Module
Logique combinatoire et séquentiel
Technologie

Université de KHEMIS MILIAN
Faculté des Sciences et de la

Département Sciences de Technologie

Niveau / spécialités L2 : AP /ELN / Elect

Année univ : 2019/20

## TD N°3 : Simplification des fonctions

### Exercice N°1 : Simplifier les équations suivantes :

$$F_1 = a.b + \overline{c} + c.(\overline{a} + \overline{b})$$
$$F_2 = (x\,\overline{y} + z).(x + \overline{y}).z$$
$$F_3 = (x + y).z + \overline{x}.(\overline{y} + z) + \overline{y}$$
$$F_4 = (a + b + c).(\overline{a} + b + c) + a.b + b.c$$

### Exercice N°2 : Établir les tables de vérité des fonctions suivantes, puis les écrire sous les deux formes canoniques :

1. $F_1 = XY + YZ + XZ$

| $X$ | $Y$ | $Z$ | $F_1$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

- Première forme canonique

$$F_1 = \overline{X}YZ + X\overline{Y}Z + XY\overline{Z} + XYZ$$

- Seconde forme canonique

$$F_1 = (X+Y+Z)(X+Y+\overline{Z})(X+\overline{Y}+Z)(\overline{X}+Y+Z)$$

2. $F_2 = X + YZ + \overline{Y}\,\overline{Z}\,T$

| $X$ | $Y$ | $Z$ | $T$ | $F_2$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

- Première forme canonique

$$F_2 = \overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}\,T + \overline{X}YZ\overline{T} + \overline{X}YZT + X\overline{Y}\,\overline{Z}\,\overline{T} + X\overline{Y}\,\overline{Z}T + X\overline{Y}Z\overline{T} + X\overline{Y}ZT + XY\overline{Z}\,\overline{T} + XY\overline{Z}T + XYZ\overline{T} + XYZT$$

- Seconde forme canonique

$$F_2 = (X+Y+Z+T)(X+Y+\overline{Z}+T)(X+Y+\overline{Z}+\overline{T})(X+\overline{Y}+Z+T)(X+\overline{Y}+Z+\overline{T})$$

3. $F_3 = (X+Y)(\overline{X}+Y+Z)$

| $X$ | $Y$ | $Z$ | $F_3$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

- Première forme canonique

$$F_3 = \overline{X}Y\overline{Z} + \overline{X}YZ + X\overline{Y}Z + XY\overline{Z} + XYZ$$

- Seconde forme canonique

$$F_3 = (X+Y+Z)(X+Y+\overline{Z})(\overline{X}+Y+Z)$$

4. $F_4 = (\overline{X}+\overline{Z})(X+\overline{T}+Z)Y\overline{Z}$

| $X$ | $Y$ | $Z$ | $T$ | $F_4$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

- Première forme canonique

$$F_4 = \overline{X}Y\overline{Z}\,\overline{T} + XY\overline{Z}\,\overline{T} + XY\overline{Z}T$$

- Seconde forme canonique

$$F_4 = (X+Y+Z+T)(X+Y+Z+\overline{T})(X+Y+\overline{Z}+T)(X+Y+\overline{Z}+\overline{T})(X+\overline{Y}+Z+\overline{T})(X+\overline{Y}+\overline{Z}+T)(X+\overline{Y}+\overline{Z}+\overline{T})$$
$$(\overline{X}+Y+Z+T)(\overline{X}+Y+Z+\overline{T})(\overline{X}+Y+\overline{Z}+T)(\overline{X}+Y+\overline{Z}+\overline{T})(\overline{X}+\overline{Y}+\overline{Z}+T)(\overline{X}+\overline{Y}+\overline{Z}+\overline{T})$$

*Mr IKNI*

**Université de KHEMIS MILIAN**
**Faculté des Sciences et de la**

**Département Sciences de Technologie**



## TD N°3 : Simplification des fonctions

5. $F_5 = (\overline{X}Y + X\overline{Y})\overline{Z} + (\overline{X}\,\overline{Y} + XY)Z$

| $X$ | $Y$ | $Z$ | $F_5$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

- Première forme canonique

$$F_5 = \overline{X}\,\overline{Y}Z + \overline{X}Y\overline{Z} + X\overline{Y}\,\overline{Z} + XYZ$$

