.l.* à l'ordre 3 en zéro de

$$\ln\left(1 + \frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{3} + \frac{h^5}{3}\right) = \ln\left(1 + \frac{h^3}{3} + \circ(h^3)\right) .$$

On obtient
$$\ln\left(1+\frac{h^3}{3}-\frac{h^4}{3}+\frac{h^5}{3}\right)=\frac{h^3}{3}+\circ(h^3)\,,$$
donc
$$f(x)=-3x+\ln 3+\frac{1}{3}e^{3x}+\circ(e^{3x})\,.$$
La courbe admet comme asymptote la droite d'équation
$$y=-3x+\ln 3\,,$$
et la différence
$$f(x)-(-3x+\ln 3)=\frac{1}{3}e^{3x}+\circ(e^{3x})\sim\frac{1}{3}e^{3x}\,,$$
est du signe de $e^{3x}/3$. La courbe est au-dessus de son asymptote à $-\infty$.

On a le dessin suivant.



g) Posons $h=1/x$. On a alors
$$\frac{f(x)}{x}=hf\left(\frac{1}{h}\right)=\frac{1+2h-h^2+h^3}{1-h+2h^2}\,.$$
On cherche le *d.l.* d'ordre 3 en effectuant la division suivant les puissances croissantes,
$$\begin{array}{rrrr|llll}
1 & +2h & -h^2 & +h^3 & 1 & -h & +2h^2 & \\ \cline{5-8}
-1 & +h & -2h^2 & & 1 & +3h & & -5h^3 \\ \cline{1-4}
 & 3h & -3h^2 & +h^3 & & & & \\
 & -3h & +3h^2 & -6h^3 & & & & \\ \cline{2-4}
 & & & -5h^3 & & & & \\
 & & & 5h^3 & & & & \\ \cline{4-4}
 & & & 0 & & & &
\end{array}$$

donc

$$hf\left(\frac{1}{h}\right) = 1 + 3h - 5h^2 + \circ(h^2)\,,$$

et

$$f(h) = \frac{1}{h} + 3 - 5h + \circ(h)\,,$$

ce qui donne

$$f(x) = x + 3 - \frac{5}{x^2} + \circ\left(\frac{1}{x^2}\right)\,.$$

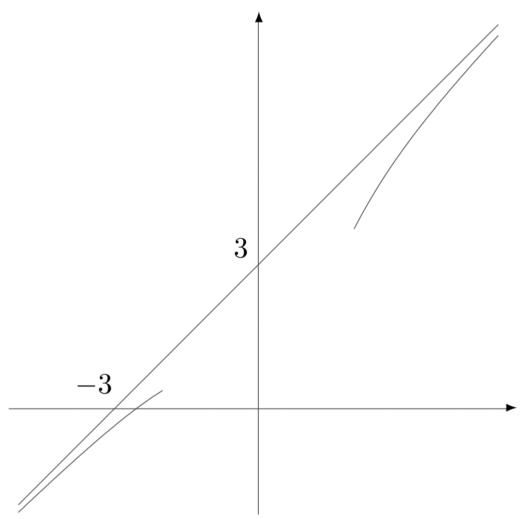
La courbe admet à $\pm\infty$ l'asymptote d'équation

$$y = x + 3\,.$$

La différence

$$f(x) - (x+3) = -\frac{5}{x^2} + \circ\left(\frac{1}{x^2}\right) \sim -\frac{5}{x^2}\,,$$

est du signe de $-5/x^2$. La courbe est en dessous de son asymptote à $\pm\infty$.



