1. تعريف الرسملة :

نقول عن رأس مال أنه موظف بفوائد مركبة عندما تضاف الفوائد البسيطة المحصلة عند نهاية الفترة إلى الرأس المال الموظف، لتنتج معا فوائد بسيطة للفترات الموالية. وتستعمل في الغالب الفائدة البسيطة في العمليات المالية القصيرة الأجل، بينما تحسب الفائدة المركبة في العمليات المالية المتوسطة والطويلة الأجل.

الفرق الأساسي إذن بين الفائدة البسيطة والمركبة هو الرسملة، أي أن الفوائد البسيطة المحصلة نهاية كل فترة لا تكون مستحقة من طرف المستفيد، بل تبقى لتنتج هي بنفسها فوائد بسيطة أخرى للفترات الموالية.

يمكن أن تحسب الفائدة المركبة سنويا أو كل سداسي أو شهريا أو كل ثلاثة أشهر...الخ.

تطبيق رقم 01:

أوجد الفوائد البسيطة لرأس مال قدره 10 000 دج موظف لـ 03 سنوات بمعدل 5% سنويا.

الحل:

السنة	رأس المال في بداية المدة	الفوائد البسيطة	رأس المال في نهاية المدة
01	10 000	500	10 500
02	10 000	500	10 500
03	10 000	500	10 500
المجموع		1 500	11 500

تطبيق رقم02:

نفس رأس المال السابق لكنه موظف بفوائد مركبة لمدة 03 سنوات وبمعدل 5% سنويا.

أوجد الفوائد المركبة

الحل:

السنة	رأس المال في بداية المدة	الفوائد المركبة	رأس المال في نهاية المدة
01	10 000	500	10 500
02	10 500	525	11 025
03	11 025	551,25	11 576,25
المجموع		1 576,25	

ملاحظة:

في حالة الفوائد البسيطة يكون رأس المال في نهاية المدة(بعد 03 سنوات):

10 000+ 1 500= 11 500دج.

أما في حالة الفوائد المركبة، فيكون رأس المال في نهاية المدة:

10 000+ 1 576,25= 11 576,25 دج.

2. صيغة حساب الفائدة المركبة

في حالة الفائدة المركبة تستعمل الرموز التالية:

رأس المال: a، معدل الفائدة: i، المدة: n، القيمة المكتسبة: A

رأس المال في نهاية المدة	الفوائد خلال الفترة	رأس المال في بداية المدة	الفترات
$+ a . i = a (1+i)$			1
$a (1+i)+a (1+i) i = a (1+i)^2$	$(1+i) i$	$(1+i)$	2
$(1+i)^2 + a (1+i)^2 i = a (1+i)^3$	$(1+i)^2 i$	$(1+i)^2$	3
-	-	-	-
-	-	-	-
-	-	-	-
$(1+i)^{n-1} + a (1+i)^{n-1} i = a (1+i)^n$	$i \ (1+i)^{n-1}$	$(1+i)^{n-1}$	n

ومنه الصيغة العامة لحساب القيمة المكتسبة هي:

$$A = a (1+i)^n$$

ملاحظات:

1. العبارة $(1+i)^n$ توجد في الجدول المالي رقم 01.
2. القيمة المكتسبة تحتوي على رأس المال الموظف و الفوائد المتراكمة خلال فترة التوظيف.
3. القيمة المكتسبة ترتفع من سنة لأخرى بـ $(1+i)$، إذن القيم المكتسبة المتتابعة تشكل متتالية هندسية حدها الأول a وأساسها $(1+i)$.
4. الفوائد المركبة المحصلة بواسطة توظيف رأسمال a لمدة n و بمعدل i هي:

$$I = A - a = a (1+i)^n - a = a [(1+i)^n - 1]$$

5. الفوائد المركبة المحصلة المتتابعة تشكل متتالية هندسية حدها الأول ai وأساسها $(1+i)$.

تطبيق رقم 01:

نوظف بفوائد مركبة مبلغ 100 000 دج بمعدل 8% سنويا. ما هي القيمة المكتسبة بعد 10 سنوات؟

الحل:

$$A = a (1+i)^n = 100\,000 \ (1{,}08)^{10} = 100\,000 \times 2{,}158924997$$

$$= 215\,892{,}50 \ DA$$

ملاحظة:

في هذا التطبيق هناك تناسب بين معدل الفائدة والفترات(المعدل سنوي والفترات سنوية)

تطبيق رقم02:

رأس مال قيمته 150 000 دج موظف بفوائد مركبة لمدة 10 سنوات بمعدل سداسي 3%.
ما هي القيمة المكتسبة؟

الحل:

في هذا التطبيق، المعدل سداسي معناه حساب الفوائد يكون كل سداسي، وأما الفترات فهي سنوية. لكي نحدث تناسب بين الفترة والمعدل، يجب تحويل العشر سنوات إلى فترات سداسية وهي 20 فترة سداسية.

