# Chapitre 2

# Séries entières, fonctions analytiques et fonctions élémentaires

## 2.1 Séries entières

Une série entière est une série de fonctions de la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ où les coefficients $a_n$ sont des nombres complexes, ainsi que $z = x + iy\,;\ x, y \in \mathbb{R}$.

### 2.1.1 Définitions et propriétés

Dans tout ce qui suit $\sum a_n z^n$ désigne une série entière.

**Définition 2.1** *( Rayon de convergence )*
*On appelle rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$*

$$R = \sup \left\{ r \geq 0 : \sum |a_n|\ r^n < +\infty \right\}$$

*Le rayon de convergence existe toujours, il peut valoir $0$, $+\infty$ ou un nombre fini.*
*Le rayon de convergence peut être obtenu comme suit :*

**Lemme 2.1** *( D'abel ) - Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est*

$$R = \sup \left\{ r \geq 0 : \sup_n |a_n|\ r^n < +\infty \right\}$$

***Preuve.*** *soit $R$ Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ et soit $R_0 = \sup \{ r \geq 0 : \sup_n |a_n|\ r^n < +\infty$*
.

*. Soit $r_0 < R_0$, alors il existe $M$ tel que $|a_n|\ r_0^n \leq M$ et donc si $r < r_0$, on a $|a_n|\ r^n = |a_n|\ r_0^n \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \leq M \left(\frac{r}{r_0}\right)^n$, et donc $\sum |a_n|\ r^n < +\infty$, puisque son terme général est majoré par celui d'une série géométrique convergente, on a donc $R \geq r_0$ et donc, en passant à la limite quand $r_0$ tend vers $R_0^-$, on obtient $R \geq R_0$.*

*. Si $r < R$, par définition $\sum |a_n|\ r^n < +\infty$, et donc en particulier la suite $(|a_n|\ r^n)_n$ est bornée, si bien que $R \leq R_0$.* ■

**Exemple 2.1** *- La série $\sum z^n$ est une série entière dont tous les coefficients sont égaux à $1$.*
*- $\sum z^n$ est une série entière dont les coefficients d'ordres paires valent $1$,les coefficients d'ordres impaires sont nuls.*

**Théorème 2.1** *Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R$, alors*
*1)- Si $R = 0$, la série n'est convergente que pour $z = 0$.*
*2)- Si $0 < R < +\infty$, pour tout $r < R$, la série $\sum a_n z^n$ converge normalement sur le disque fermé $\overline{D(0, r)}$, et est divergente en tout point $z$, $|z| > R$.*
*3)- Si $R = +\infty$, la série $\sum a_n z^n$ converge normalement sur tout disque fermé ( ou sur toute partie bornée de $\mathbb{C}$ ).*

**Remarque 2.1** *. Ce théorème signifie que le domaine de convergenge d'une série entière est forcèment un disque avec des lacunes sur les frontières. Cela implique que si une série converge, par exemple, sur un triangle, elle convergera forcèment sur un domaine plus gros ( au moins le disque circonscrit ).*
*. Le théorème de dite rien sur ce qui se passe sur cercle $C(0, R)$.*

## Somme et produit des séries entières convergentes

**Proposition 2.1** *Soient $A = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $B = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ deux séries entières dont les rayons de convergence $R_1$ et $R_2$ sont non nuls.*
*Alors chacune des séries entières $A + B$ et $A.B$ a un rayon de convergence au moins égale à $R_0 = \inf(R_1, R_2)$ et pour $|z| < R_0$, on a*

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n + b_n) z^n &= \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n + \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n \\ \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n z^n &= \left[\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n\right]\left[\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n\right]\end{aligned}$$

