Module : Analyse Complexe
Eenseignante : Fouzia Chita
Chapitre "4 " : Fonctions harmoniques élémentaires:
Fonctions homoghraphiques, La fonction exponentielle et ses acolytes, les fonctions logarithme et les fonctions puissance

Dans ce chapitre nous introduisons les notions des fonctions harmoniques, et de montrer que les fonctions élémentaires réelles peuvent être généralisées aux complexes et de souligner les particularités que nous y rencontrerons alors

0.1 Fonctions harmoniques

Définition 1 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert non vide. On dira que la fonction $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est harmonique si elle est solution de l'équation de Laplace :*

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Exemple 1 *Montrons que la fonction $u(x,y) = x^2 + 2x - y^2$ est harmonique.*

On a pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$u(x,y) = x^2 + 2x - y^2 \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2x+2) = 2 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}(-2y) = -2 \end{cases}$$

On obtient $\Delta u(x,y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

Proposition 1 *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert non vide et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction dont les parties réelle et imaginaire sont de classe c^2. Alors le Laplacien de la fonction f(z) est donné par la formule*

$$\Delta(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \overline{z}} = 4\frac{\partial^2 f}{\partial \overline{z} \partial z}$$

Preuve 1 *Notons que si $u(x,y)$ est une fonction réelle de classe C^2 on aura*

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \overline{z}} &= 2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y}\right). \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y}\right). \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + i\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - i\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ &= \Delta(u) \end{aligned}$$

Proposition 2 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert non vide et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction* ***holomorphe****.*

Si les parties réelle et imaginaire de la fonction f sont de ***classe*** C^2 ***sur*** Ω *alors elles sont* ***harmoniques****.*

Preuve 2 *Notons que puisque $f(z) = u(x,y)+iv(x,y)$ est holomorphe sur Ω alors les fonctions u(x,y) et v(x,y) vérifient les conditions de Cauchy-Riemann i.e:*

$$\forall (x,y) \in \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad et \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Ainsi, comme les fonctions u et v sont de classe C^2 on pourra écrire $\forall (x,y) \in \Omega$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) \overbrace{=}^{car\ v\in C^2} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) \Longrightarrow \Delta u = 0.\\
\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) \overbrace{=}^{car\ u\in C^2} -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) \Longrightarrow \Delta v = 0.
\end{aligned}$$

Donc, la partie réelle et la partie imaginaire de f(z) sont harmoniques sur Ω.

Remarque 1 *Si l'on a deux fonctions harmoniques quelconques u(x,y), v(x,y), cela ne veut pas dire que la fonction f doit obligatoirement être une fonction holomorphe.*

Pour qu'il en soit ainsi, les fonctions u et v doivent en outre vérifier les conditions de Cauchy-Riemann.

Définition 2 *Si deux fonctions harmoniques u et v vérifient les conditions de Cauchy— Riemman*
alors elles sont appelles des fonctions conjugués harmoniques i.e
v est la conjugué harmonique de u et u est la conjugué harmonique de v.

Proposition 3 *Si deux fonctions harmoniques u et v vérifient les conditions de Cauchy— Riemann, alors elles sont la partie réelle et la partie imaginaire d'une fonction holomorphe*

Exemple 2 *Vérifions que la fonction $u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ est harmonique sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ et cherchons sa conjuguée harmonique v(x,y).*

En effet, puisque pour tout $(x,y) \neq (0,0)$ on a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} \Longrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{-2x(x^2+y^2) - 4x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3} = \frac{-2x(3y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^3}$$

et

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \Longrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{-2x(x^2+y^2) + 8xy^2}{(x^2+y^2)^3} = \frac{-2x(-3y^2+x^2)}{(x^2+y^2)^3}$$

On conclut que la fonction $u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ est harmonique sur son domaine de définition.