25. a) Posons $h = 1/x$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{x} = hf\left(\frac{1}{h}\right) &= \frac{1}{1+h+h^2} \\
&= 1 - (h+h^2) + (h+h^2)^2 - (h+h^2)^3 + \circ(h^3) \\
&= 1 - h + h^3 + \circ(h^3)\,,
\end{aligned}$$

donc

$$f(h) = \frac{1}{h} - 1 + h^2 + \circ(h^2)\,,$$

et

$$f(x) = x - 1 + \frac{1}{x^2} + \circ\left(\frac{1}{x^2}\right)\,.$$

La courbe admet comme asymptote à $\pm\infty$ la droite d'équation

$$y = x - 1\,.$$

On a alors

$$f(x) - (x-1) = \frac{1}{x^2} + \circ\left(\frac{1}{x^2}\right) \sim \frac{1}{x^2}\,.$$

La position de la courbe par rapport à son asymptote est donnée par le signe de $1/x^2$. La courbe est au-dessus de l'asymptote au voisinage de $+\infty$, et au voisinage de $-\infty$.

Remarque : on peut également effectuer la division euclidienne de x^3 par x^2+x+1. On obtient

$$x^3 = (x^2+x+1)(x-1)+1\,,$$

donc

$$f(x) = x - 1 + \frac{1}{x^2+x+1}\,.$$

Comme x^2+x+1 est positif pour tout x, on constate que la courbe est au-dessus de son asymptote quel que soit x.

b) Posons $h = 1/x$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{x} = hf\left(\frac{1}{h}\right) &= \frac{2-3h+4h^2}{1-h+h^2} \\
&= (2-3h+4h^2)(1+(h-h^2)+(h-h^2)^2+\circ(h^2)) \\
&= (2-3h+4h^2)(1+h)+\circ(h^2)) \\
&= 2-h+h^2+\circ(h^2)\,,
\end{aligned}$$

donc

$$f(h) = \frac{2}{h} - 1 + h + \circ(h)\,,$$

et

$$f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x} + \circ\left(\frac{1}{x}\right)\,.$$

La courbe admet comme asymptote à $\pm\infty$ la droite d'équation

$$y = 2x - 1\,.$$

On a alors

$$f(x) - (2x-1) = \frac{1}{x} + \circ\left(\frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{x}\,.$$

La position de la courbe par rapport à son asymptote est donnée par le signe de $1/x$. La courbe est au-dessus de son asymptote si $x > 1$ et au-dessous si $x < 1$.

Remarque : on peut également effectuer la division euclidienne de x^3 par x^2+x+1. On obtient

$$2x^3 - 3x^2 + 4x = (x^2-x+1)(2x-1) + x + 1\,,$$

ce qui donne

$$\frac{2x^3-3x^2+4x}{x^2-x+1} = 2x - 1 + \frac{x+1}{x^2-x+1}\,.$$

Comme $\frac{x+1}{x^2-x+1}$ est du signe de $x+1$ donc de x à l'infini, on retrouve le résultat précdent.

c) Plutôt que de faire un changement de variable de la forme $h = 1/x$, il est préférable ici de prendre $h = 1/(x-1)$, c'est-à-dire $x = 1 + 1/h$. On a alors

$$f(x) = f\left(1 + \frac{1}{h}\right) = \left(\frac{2}{h} + 3\right) e^h\,,$$

donc

$$\begin{aligned} hf\left(1 + \frac{1}{h}\right) &= (2+3h)e^h \\ &= (2+3h)\left(1 + h + \frac{h^2}{2} + \circ(h^2)\right) \\ &= 2 + 5h + 4h^2 + \circ(h^2)\,. \end{aligned}$$

On obtient

$$f\left(1 + \frac{1}{h}\right) = \frac{2}{h} + 5 + 4h + \circ(h)\,.$$

Alors

$$f(x) = 2(x-1) + 5 + \frac{4}{x-1} + \circ\left(\frac{1}{x-1}\right) = 2x + 3 + \frac{4}{x-1} + \circ\left(\frac{1}{x-1}\right)\,.$$

La courbe admet comme asymptote à $\pm\infty$ la droite d'équation

$$y = 2x + 3\,.$$

On a aussi

$$f(x) - (2x+3) = \frac{4}{x-1} + \circ\left(\frac{1}{x-1}\right) \sim \frac{4}{x-1}\,.$$