إذن: $A= 150\,000\,(1{,}03)^{20} = 150\,000 x\ 1{,}806111235 = 270\,916{,}69\ DA$

تطبيق رقم 03

1.رأس مال قيمته 50 000 دج موظف بفوائد مركبة لمدة 04 سنوات بمعدل سنوي6%، ما هي القيمة المكتسبة؟

2.نفس المبلغ موظف بفوائد مركبة لنفس المدة بمعدل سداسي 3%، ما هي القيمة المكتسبة؟

الحل:

1) $A= 50\,000(1{,}06)^4 = 50\,000 \times 1{,}26247696 = 63\,123{,}85\ DA$

2) $A= 50\,000\,(1{,}03)^8 = 50\,000 \times 1{,}266770081 = 63\,338{,}5\ DA$

ملاحظة:

في نظام الفوائد المركبة، بنفس المعدل(معدلات متناسبة) ولنفس المدة، القيمة المكتسبة ترتفع عندما تكون فترات الرسملة منخفضة.

تطبيق رقم04:

رأس مال قيمته 200 000 دج موظف بفوائد مركبة لمدة 05 سنوات بمعدل سداسي 3%.
ما هي القيمة المكتسبة وماهي قيمة الفوائد المتراكمة؟

الحل:

1) $A= 200\,000(1{,}03)^{10} = 200\,000 \times 1{,}34391638 = 268\,783{,}28\ DA$

2) $I = 200\,000[(1{,}03)10 - 1] = 200\,000 \times 0{,}34391638 = 68\,783{,}28\ DA$

أو $I= A - a = 268\,783{,}28 - 200\,000 = 68\,783{,}28\ DA$

3. الحل العقلاني والحل التجاري

في وضع الصيغة العامة للقيمة المكتسبة فرضنا أن المدة n هو عدد كامل. لكن في الواقع n يمكن أن تكون عكس ذلك، فمثلا يمكن أن تكون المدة هي 5 سنوات و4 أشهر، أي عدد كسري.

في هذه الحالة، يوجد حلين:

أ) الحل العقلاني: يقتضي استعمال الصيغة العامة للفائدة المركبة للجزء الكامل، وحساب الفوائد البسيطة للجزء الكسري $n = k+\frac{p}{q}$ أي:

$$A= a\,(1+i)^k(1 + \frac{p}{q}\,i)$$

تطبيق:

رأس مال قيمته 400 000 دج موظف بفوائد مركبة لمدة 05 سنوات و7 أشهر بمعدل سنوي 6%، باستعمال الحل العقلاني، ما هي القيمة المكتسبة ؟

الحل:

$$A= 400\,000(1{,}06)^5\,(1+\frac{7}{12} \times 0{,}06)$$
$$A = 400\,000\,(1{,}338225578) \times (1{,}035)= 554\,025{,}39\ DA.$$

ب) الحل التجاري:

تقتضي هذه الطريقة استعمال الصيغة العامة لكل المدة $n = k+\frac{p}{q}$

أي:

$$A= a\,(1+i)^{n+p/q}$$

تطبيق:

باستعمال الحل التجاري، ما هي القيمة المكتسبة في المثال السابق؟

الحل:

$$A=400\,000(1{,}06)^5 \times (1{,}06)^{\frac{7}{12}}$$
$$A=400\,000(1{,}338225578) \times (1{,}03457446413) = 553\,797{,}6\ DA$$

ملاحظة:

القيمة المكتسبة، باستعمال الحل التجاري أصغر من القيمة المكتسبة محسوبة باستعمال الحل العقلاني.

4. المعدل المتناسب

المعدل المتناسب هو تقسيم المعدل السنوي على عدد الفترات المعنية.