*où $c_n = \sum_{k=0}^{n} (a_{n-k} b_k)$.*

**Preuve.** On pose $\gamma_n = |a_n| + |b_n|$ , $\delta_n = \sum_{k=0}^{n} |a_k| |b_{n-k}|$ . soit $z$, $|z| < R_0 = \inf (R_1, R_2)$ .
Alors les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $B = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ sont absolument convergentes. Donc

$$\begin{aligned} \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n + b_n| z^n &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \gamma_n |z|^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n| |z|^n + \sum_{n\in\mathbb{N}} |b_n| |z|^n < +\infty \\ \sum_{n\in\mathbb{N}} |c_n| |z^n| &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_n |z^n| = \left[\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n| |z|^n\right] \left[\sum_{n\in\mathbb{N}} |b_n| |z|^n\right] \end{aligned}$$

Les séries entiers $A + B$ et $A.B$ sont donc convergentes pour $|z| < R_0$. Ce qui achève la preuve. ■

**Définition 2.2** ***( Disque de convergence )***
*Soit $R$ le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ . Si $0 < R < +\infty$, le disque $D(0, R)$ est appelé le* ***disque de convergence*** *de cette série.*

## Détermination du rayon de convergence

**Proposition 2.2** *Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R$. Alors on a*

$$R = \frac{1}{\limsup \left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right)}$$

***Preuve.*** *( Exercice )* ■

**Remarque 2.2** *- Si la suite $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)_n$ tends vers $l$ ( $0 \leq l \leq +\infty$ ) lorsque $n$ tend vers $+\infty$, le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est $R = \frac{1}{l}$.*

**Exemple 2.2** *- Déterminer le rayon de convergence de la série entière suivante :$\sum_{n\in\mathbb{N}} (1+i)^n z^n$ .
On a $a_n = (1+i)^n$ , donc $|a_n| = \left(\sqrt{2}\right)^n = 2^{\frac{n}{2}}$, donc $R = \frac{1}{\limsup\left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right)} = \frac{1}{\limsup 2^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.*

**Proposition 2.3** *- Les séries entières $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} n a_n z^{n-1}$ ont le même rayon de convergence.*
***Preuve.*** *- On note $\grave{R}$ le rayon de convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} n a_n z^{n-1}$. On pose $\alpha_n = |a_n|$, on sait que pour $r < \grave{R}$ on a :*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} n\alpha_n r^{n-1} < +\infty$$

*Donc, pour $r < \grave{R}$ , on a $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n r^n \leq r \sum_{n\in\mathbb{N}} n\alpha_n r^{n-1} < +\infty$, donc $r < R$ et par suite $\grave{R} \leq R$.
Inversement, soit $r < R$ et soit $\grave{r}$ tel que $r < \grave{r} < R$, alors*

$$n\alpha_n r^{n-1} = \frac{n\alpha_n}{\grave{r}} (\grave{r})^n \left(\frac{r}{\grave{r}}\right)^{n-1}$$

*Comme $\grave{r} < R$, la suite $(\alpha_n (\grave{r})^n)$ est majorée par une constante $M$. Donc*

$$n\alpha_n r^{n-1} \leq \frac{M.n}{\grave{r}} \left(\frac{r}{\grave{r}}\right)^{n-1}$$

*La série de terme général* $n\left(\frac{r}{\grave{r}}\right)^{n-1}$ *est convergente , donc* $\sum_{n\in\mathbb{N}} n\alpha_n r^{n-1}$ *est convergente, et aussi* $r < \grave{R}$ *, et par suite* $R \leq \grave{R}$ *, d'où* $R = \grave{R}$*.* ■

## 2.2 Fonctions analytiques

**Définition 2.3** *Soit* $\Omega$ *un ouvert de* $\mathbb{C}$*, et soit* $f$ *une fonction de* $\Omega$ *dans* $\mathbb{C}$*.*
*On dit que* $f$ *est* ***analytique en un point*** $z_0 \in \Omega$*, si elle est* ***développable en série entière*** *au voisinage de* $z_0$*, c-à-d il existe* $r > o$ *et une suite* $(a_n)_n \in \mathbb{C}$ *tels que* $D(z_0, r)$ *et*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \quad , \forall z \in D(z_0, r)$$