La position de la courbe par rapport à l'asymptote est donnée par le signe de $4/(x-1)$. La courbe est au-dessus de l'asymptote en $+\infty$ et au-dessous en $-\infty$.

d) Posons $h = 1/x$, on a

$$\begin{aligned} hf\left(\frac{1}{h}\right) &= \sqrt{\frac{1}{h^2} + 1} - \sqrt{\frac{1}{h^2} - 1} \\ &= \sqrt{\frac{1}{h^2}}\,(\sqrt{1+h^2} - \sqrt{1-h^2})\,. \end{aligned}$$

On utilise le *d.l.* de $(1+u)^{1/2}$ à l'orde 3 en zéro. On obtient

$$\begin{aligned} (1+u)^{1/2} &= 1 + \frac{u}{2} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)}{2}u^2 + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)\left(\frac{1}{2} - 2\right)}{6}u^3 + \circ(u^3) \\ &= 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + \frac{u^3}{16} + \circ(u^3)\,. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \sqrt{1+h^2} - \sqrt{1-h^2} &= \left(1 + \frac{h^2}{2} - \frac{h^4}{8} + \frac{h^6}{16} + \circ(h^6)\right) - \left(1 - \frac{h^2}{2} - \frac{h^4}{8} - \frac{h^6}{16} + \circ(h^6)\right) \\ &= h^2 + \frac{h^6}{8} + \circ(h^6)\,. \end{aligned}$$

Alors, puisque $\sqrt{h^2} = |h|$, on obtient, si $h > 0$,

$$f\left(\frac{1}{h}\right) = 1 + \frac{h^4}{8} + \circ(h^4)\,,$$

donc

$$f(x) = 1 + \frac{1}{8x^4} + \circ\left(\frac{1}{x^4}\right)\,,$$

et la courbe admet comme asymptote à $+\infty$ la droite d'équation

$$y = 1\,.$$

De plus

$$f(x) - 1 = \frac{1}{8x^4} + \circ\left(\frac{1}{x^4}\right) \sim \frac{1}{8x^4}\,.$$

La position de la courbe par rapport à l'asymptote est donnée par le signe de $1/(8x^4)$. La courbe est au-dessus de l'asymptote.

En $-\infty$ les signes changent

$$f(x) = -1 - \frac{1}{8x^4} + \circ\left(\frac{1}{x^4}\right)\,,$$

et la courbe admet comme asymptote à $-\infty$ la droite d'équation

$$y = -1\,.$$

Alors

$$f(x) + 1 = -\frac{1}{8x^4} + \circ\left(\frac{1}{x^4}\right) \sim -\frac{1}{8x^4}\,.$$

La position de la courbe par rapport à l'asymptote est donnée par le signe de $-1/(8x^4)$. La courbe est au-dessous de l'asymptote.

Remarque : la fonction f étant impaire, le résultat à $-\infty$ provient, par symétrie par rapport à l'origine, de celui à $+\infty$.

e) Posons $h = 1/x$. On a

$$hf\left(\frac{1}{h}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{h} - \frac{1}{1+\dfrac{h^2}{3}}\,.$$

Mais, si $h > 0$,

$$\arctan\frac{1}{h} = \frac{\pi}{2} - \arctan h\,.$$

On a donc dans ce cas

$$\begin{aligned} hf\left(\frac{1}{h}\right) &= \arctan h - \frac{1}{1+\dfrac{h^2}{3}} \\ &= (h + \circ(h^2)) - \left(1 - \frac{h^2}{3} + \circ(h^2)\right) \\ &= -1 + h + \frac{h^2}{3} + \circ(h^2)\,, \end{aligned}$$

donc

$$f(h) = -\frac{1}{h} + 1 + \frac{h}{3} + \circ(h)\,,$$

et

$$f(x) = -x + 1 + \frac{1}{3x} + \circ\left(\frac{1}{x}\right)\,.$$

La courbe admet comme asymptote à $+\infty$ la droite d'équation

$$y = -x + 1\,.$$

Alors

$$f(x) - (-x+1) = \frac{1}{3x} + \circ\left(\frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{3x}\,,$$

et la position de la courbe par rapport à l'asymptote est donnée par le signe de $1/(3x)$. La courbe est au-dessus de l'asymptote.