إذا كان المعدل السنوي i_a، تكون المعدلات المتناسبة:

المعدل السداسي المتناسب: $i_s = \frac{ia}{2}$

المعدل الثلاثي المتناسب: $i_t = \frac{ia}{4}$

المعدل الشهري المتناسب: $i_m = \frac{ia}{12}$

تطبيق:

ما هي المعدلات المتناسبة للمعدل السنوي 12%؟

الحل:

المعدل السداسي المتناسب: $i_s = \frac{12}{2} = 6\%$

المعدل الثلاثي المتناسب: $i_t = \frac{12}{4} = 3\%$

المعدل الشهري المتناسب: $i_m \; \frac{12}{12} = 1\%$

ملاحظة:

في حساب الفوائد البسيطة، باستعمال معدلين متناسبين لمبلغ معين ولنفس المدة، نتحصل على نفس القيمة المكتسبة. أما في حساب الفوائد المركبة، القيمة المكتسبة ليست نفسها(ترتفع بانخفاض طبيعة الفترة).

5. المعدل المتكافئ

نقول عن معدلين أنهما متكافئين عندما يعطيان لنفس المدة، نفس القيمة المكتسبة بفوائد مركبة.

$$(1+ia)^1 = a\,(1+is)^2 \Rightarrow (1+ia)^1 = (1+is)^2$$

$$\Rightarrow (1+is)^2 = \sqrt{(1+ia)1} \Rightarrow is = \sqrt{(1+ia)1} - 1 = (1+ia)^{\frac{1}{2}} - 1.$$

وبصفة عامة، إذا كان المعدل السنوي i_a، تكون المعدلات المتكافئة:

المعدل السداسي المتكافئ: $i_s = (1+ia)^{\frac{1}{2}} - 1$

المعدل الثلاثي المتكافئ: $i_t = (1+ia)^{\frac{1}{4}} - 1$

المعدل الشهري المتكافئ: $i_m = (1+ia)^{\frac{1}{12}} - 1$

بصفة عامة، المعدل المتكافئ: $i_q = (1+ia)^{\frac{1}{q}} - 1$

تطبيق:

أخوين ورث كل منهما 100 000 دج، ويتمنيان الحصول على نفس القيمة المكتسبة بعد 5 سنوات بتوظيف هذا المبلغ بفوائد مركبة مع اختلاف الفترات. الأخ الأكبر يفضل رسملة سنوية بمعدل 7%، أما الأخ الأصغر فيفضل رسملة سداسية. ما هو معدل التوظيف السداسي؟

تأكد من تساوي القيم المكتسبة بعد 5 سنوات؟

الحل:

$i_s = \sqrt{(1,07)} - 1 = 3,44\%.$

للتأكد:

$100\,000\,(1+ia)^5 = 100\,000\,(1,07)^5 = 140\,255,17$ DA

$100\,000\,(1+is)^{10} = 100\,000\,(1,0344)^{10} = 140\,255,17$ DA

ملاحظة: الجدول المالي رقم 6، يعطي لنا الفوائد المركبة السداسية.

6. المعدل الاسمي والمعدل الحقيقي

معدل الفائدة المركبة عادة يحدد و يعطى سنويا، و لكن من الممكن أن تحسب الفائدة يوميا أو شهري أو كل شهرين أو كل ثلاثة أشهر أو ستة أشهر....الخ. وفي هذه الحالة يجب تجزئة معدل الفائدة المعطى على أساس سنوي إلى عدة فترات.

يحسب معدل الفائدة الحقيقي بالعلاقة التالية:

$$i_r = (1 + \frac{i}{p})^p - 1$$

حيث: i_r هو المعدل الحقيقي، i هو المعدل الإسمي، p هو عدد المرات التي يحسب الفائدة بها خلال سنة واحدة.

تطبيق:

أوجد المعدل الحقيقي للفائدة في الحالات التالية: 8%سنويا تحسب الفائدة كل 3 أشهر، 6% تحسب الفائدة كل ستة أشهر، 9%تحسب الفائدة كل شهرين.

الحل

1) $ir = (1 + \frac{0,08}{4})^4 - 1 = 8,24\%.$

2) $ir = (1 + \frac{0,06}{2})^2 - 1 = 6,06\%.$

3) $ir = (1 + \frac{0,09}{6})^6 - 1 = 9,43\%.$

1. تعريف الاستحداث

الاستحداث هي عملية عكسية للرسملة، ونعني بها حساب القيمة الحالية لمبلغ يدفع مستقبلا. بمعنى آخر، القيمة الحالية هو المبلغ الذي يجب توظيفه الآن بفائدة مركبة للحصول على مبلغ آخر بعد n مدة.