Cherchons une fonction harmonique v(x,y) qui soit solution du système des équations aux dérivées partielles suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{\partial(x^2+y^2)^2} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} v &= -\frac{y}{x^2+y^2} + \varphi(x) \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} + \varphi^{'}(x). \end{cases} Ainsi,comme$$

$\varphi^{'}(x) = 0$ on conclut que la fonction $v(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2} + Cte$ est une conjuguée harmonique de la fonction harmonique $u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$.
Notons aussi que pour tout $z = x + iy \neq 0$ on peut crire que

$$\begin{aligned} u(x,y) + iv(x,y) &= \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{-y}{x^2+y^2} + iCte \\ &= \frac{\overline{z}}{|z|^2} + iCte \\ &= \frac{1}{z} + iCte \end{aligned}$$

Corollaire 1 *(Equation de Laplace et de Poisson). 1)La solution générale de l'equation de Laplace*

$$\Delta(u(x,y)) = 0$$

s'écrit sous la forme, $u(x,y) = F(z) + G(\overline{z})$, où F et G sont deux fonction à deux variables réelle de classe C^2
2)Soit $\rho(x,y)$ une fonction continue. La solution générale de l'equation de Poisson

$$\Delta(u(x,y)) = \rho(x,y)$$

est égale à la somme $u_0(x,y)+u(x,y)$ avec $u_0(x,y)$ est une solution particulière de l'équation de Poisson et u(x,y) est une fonction harmonique arbitraire (ie. solution de l'équation de Laplace)

0.2 Fonctions harmoniques élémentaires

Comme on l'a déjà dit, les fonctions rationnelles sont holomorphes en dehors leurs pôles. Parmi ces fonctions rationnelles, les fonctions **homographiques** jouent un rôle particulier.

0.2.1 Fonctions homographiques

Si a,b,c et d sont quatre nombres complexes tels que $ad - bc \neq 0$, la fonction

$$f : z \longrightarrow \frac{az+b}{cz+d}$$

est applée **homographie**. (Si $ad - bc = 0$, f dégénère en la fonction constante égale à $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$)
Si de plus $c \neq 0$ cette fonction admet un pole simple en $z_0 = -\frac{d}{c}$.
Cette fonction a la propriété remarquable de transformer tout cercle ou droite en un cercle ou une droite. Plus précisément, on a le

Théorème 1 *Si $ad - bc \neq 0$, et $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ pour tout $z \neq z_0 := -\frac{d}{c}$, alors*

– *l'image par f d'un cercle ne passant pas par z_0 est un cercle,*

– *l'image par f d'une droite ne passant pas par z_0 est un cercle,*

– *Si C est un cercle passant par z_0, $f(C - \{z_0\})$ est une droite,*

– *Si D est une droite passant par z_0, $f(C - \{z_0\})$ est une droite,*

Preuve 3 *la preuve de ce résultat est un exercice d'algèbre-géométrie.*

Remarque 2 *Les homographies préservent les angles, puisque c'est le cas de translations, rotations, homothéties, inversion et symétries orthogonales. Ce sont des cas particuliers de ce qu'on appelle des **transformations conformes**.*

0.2.2 Fonction exponentielle et ses acolytes

Définition 3 *On définit l'exponentielle d'un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ par l'expression*

$$z = x + iy \longrightarrow e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$$

Si on désigne par $u(x,y) = e^x \cos(y)$ la partie réelle et par $v(x,y) = e^x \sin(y)$ la partie imaginaire de l'exponentielle complexe e^z on obtient deux fonctions de classe C^∞ sur R^2, de plus comme en tout point de $\mathbb{R}^2$ on a les conditions de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad et \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

*On déduit alors que la fonction exponentielle $z \longrightarrow e^z$ est **holomorphe** sur $\mathbb{C}$.*

Proposition 4 *L'exponentielle de tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ est égal à $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$, Elle est entière,c'est-à-dire holomorphe dans tout le plan complexe. Elle ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$, elle permet de définir d'autres fonctions entière, que sont*

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \cosh z = \frac{e^z + e^z}{2}$$

Les dérivées de ces fonctions sont

$$\sin^{'} z = \cos z, \cos^{'} z = -\sin z, \sinh^{'} z = \cosh z, \cosh^{'} z = \sinh z$$

La définition de l'exponentielle complexe et la proposition précédente permettent de déduire qu'on a les propriétés suivantes:
1)$\forall z \in \mathbb{C},\ \frac{de^z}{dz} = e^z$;
2)$\exp(\mathbb{C}) := \{e^z; \forall z \in \mathbb{C}\} = \mathbb{C}^*$;
3)$\forall z,z^{'} \in \mathbb{C},\ \ e^{z+z^{'}} = e^z e^{z^{'}}$;
4)$\forall z \in \mathbb{C}, e^{-z} = \frac{1}{e^z}$;
5)$\forall k \in \mathbb{Z},\ \forall z \in \mathbb{C}, e^{z+2k\pi i} = e^z$

0.2.3 Logarithmes complexes $z \longrightarrow \log(z)$

Au paragraphe précédent on a vu que l'exponentielle complexe $z \longrightarrow e^z$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et son image $\exp(\mathbb{C}) := \mathbb{C}^*$. Donc, pour tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}^*$ il existe au moins un nombre complexe $u(z) \in \mathbb{C}$ solution de l'équation $e^u = z$.