Si $h < 0$,

$$\arctan\frac{1}{h} = -\frac{\pi}{2} - \arctan h\,.$$

On a donc dans ce cas

$$\begin{aligned} hf\left(\frac{1}{h}\right) &= \pi + \arctan h - \frac{1}{1+\dfrac{h^2}{3}} \\ &= \pi + h - \left(1 - \frac{h^2}{3}\right) + \circ(h^2) \\ &= \pi - 1 + h + \frac{h^2}{3} + \circ(h^2)\,. \end{aligned}$$

On obtient cette fois

$$f\left(\frac{1}{h}\right) = \frac{\pi-1}{h} + 1 + \frac{h}{3} + \circ(h)\,.$$

Finalement

$$f(x) = (\pi-1)x + 1 + \frac{1}{3x} + \circ\left(\frac{1}{x}\right)\,,$$

et la courbe admet comme asymptote à $-\infty$ la droite d'équation

$$y = (\pi-1)x + 1\,.$$

Alors

$$f(x) - ((\pi-1)x+1) = \frac{1}{3x} + \circ\left(\frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{3x}\,,$$

et la position de la courbe par rapport à l'asymptote est donnée par le signe de $1/(3x)$. La courbe est en dessous de l'asymptote.

f) Il est préférable ici de prendre $h = 1/(x+1)$, c'est-à-dire $x = -1 + 1/h$. On a alors

$$f(x) = f\left(-1 + \frac{1}{h}\right) = \left(\frac{1}{h} - 2\right)e^h\,,$$

donc

$$\begin{aligned}
hf\left(-1+\frac{1}{h}\right) &= (1-2h)e^h \\
&= (1-2h)\left(1+h+\frac{h^2}{2}+\circ(h^2)\right) \\
&= 1-h-\frac{3h^2}{2}+\circ(h^2)\,.
\end{aligned}$$

On en déduit

$$f\left(-1+\frac{1}{h}\right)=\frac{1}{h}-1-\frac{3h}{2}+\circ(h)\,.$$

Alors

$$f(x)=(x+1)-1-\frac{3}{2(x+1)}+\circ\left(\frac{1}{x+1}\right)=x-\frac{3}{2(x+1)}+\circ\left(\frac{1}{x+1}\right)\,.$$

La courbe admet comme asymptote à $\pm\infty$ la droite d'équation

$$y=x\,,$$

et

$$f(x)-x=-\frac{3}{2(x+1)}+\circ\left(\frac{1}{x+1}\right)\sim-\frac{3}{2(x+1)}\,.$$

La position de la courbe par rapport à l'asymptote est donnée par le signe de $-3/(2(x+1))$. La courbe est au-dessous de l'asymptote à $+\infty$ et au-dessus à $-\infty$.

g) Posons $h=1/x$. On a

$$hf\left(\frac{1}{h}\right)=\sqrt[3]{1+h+h^3}=(1+h+\circ(h^2))^{1/3}\,.$$

On utilise le *d.l.* de $(1+u)^{1/3}$ à l'orde 2 en zéro :

$$(1+u)^{1/3}=1+\frac{u}{3}+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2}u^2+\circ(u^2)=1+\frac{u}{3}-\frac{u^2}{9}+\circ(u^2)\,,$$

donc

$$hf\left(\frac{1}{h}\right)=1+\frac{h}{3}-\frac{h^2}{9}+\circ(h^2)\,,$$

et

$$f\left(\frac{1}{h}\right)=\frac{1}{h}+\frac{1}{3}-\frac{h}{9}+\circ(h)\,.$$

Alors

$$f(x)=x+\frac{1}{3}-\frac{1}{9x}+\circ\left(\frac{1}{x}\right)\,.$$

La courbe admet comme asymptote à $\pm\infty$ la droite d'équation

$$y=x+\frac{1}{3}\,,$$

et

$$f(x)-\left(x+\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{9x}+\circ\left(\frac{1}{x}\right)\sim-\frac{1}{9x}\,.$$