2. صيغة حساب القيمة الحالية

من صيغة الرسملة: $A = a\,(1+i)^n$، نبحث عن a التي تمثل القيمة الحالية:

$$a = \frac{A}{(1+i)n} = A\,(1+i) - n \Rightarrow a = A(1+i)^{-n}$$

ملاحظة01:

إذا رمزنا لرأس المال بـ a و للقيمة الحالية بـ V_0 فتصبح العلاقة كالتي:

$$V_0 = a(1+i)^{-n}$$

ملاحظة02:

القيمة $(1+i)^{-n}$ نجدها في الجدول المالي رقم02.

ملاحظة03:

تطبق عملية الاستحداث بكثير في حساب مردودية الاستثمارات، بحيث نقوم باستحداث التدفقات النقدية التي ينتجها الاستثمار عبر الزمن.

تطبيق رقم 01:

ما هي القيمة الحالية بمعدل 9%سنويا لمبلغ 600 000 دج، يدفع بعد 12سنة؟الحل:

$$V_0 = a(1+i)^{-n} = 600\,000(1+i)^{-12}$$

$$= 600\,000 \times 0{,}355534725 = 213\,320{,}84\ DA$$

هذا يعني أن إذا قمنا بتوظيف مبلغ 213 320,84 دج بمعدل 9%، نتحصل في نهاية السنة 12 على المبلغ 600 000 دج.

تطبيق رقم 02:

قمنا باستثمار مبلغ 1 000 000 دج وكانت التدفقات النقدية السنوية التقديرية كما يلي:

السنة	1	2	3	4	5
التدفقات النقدية التقديرية (دج)	50 000	100 000	200 000	400 000	500 000

المطلوب:

بمعدل 9%، هل هذا الإستثمار ذو مردودية أم لا؟

الحل:

للإجابة على هذا السؤال، يجب استحداث التدفقات ومقارنتها مع مبلغ الاستثمار 1 000 000دج

السنة	1	2	3	4	5
التدفقات النقدية (دج)	50 000	100 000	200 000	400 000	500 000
معامل الاستحداث	$(1,09)^{-1}$ = 0,9174311	$(1,09)^{-2}$ = 0,8416799	$(1,09)^{-3}$ = 0,77218348	$(1,09)^{-4}$ = 0,70842521	$(1,09)^{-5}$ = 0,64993138
القيمة الحالية(دج)	45 871,56	84 167,99	154 436,70	283 370,08	324 965,69
القيمة الحالية المتراكمة(دج)	-	130 039,55	284 476,25	567 846,33	892 812,02

مردودية هذا الاستثمار غير كافية حيث نتحصل في نهاية السنة الخامسة على مبلغ 892 812,02 دج مقابل استثمار قدره 1 000 000 دج.

. تقييم رأسمال في تاريخ ما

هو البحث عن قيمة مبلغ في تاريخ معطى.

تطبيق:

للتخلص من دين متحصل عليه قبل 5سنوات،شخص عليه الدفع حالا 320 000 دج. في وقت سابق، اتفق هذا الشخص مع بنكه على ما يلي:

- إما دفع مستعجلا بعد 3 سنوات
- وإما طلب زيادة في الأجل بسنتين

المطلوب:

بمعدل فائدة مركبة 6% سنويا، ماهي القيمة التي يجب دفعها في الحالة الأولى، وماهي القيمة في الحالة الثانية؟

الحل:

حساب :

$$a = A(1+i) - n = 320\,000(1{,}06)^{-5} = 320\,000 \times 0{,}747258172$$

$$= 239\,122{,}62\ DA.$$

حساب a في الحالة الأولى: هناك امكانيتين

1- $a_1 = A(1+i)^{-n} = 320\,000(1,06)^{-2} = 320.000 \times 0,889996440 =$ 284 798,86 DA.

2- $a_1 = a(1,06)^3 = 239\,122,62 \times 1,191016 = 284\,798,86$ DA.

حساب a في الحالة الثانية:

هناك ثلاث طرق:

1/ $a_2 = A(1+i)^n = 320\,000\,(1,06)^2 = 320\,000 \times 1,1236 = 359\,522$ DA.

2/ $a_2 = a_1\,(1,06)^4 = 284\,798,86 \times 1,26247696 = 359\,522$ DA.

3/ $a_2 = a(1,06)^7 = 239\,122,62 \times 1,503630258 = 359\,522$ DA.