Définition 4 *Soient $z \in \mathbb{C}^*$ et $u \in \mathbb{C}$. Si l'exponentielle complexe $e^u = z$ on dira que le nombre complexe $u \in \mathbb{C}$ est un logarithme de z.*

Il est facile de vérifier que pour tout nombre complexes $z \in \mathbb{C}^*$ si on utilise l'expression $e^{x+iy} = e^x e^{iy}$ on peut trouver un logarithme complexe $u = x+iy \in \mathbb{C}$ de $z(z = |z|\, e^{i\arg(z)}) \in \mathbb{C}^*$. par

$$u = \log(|z|) + i\arg(z) \quad et \quad 0 \leq \arg(z) \prec 2\pi$$

Soit l'ensemble des ouverts

$$D_k = \{x + iy \in \mathbb{C}; x \in \mathbb{R} \quad et \quad (2k-1)\pi \prec y \prec (2k+1)\pi\} \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

L'image de cet ensemble par la fonction $z \longrightarrow e^z$ est donné par

$$\exp(D_k) = U_\pi = \mathbb{C} - \left\{x + i0; \forall x \in \mathbb{R}^-\right\}$$

Ainsi, pour tout entier $k \in \mathbb{C}$ la fonction logarithme complexe

$$\begin{array}{rcl} \log_k : U_\pi & \longrightarrow & D_k \\ z & \longrightarrow & \log_k \end{array}$$

holomorphe et sa fonction dérivée est donnée par l'expression

$$\forall z \in U_\pi, \quad \frac{d}{dz}(\log_k(z)) = \frac{1}{z}$$

Définition 5 *La foction logarithme complexe*

$$\begin{array}{rcl} \log_0 : U_\pi & \longrightarrow & D_0 \\ z & \longrightarrow & \log(|z|) + i\arg(z) \end{array}$$

S'appelle ***la détermination principale*** *ou (brancht) du logarithme complexe.*

Ainsi, on peut associer à chaque nombre complexe $z \in U_k$ un unique logarithme complexe défini par:

$$\log_k(z_0) = \log_0(z) + 2k\pi i \quad telque \quad \exp(\log_k(z)) = z$$

Exemple 3 *Calculons le logarithme complexe des nombres compelexes*

$$z_1 = -1,\ z_2 = i,\ z_3 = 1 + i$$

notons que puisque la représentation polaire de z_1, z_2 et z_3 est donnée par

$$z_1 = 1e^{i\pi}, \quad z_2 = 1e^{i\frac{\pi}{2}}, \quad z_3 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

On déduit que la détermination principale du logarithme complexe est égale à:

$$\log(z_1) = \log(-1) = \log(1e^{i\pi}) = \log(1) + i(\pi + 2k\pi) = i\pi(k = 0)$$

$$\log(z_2) = \log(i) = \log(1e^{i\frac{\pi}{2}}) = \log(1) + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = i\frac{\pi}{2}(k = 0)$$

$$\log(z_3) = \log(1 + i) = \log(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}) = \log(\sqrt{2}) + i(\frac{\pi}{4} + 2k\pi) = i\frac{\pi}{4}(k = 0)$$

Remarque 3 *La détermination principale de logarithme complexe prolonge le logarithme népérien de l'ouvert $\mathbb{R}_+^*$ sur l'ouvert U_k mais ne préserve pas la propriété classique qui consiste à transformer le produit de deux nombres complexes en une somme de leurs logarithmes complexes.*

Proposition 5 *Pour tout nombres complexes z_1 et z_2 de l'ouvert U_π on a l'expression suivante*

$$\log(z_1.z_2) = \log(z_1) + \log(z_2) + i2k\pi, \quad \textit{où} \quad k = -1,0,1$$