- Seconde forme canonique

$$F_5 = (X + Y + Z)(X + \overline{Y} + \overline{Z})(\overline{X} + Y + \overline{Z})(\overline{X} + \overline{Y} + Z)$$

6. $F_6 = \overline{X} + YZ$

| $X$ | $Y$ | $Z$ | $F_6$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

- Première forme canonique

$$F_6 = \overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z} + \overline{X}\,\overline{Y}Z + \overline{X}Y\overline{Z} + \overline{X}YZ + XYZ$$

- Seconde forme canonique

$$F_6 = (\overline{X} + Y + Z)(\overline{X} + Y + \overline{Z})(\overline{X} + \overline{Y} + Z)$$

7. $F_7 = \overline{X}\,\overline{Y}Z + X\overline{Y}Z + X\overline{Y}\,\overline{Z} + XY\overline{Z} + XYZ$

| $X$ | $Y$ | $Z$ | $F_7$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

- Première forme canonique : c'est la forme de l'énoncé.

$$F_7 = \overline{X}\,\overline{Y}Z + X\overline{Y}\,\overline{Z} + X\overline{Y}Z + XY\overline{Z} + XYZ$$

- Seconde forme canonique

$$F_7 = (X + Y + Z)(X + \overline{Y} + Z)(X + \overline{Y} + \overline{Z})$$

8. $F_8 = (\overline{X} + \overline{Y} + Z)(X + \overline{Y} + Z)(X + \overline{Y} + \overline{Z})(X + Y + \overline{Z})(X + Y + Z)$

| $X$ | $Y$ | $Z$ | $F_8$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

- Première forme canonique

$$F_7 = X\overline{Y}\,\overline{Z} + X\overline{Y}Z + XYZ$$

- Seconde forme canonique : c'est la forme de l'énoncé.

$$F_8 = (X + Y + Z)(X + Y + \overline{Z})(X + \overline{Y} + Z)(X + \overline{Y} + \overline{Z})(\overline{X} + \overline{Y} + Z)$$

**Exercice N°3 : Complémenter** les expressions suivantes (sans simplification) :

1. $F_1 = \overline{X}\,\overline{Y} + XY + \overline{X}Y$  4. $F_4 = X\overline{Y}Z\overline{T} + \overline{X}YT + \overline{X}\,\overline{Z} + (Z + T)(X\overline{Y} + Z)$

2. $F_2 = X(\overline{Y}\,\overline{Z} + YZ) + \overline{X}Y\overline{Z} + \overline{X}\,\overline{Y}Z$  3. $F_3 = X\overline{Y} + Z\overline{T} + \overline{X}\,\overline{Y} + \overline{Z}\,\overline{T}$

Solution :

Module
Logique combinatoire et séquentiel
Technologie

Université de KHEMIS MILIAN
Faculté des Sciences et de la
Département Sciences de Technologie

Niveau / spécialités L2 : AP /ELN / Elect

Année univ : 2019/20

## TD N°3 : Simplification des fonctions

1. $\overline{F_1} = (X+Y)(\overline{X}+\overline{Y})(X+\overline{Y})$
2. $\overline{F_2} = (\overline{X}+(Y+Z)(\overline{Y}+\overline{Z}))(X+\overline{Y}+Z)(X+Y+\overline{Z})$
3. $\overline{F_3} = (\overline{X}+Y)(\overline{Z}+T)(X+Y)(Z+T)$
4. $\overline{F_4} = (\overline{X}+Y+\overline{Z}+T)(X+\overline{Y}+\overline{T})(X+Z)(\overline{Z}\,\overline{T}+(\overline{X}+Y).\overline{Z})$

**Exercice N°4 :** Écrire sous la première forme canonique les fonctions définies par les propositions suivantes :

1. $f(A,B,C)=1$ si et seulement si aucune des variables $A$, $B$, $C$ ne prend la valeur 1
2. $f(A,B,C)=1$ si et seulement si au plus une des variables $A$, $B$, $C$ prend la valeur 0
3. $f(A,B,C)=1$ si et seulement si exactement une des variables $A$, $B$, $C$ prend la valeur 1
4. $f(A,B,C)=1$ si et seulement si au moins l'une des variables $A$, $B$, $C$ prend la valeur 0
5. $f(A,B,C)=1$ si et seulement si exactement deux des variables $A$, $B$, $C$ prennent la valeur 1
6. $f(A,B,C)=1$ si et seulement si au moins deux des variables $A$, $B$, $C$ prennent la valeur 0
7. $f(A,B,C)=1$ si et seulement si les variables $A$, $B$, $C$ prennent la valeur 1

Solution :

Utiliser les combinaisons des variables pour lesquelles $f = 1$.