La position de la courbe par rapport à l'asymptote est donnée par le signe de $-1/(9x)$. La courbe est au-dessus de l'asymptote à $-\infty$ et au-dessous en $+\infty$.

26. a) Comme on a $\ln(1+u) = u + \circ(u)$, il faudra commencer le calcul à l'ordre 3 pour obtenir un résultat final à l'ordre 2.

En partant du développement en zéro

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + \circ(u^3)\,,$$

on a

$$\ln(1+2u) = 2u - 2u^2 + \frac{8u^3}{3} + \circ(u^3)\,,$$

donc

$$\frac{\ln(1+2u)}{\ln(1+u)} = \frac{2 - 2u + \dfrac{8u^2}{3} + \circ(u^2)}{1 - \dfrac{u}{2} + \dfrac{u^2}{3} + \circ(u^2)}\,.$$

On effectue la division suivant les puissances croissantes,

$$\begin{array}{rrr|lll}
2 & -2u & +8u^2/3 & 1 & -u/2 & +u^2/3 \\ \cline{4-6}
-2 & +u & -2u^2/3 & 2 & -u & +3u^2/2 \\ \cline{1-3}
 & -u & +2u^2 & & & \\
 & u & -u^2/2 & & & \\ \cline{2-3}
 & & 3u^2/2 & & & \\
 & & -3u^2/2 & & & \\ \cline{3-3}
 & & 0 & & &
\end{array}$$

donc

$$\frac{\ln(1+2u)}{\ln(1+u)} = 2 - u + \frac{3u^2}{2} + \circ(u^2)\,.$$

Alors

$$\begin{aligned}
g(u) &= \ln\left(2 - u + \frac{3u^2}{2} + \circ(u^2)\right) \\
&= \ln 2 + \ln\left(1 - \frac{u}{2} + \frac{3u^2}{4} + \circ(u^2)\right) \\
&= \ln 2 + \left(-\frac{u}{2} + \frac{3u^2}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{u}{2} + \frac{3u^2}{4}\right)^2 + \circ(u^2) \\
&= \ln 2 - \frac{u}{2} + \frac{5u^2}{8} + \circ(u^2)\,.
\end{aligned}$$

b) On a

$$f(x) = x \ln \frac{\ln\left(1 + \dfrac{2}{x}\right)}{\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)} = xg\left(\frac{1}{x}\right)\,.$$

Quand x tend vers l'infini, $1/x$ tend vers zéro. On peut utiliser le *d.l.* de g.

$$f(x) = x\left(\ln 2 - \frac{1}{2x} + \frac{5}{8x^2} + \circ\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = x\ln 2 - \frac{1}{2} + \frac{5}{8x} + \circ\left(\frac{1}{x}\right).$$