Preuve 4

$$\begin{aligned}
\log(z_1.z_2) &= \log(|z_1.z_2|\, e^{i(\arg(z_1)+\arg(z_2))}) \\
&= \log|z_1.z_2| + i\,(\arg(z_1) + \arg(z_2)) + i2k\pi, \quad k = -1,0,1 \\
&= \underbrace{\log|z_1| + i\,(\arg(z_1))}_{\log(z_1)} + \underbrace{\log|z_2| + i\,(\arg(z_2))}_{\log(z_2)} + i2k\pi, \quad k = -1,0,1 \\
&= \log(z_1) + \log(z_2) + i2k\pi, \quad k = -1,0,1
\end{aligned}$$

On peut supposer que $\arg(z_1) \in]-\pi,\pi[$ *et* $\arg(z_2) \in]-\pi,\pi[$, *on a trois possibilités pour* $\arg(z_1) + \arg(z_2)$

$$\begin{cases}
\arg(z_1) + \arg(z_2) \leq -\pi, k = -1, \Longrightarrow \log(z_1.z_2) = \log(z_1) + \log(z_2) - i2\pi \\
\arg(z_1) + \arg(z_2) \in]-\pi,\pi], k = 0, \Longrightarrow \log(z_1.z_2) = \log(z_1) + \log(z_2) \\
\arg(z_1) + \arg(z_2) \succ \pi, k = 1, \Longrightarrow \log(z_1.z_2) = \log(z_1) + \log(z_2) + i2\pi
\end{cases}$$

Exemple 4 *Calculons le logarithme complexe de nombres compelexe* $(z_1.z_3)$

$$\log(z_1z_3) = \log(-1 - i) = \log(\sqrt{2}) + i\frac{5\pi}{4} + i2k\pi$$

puisque $\arg(z_1) + \arg(z_3) \leq -\pi$ *on en déduit que* $k = -1$*, d'où*

$$\log(z_1z_3) = \log(\sqrt{2}) - i\frac{3\pi}{4}.$$

0.2.4 Les puissances complexes $z \longrightarrow z^a$

Soit $a \in \mathbb{C}$ on définit la puissance d'un nombre complexe $z \in \mathbb{C}^*$ par l'expression

$$z^a = e^{a \log_k(z)}$$

où $\log_k(z) : U_k \longrightarrow D_k$ désigne une détermination du logarithme complexe. Donc, pour tout $a \in \mathbb{C}\ \mathbb{Z}$ la puissance z^a est une fonction multiforme et sa détermination principale est donnée par la fonction

$$\begin{array}{rcl} w_a : U_\pi & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longrightarrow & e^{a\log(z)} \end{array}$$

qui est **holomorphe** et sa dérivée est donnée en tout point $z \in U_\pi$ par l'expression

$$\frac{d}{dz}(z^a) = az^{a-1}$$

Les puissances complexes vérifient les propriétés suivantes:

1. $z^a.z^b = z^{a+b}$;
2. $(z.w)^a = z^a.w^a.e^{2\pi iak}$ où $k = -1$ ou $k = 0$ ou $k = 1$
3. $(z^a)^b = z^{ab}e^{2\pi ibk}$ où $k \in \mathbb{Z}$
4. $\log(z^a) = a\log(z) + 2\pi ki$ où $k \in \mathbb{Z}$

Exemple 5 *Calculons les puissances complexes suivantes*

$$(i)^i,\ \ (1+i)^i,\ \ (-1+i)^i,\ \ (i(-1+i))^i$$

$$(i)^i = e^{i\log(i)} = e^{i[\log(1)+i\frac{\pi}{2}+2ki\pi]} = e^{-\frac{\pi}{2}-2k\pi}$$

$$(1+i)^i = e^{i\log(1+i)} = e^{i(\log(\sqrt{2})+i\frac{\pi}{4}+2k\pi i)} = e^{i\log(\sqrt{2})-\frac{\pi}{4}-2k\pi}$$

$$(-1+i)^i = e^{i\log(-1+i)} = e^{i(\log(\sqrt{2})+i\frac{3\pi}{4}+2k\pi i)} = e^{i\log(\sqrt{2})-\frac{3\pi}{4}-2k\pi}$$

$$(i(-1+i))^i = (-1-i)^i = e^{i\log(-1-i)} = e^{i(\log(\sqrt{2})+i\frac{5\pi}{4}+2k\pi i)} = e^{i\log(\sqrt{2})-\frac{5\pi}{4}-2k\pi}$$