1. $f(A,B,C) = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$
2. $f(A,B,C) = \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC$
3. $f(A,B,C) = \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C}$
4. $f(A,B,C) = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}C + AB\overline{C}$
5. $f(A,B,C) = \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C}$
6. $f(A,B,C) = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C}$
7. $f(A,B,C) = ABC$

**TD N°3 : Simplification des fonctions**

## Exercice N° 5 :

Trouvez les équations des tables de vérité de **S**, **T** et **U** avec les variables **A**, **B**, **C** et **D** :

| A | B | C | D | S | T | U |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

## Exercice N° 6 : Démontrer les relations suivantes

1. $AB + ACD + \overline{B}D = AB + \overline{B}D$
2. $(\overline{A} + B)(A + C)(B + C) = (\overline{A} + B)(A + C)$
3. $AB + \overline{B}C = (A + \overline{B})(B + C)$
4. $\overline{A\overline{B} + \overline{A}B} = AB + \overline{A}\,\overline{B}$
5. $\overline{(A + B)(\overline{A} + C)} = (A + \overline{B})(\overline{A} + \overline{C})$

Solution :

1. $AB + ACD + \overline{B}D = AB + ACD\underbrace{(B + \overline{B})}_{=1} + \overline{B}D = AB + ABCD + A\overline{B}CD + \overline{B}D$

$$= AB\underbrace{(1 + CD)}_{=1} + \overline{B}D\underbrace{(1 + AC)}_{=1} = AB + \overline{B}D$$

2. $(\overline{A} + B)(A + C)(B + C) = (\overline{A} + B)(A + C)(B + C + \underbrace{\overline{A}A}_{=0}) = (\overline{A} + B)(A + C)(B + C + \overline{A})(B + C + A)$

$$= (\overline{A} + B + \underbrace{0.C}_{=0})(A + C + \underbrace{0.B}_{=0}) = (\overline{A} + B)(A + C)$$

3. $AB + \overline{B}C = AB\underbrace{(1 + C)}_{=1} + \overline{B}C\underbrace{(1 + A)}_{=1} = AB + \overline{B}C + ABC + A\overline{B}C = AB + \overline{B}C + AC$

$$= AB + \underbrace{\overline{B}B}_{=0} + \overline{B}C + AC = (A + \overline{B})B + (A + \overline{B})C = (A + \overline{B})(B + C)$$

4. $\overline{A\overline{B} + \overline{A}B} = \overline{A\overline{B}}.\overline{\overline{A}B} = (\overline{A} + B)(A + \overline{B}) = \underbrace{\overline{A}A}_{=0} + \overline{A}\overline{B} + BA + \underbrace{B\overline{B}}_{=0} = AB + \overline{A}\,\overline{B}$

5. $\overline{(A + B)(\overline{A} + C)} = \overline{A + B} + \overline{\overline{A} + C} = (\overline{A}.\overline{B}) + (A.\overline{C}) = \underbrace{(\overline{A} + A)}_{=1}(\overline{A} + \overline{C})(\overline{B} + A)(\overline{B} + \overline{C})$

$$= (\overline{A} + \overline{C})(A + \overline{B})(\underbrace{\overline{A}A}_{=0} + \overline{B} + \overline{C}) = (\overline{A} + \overline{C})(A + \overline{B})(\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})(A + \overline{B} + \overline{C})$$

$$= (\overline{A} + \underbrace{0.\overline{B}}_{=0} + \overline{C})(A + \overline{B} + \underbrace{0.\overline{C}}_{=0}) = (A + \overline{B})(\overline{A} + \overline{C})$$