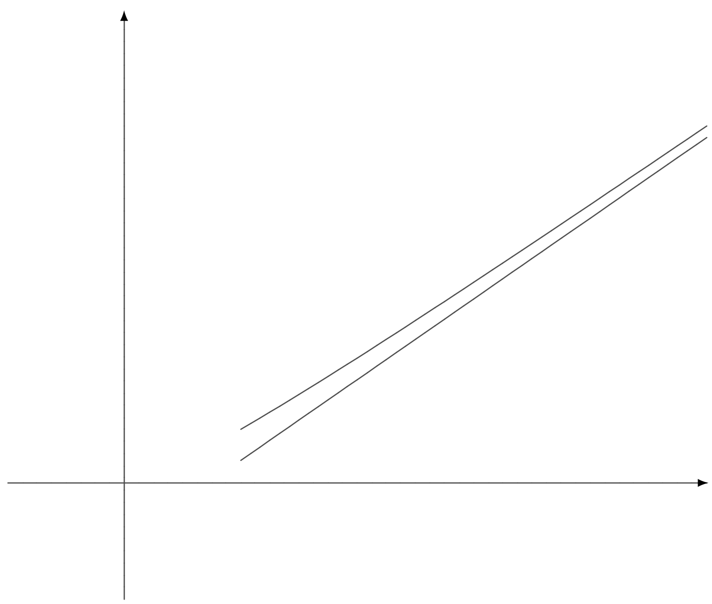
La courbe admet donc comme asymptote la droite d'équation

$$y = x\ln 2 - \frac{1}{2}.$$

De plus

$$f(x) - \left(x\ln 2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8x} + \circ\left(\frac{1}{x}\right) \sim \frac{5}{8x}.$$

La position de la courbe par rapport à cette asymptote est donnée par le signe de $5/(8x)$. La courbe est donc au-dessus de l'asymptote lorsque x tend vers $+\infty$.



27. a) En utilisant le *d.l.* de la fonction logarithme, on a

$$g(x) = \ln(1+ax) - \ln(1+bx) = \sum_{k=1}^{n}(a^k - b^k)\frac{(-1)^{k+1}x^k}{k} + \circ(x^n).$$

b) Posons $u = 1/x$. On veut obtenir un résultat de la forme

$$f\left(\frac{1}{u}\right) = \gamma u^2 + \beta + \frac{\alpha}{u} + \circ(u^2) = \frac{\alpha + \beta u + \gamma u^3 + \circ(u^3)}{u},$$

cela signifie que l'on cherche un *d.l.* d'ordre 3 en zéro de $uf(1/u)$.

$$uf\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{3 + 6u - 10u^2}{u}\ln\frac{1+4u}{1+2u}.$$

Comme on divise par u, on part d'un *d.l.* d'ordre 4 du logarithme, ce qui, d'après la question a) donne

$$\ln\frac{1+4u}{1+2u} = 2u - 6u^2 + \frac{56}{3}u^3 - 60u^4 + \circ(u^4),$$

donc

$$uf\left(\frac{1}{u}\right) = (3+6u-10u^2)\left(2-6u+\frac{56}{3}u^2-60u^3+\circ(u^3)\right) = 6-6u-8u^3+\circ(u^3)\,.$$

On en déduit

$$f(x) = 6x-6-\frac{8}{x^2}+\circ\left(\frac{1}{x^2}\right)\,.$$

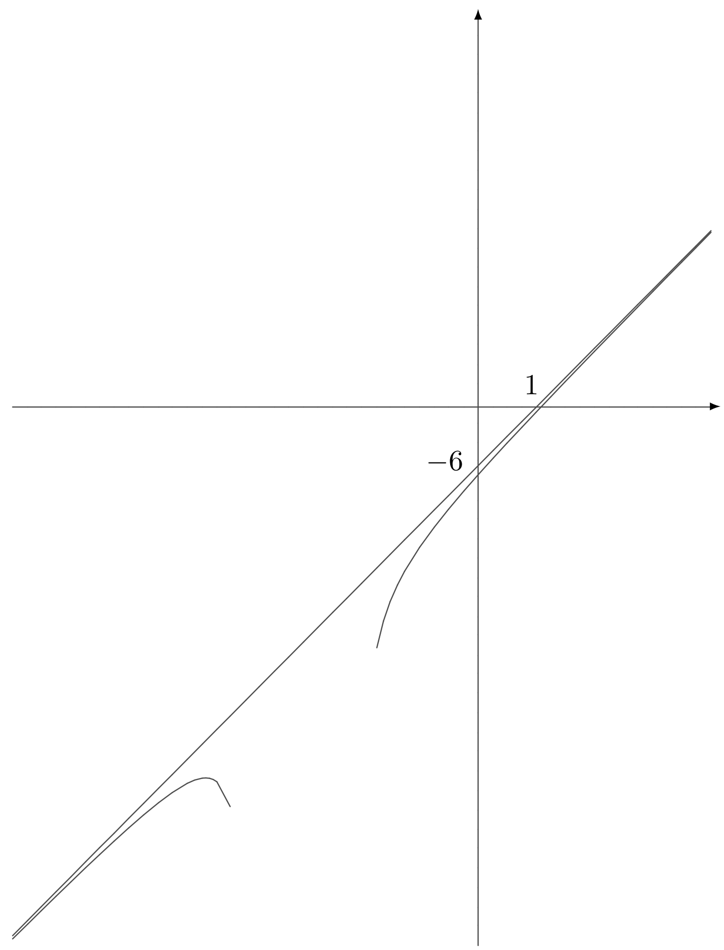
La courbe admet donc comme asymptote la droite d'équation

