UNIVERSITE DE DJILALI BOUNAAMA- KHEMISMILIANA

Maths II $1^{ème}$ *Année* 2019 – 2020

Serie d'exercices n°2

Exercice 1

Soit f une forme linéaire définie sur $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer f sachant que : $f(1,1,1) = 0$, $f(2,0,1) = 1$, $f(1,1,2) = 4$.
2. Déterminer $\ker(f)$, $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 2

Montrer que les applications suivantes sont des automorphismes le $\mathbb{R}^4$:

$$f : (x,y,z,t) \mapsto (x,-y,\ x+z\ ,\ 2\ t), \qquad g : (x,y,z,t) \mapsto (y,x,\ x-z\ ,\ -\ t).$$

Exercice 3

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$, considérons les vecteurs :

$$v_1 = 2.e_1 - e_2 + e_3\ ,\ v_2 = -e_1 + e_2 + e_3\ ,\ v_3 = e_2 + 3.e_3\ ,\ v_4 = -e_1 - 2.e_2 + e_3$$

On considère alors l'application linéaire

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par : $f(e_1) = v_1$, $f(e_2) = v_2$, $f(e_3) = v_3$

1. Donner l'image d'un vecteur quelconque $X = (x,y,z)$ exprimé dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que v_1 et v_2 sont linéairement indépendants et qu'ils forment une base de $\mathrm{Im}(f)$.
3. Montrer que $f(v_4) = 0_{\mathbb{R}^3}$, et déterminer $\ker(f)$.
4. Calculer $f(v_1)$ et $f(v_2)$. Soit Z un vecteur de $\mathrm{Im}(f)$, calculer $f(Z)$.

Exercice 4

Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(x,y,z) = (x+y-z,\ 2.x-2.z,\ x-y-z)$$

1. Donner la dimension du noyau de f et une base de ce noyau .
2. Trouver un vecteur X de $\mathbb{R}^3$ tel que $f(X) = 2.X$
3. Trouver un vecteur Y de $\mathbb{R}^3$ tel que $(f + 2.id_{\mathbb{R}^3})(Y) = 0_{\mathbb{R}^3}$
4. Montrer que $\mathrm{Ker}(f - 2.id_{\mathbb{R}^3}) \oplus \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f + 2.id_{\mathbb{R}^3}) = \mathbb{R}^3$

   ($id_{\mathbb{R}^3}$ est l'application identique de $\mathbb{R}^3$)

On considére la base $\mathcal{B}' = \left\{e_1' = (1,1,0),\ e_2' = (1,0,1),\ e_3' = (0,1,1)\right\}$

5. Calculer les coordonées du vecteur $x.e_1 + y.e_2 + z.e_3 \in \mathbb{R}^3$ dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 5

A) Dans $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$, considérons les vecteurs : $v_1 = e_1 - e_2 + e_3$ et $v_2 = -e_1 - e_2 - e_3$.

1. Donner une base du sous-espace $F = \langle v_1, v_2, e_2 \rangle$.

B) Soit h une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie dans la base $\mathcal{B}$ par : $h(x,y,z) = x.v_1 + (y-z).v_2$.

1. Déterminer $\mathrm{Im}(h)$ et donner la dimension du noyau de h et une base de ce noyau .
2. Calculer les coordonées du vecteur $h(e_1) + h(e_3)$ dans la base $\mathcal{B}$

Exercice 6

Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie dans la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ par :

$$f(e_1) = (1,\ 2,1),\ f(e_2) = (1,\ 0,-1),\ f(e_3) = (-1,\ -2,-1)$$

1. Soit $u = x.e_1 + y.e_2 + z.e_3$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$. Calculer $f(u)$ et $(f \circ f)(u)$
2. Déterminer $\ker(f)$, $\ker(f^2)$ et $\mathrm{Im}(f^2)$

3. Montrer que $\ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f^2) = \mathbb{R}^3$
4. Trouver un vecteur X de $\mathbb{R}^3$ tel que $(f - 3.id_{\mathbb{R}^3})(X) = 0_{\mathbb{R}^3}$

On considére la base $B' = \left\{e'_1 = (1,0,0),\ e'_2 = (1,1,0),\ e'_3 = (1,1,1)\right\}$

5. Déterminer les coordonées du vecteur $f(e_1)$ dans la base B et dans la base B'.

Exercice 7

A) Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie dans la base canonique $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ par :

$$f(e_1) = 2.e_1 + e_2 + e_3 \ , \quad f(e_2) = e_2 - e_3 \ , \quad f(e_3) = -e_2 + e_3$$

1. Donner l'image d'un vecteur quelconque $u = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ exprimé dans la base B.
2. Déterminer une base de l'image $\mathrm{Im}(f)$.
3. Déterminer $\ker(f)$.
4. Calculer les coordonées du vecteur $f^2(e_1) + f^2(e_2) + f^2(e_3)$ dans la base $\mathfrak{B}$.

B) Soit φ l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ qui au vecteur $u = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ associe le réel $\varphi(x, y, z) = x + y + z$

1. Déterminer $\ker(\varphi)$.
2. Donner une Base de $\ker(\varphi) + \mathrm{Im}(f)$.
3. Montrer que, pour tout vecteur $u = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$,

$$\varphi(f^2(x, y, z)) = 2.\varphi(f(x, y, z)).$$

Exercice 8

Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dans la base canonique $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ définie par: $f(x, y, z) = (z,\ x + y - z,\ x)$

1. Déterminer le rang r et la dimension du noyau $\ker(f)$ de f.
   L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ?
2. Montrer que $f^2 = id_{\mathbb{R}^3}$. En déduire l'application réciproque de f.
3. Trouver un vecteur X de $\mathbb{R}^3$ tel que $f(X) = X$.
4. Trouver un vecteur Y de $\mathbb{R}^3$ tel que $(f + id_{\mathbb{R}^3})(Y) = 0_{\mathbb{R}^3}$.
5. Montrer que $\ker(f - id_{\mathbb{R}^3}) \oplus \ker(f + id_{\mathbb{R}^3}) = \mathbb{R}^3$.

On considére la base $B' = \left\{ e'_1 = (0,1,0),\ e'_2 = (1,0,1),\ e'_3 = (-1,1,1) \right\}$

6. Calculer l'image par f des vecteurs de la base B'.