*- Et on dit que* $f$ *est analytique sur* $\Omega$ *si elle est analytique en tout poit de* $\Omega$*.*

**Exemple 2.3** *. Le polynôme de degré* $n$ *est une fonction analytique en tout pont de* $\mathbb{C}$*; en effet , on a d'aprés la formule de Taylor*

$$P(z) = P(z_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} P^{(k)}(z_0)(z - z_0)^k$$

### Principe des zéros isolés pour les séries entiéres

**Proposition 2.4** *Soit* $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *la* ***somme*** *d'une série entière de rayon de convergence* $R > 0$*. Supposons qu'il existe au moins un des coefficents* $a_n$ *non nul, alors il existe* $r > 0$ *tel que* $f(z) \neq 0$ *pour* $0 < |z| < r$*.*
***Preuve.*** *Soit* $n_0 = \inf\{n \geq 0, a_n \neq 0\}$*, alors on a*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = z^{n_0} g(z),$$

*où*

$$g(z) = \sum_{n \geq n_0}^{+\infty} a_{n_0+k} z^k, \text{ avec } g(0) = a_{n_0} \neq 0.$$

*Comme* $g$ *est la somme d'une série entière, elle est continue à l'interieur de son disque de convergence. Donc il existe un voisinage de* $0$ *sur le quel* $g(z) \neq 0$*.*
*En particulier,* $\exists r > 0 : g(z) \neq 0, \forall z \in D(0, r)$ *. Et comme* $f(z) = z^{n_0} g(z)$*, alors* $f(z) \neq 0$ *pour tout* $z \in D(0, r)$ *.* ■

**Proposition 2.5** *Soit* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *une fonction analytique. Alors* $f$ *admet un* ***unique developpement*** *en série entière au voisinage de chaque point de* $\Omega$*.*

**Preuve.** Soit $z_0 \in \Omega$, supposons que pour tout $z$ dans un voisinage de $z_0$ : $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z - z_0)^n, \forall z \in D(z_0, r)$, Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n - b_n)(z - z_0)^n = 0, \forall z \in D(z_0, r)$, Donc $a_n - b_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$ ( D'après le pricipe des zéros isolés pour les séries entières ). d'où $a_n = b_n, \forall n \in \mathbb{N}$. ■

## Notion de dérivée

On va donner la notion de **la dérivée d'une fonction complexe**, qui nous reviendrons en détail au chapitre suivant.

**Définition 2.4** *Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et $f$ une fonction définie sur un voisinage de $z_0$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$, on dit que $f$ est **dérivable** en $z_0$ si la limite*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

*existe, et dans ce cas on l'appelle dérivée de $f$ en $z_0$ et l'on note $f'(z_0)$ où $\frac{df}{dz}(z_0)$.*

**Théorème 2.2** *Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière dont le rayon de convergence $R$ est non nul. Alors la somme $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est une fonction dérivable, sur le disque de convergence, et dans ce disque on a*

$$\acute{f}(z_0) = \sum_{n \geq 1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}$$

**Proposition 2.6** *Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction analytique en un point $z_0 \in \Omega$, alors les **coefficients** $a_n$ du developpement en série entière de $f$ au voisinage de $z_0$ sont donnés par*

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0), \forall n \in \mathbb{N}.$$

***Preuve.*** *On a d'abord que la somme d'une série entière est une fonction indéfiniment dérivable sur son disque de convergence d'après le théorème précédent.*
*On pose, maintenant, $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$, on a pour toit $k \in \mathbb{N}$ et tout $z$ du disque de convergence*

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)(n-2)....(n-k+1)(z - z_0)^{n-k}$$

*En particulier, pour $z = z_0$ on a $f^{(k)}(z_0) = k.a_k, \forall k \in \mathbb{N}$.*
*Et d'après l'unicitè du developpement en série entière, on obtient*

$$f(z) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0)(z - z_0)^k$$

*ce qui prouve la proposition.* ■