$$y = 6x-6\,.$$

Pa ailleurs

$$f(x)-(6x-6) = -\frac{8}{x^2}+\circ\left(\frac{1}{x^2}\right) \sim -\frac{8}{x^2}\,.$$

Le terme $-8/x^2$ étant négatif, la courbe est en dessous de son asymptote à $\pm\infty$.



28. a) On pose $u = 1/x$. Alors

$$f\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{1}{u}\sqrt{\frac{1-2u}{1+2u}}\,.$$

On a
$$\frac{1-2u}{1+2u} = (1-2u)(1-2u+4u^2+\circ(u^2)) = 1-4u+8u^2+\circ(u^2)\,,$$
puis
$$\sqrt{\frac{1-2u}{1+2u}} = 1+\frac{1}{2}(-4u+8u^2)-\frac{1}{8}(-4u+8u^2)^2+\circ(u^2) = 1-2u+2u^2+\circ(u^2)\,,$$
et donc finalement
$$f(x) = x-2+\frac{2}{x}+\circ\left(\frac{1}{x}\right)\,.$$
La courbe admet comme asymptote la droite d'équation
$$y = x-2\,.$$
La différence $f(x)-x+2$ est du signe de $2/x$. La courbe est au-dessus de son asymptote à $+\infty$ et en dessous à $-\infty$.

b) Le domaine de définition de f est l'ensemble $\,]-\infty,\,-2\,[\,\cup\,[\,2,\,+\infty\,[$. La fonction est dérivable sur l'ensemble $\,]-\infty,\,-2\,[\,\cup\,]\,2,\,+\infty\,[\,$ et
$$\begin{aligned}
f'(x) &= \sqrt{\frac{x-2}{x+2}}+x\frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x-2}{x+2}}}\frac{4}{(x+2)^2}\\
&= \left(\frac{x-2}{x+2}+\frac{2x}{(x+2)^2}\right)\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}\\
&= \frac{x^2+2x-4}{(x+2)^2}\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}\,.
\end{aligned}$$
La dérivée est du signe de x^2+2x-4 dont les racines sont $-1\pm\sqrt{5}$. On a le tableau de variation suivant

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{5}$		-2		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$			∞	$+$	
y	$-\infty$	↗	α	↘	$-\infty$		0	↗	$+\infty$

Calculons la valeur du maximum relatif $f(-1-\sqrt{5})=\alpha$. 0n a
$$\begin{aligned}
f(-1-\sqrt{5}) &= -(1+\sqrt{5})\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{-1+\sqrt{5}}}\\
&= -(1+\sqrt{5})\frac{\sqrt{(3+\sqrt{5})(1+\sqrt{5})}}{2}\\
&= -(1+\sqrt{5})\sqrt{2+\sqrt{5}}\,.
\end{aligned}$$

Ceci donne une valeur peu différente de -6 en remplaçant $\sqrt{5}$ par 2.