**Module : Analyse Complexe**
**Eenseignante : Fouzia Chita**
**Chapitre "3 " : Fonctions Holomorphes**
**Dérivabilité et Equations de Cauchy-Riemann**

Objectif de ce chapitre est d'introduire la notion du fonctions holomorphe et Equations de Cauchy-Riemann. Pour réaliser ce travail, je fait rappeler les fonctions à variable complexe j'esseyer de trouver une relation entre la dérivabilité, l'holomorphie d'une fonction à variable complexe et les Equations de Cauchy-Riemann

J'organise ce travail comme suit:
1- Généralité sur les fonctions à variable complexe
2- La dérivabilité dans $\mathbb{C}$ et les fonctions holomorphes
3- Equations de de Cauchy-Riemann

# 0.1 Dérivabilité dans $\mathbb{C}$ et Fonction holomorphe

## 0.1.1 Fonction à variable complexe

**Définition 1** *On appelle fonction complexe à variable complexe toute application f définie sur un sous ensemble $\Omega$ de $\mathbb{C}$ par:*

$$\begin{array}{rcl} f : \Omega \subset \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}. \\ z & \longrightarrow & f(z) = f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y). \end{array}$$

$u(x,y) := Re(f(z))$ *et* $v(x,y) = Im(f(z))$

*- le domaine de définition dans $\mathbb{C}$ de la fonction f est comme celui dans $\mathbb{R}$,*

$1 - f(z) = e^z; D_f = \mathbb{C}$
2-$f(z) = z^2; D_f = \mathbb{C}$
3-$f(z) = \overline{z}; D_f = \mathbb{C}$
4-$f(z) = \frac{1}{(z-1)z}; D_f = \mathbb{C}^* - \{1\}$

**Définition 2** *Soitent $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert non vide et $f \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction. On dira que f(z) est $C-$dérivable au point $z_0 \in \Omega$ si*

*l'expression $\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$ admet dans $\mathbb{C}$ une limite quand $h$ tend vers $0$. La limite*

$$lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$$

*quand il existe elle est unique, elle s'appelle **dérivée** de f au $z_0$ et noté par $f'(z_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$*

**Exemple 1** *1-Soit la fonction $f(z) = z^2$, on a:*

$$\forall z \in \mathbb{C} : lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = lim_{h\to 0}\frac{(z+h)^2-(z)^2}{h} = lim_{h\to 0}(2z+h) = 2z$$

*alors f est dérivable en tout point $z \in \mathbb{C}$ et $f'(z) = 2z$*

**Définition 3** *Continuité des fonctions $\mathbb{C}$-dérivable*
*Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{C}$ et $z_0 \in \mathbb{C}$. si $f$ est dérivable en $z_0$, alors $f$ est continue en $z_0$. l'inverse n'est pas toujours vrai*

$$lim_{h\to 0}(f(z_0+h)-f(z_0)) = lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}.h = 0$$

*(Puisque $lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$ existe)*

### 0.1.2 Opérations algébriques sur les fonctions $\mathbb{C}$-dérivable

Les mêmes propriétés algébriques sur les fonctions $\mathbb{C}$-dérivables sont obtenues comme celles des dérivées réelles.

**Proposition 1** *Soient $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{C}$, $f$ et $g$ deux fonctions $\mathbb{C}$-dérivables en un point $z_0$ de $\Omega$, telle que $f$,$g : S \to \mathbb{C}$*

*On a les propriétés suivantes:*

*1-**La somme** $f+g$ est $\mathbb{C}$-dérivable en point $z_0$ et on a*

$$(f+g)^{'}(z_0) = f^{'}(z_0) + g^{'}(z_0)$$

*Et pour $\lambda \in C$ $\lambda f$ est $\mathbb{C}$-dérivable en point $z_0$ et on a*

$$(\lambda f)^{'}(z_0) = \lambda f^{'}(z_0)$$

*2- **Le produit** $f.g$ est $\mathbb{C}$-dérivable en point $z_0$ et on a*

$$(f.g)^{'}(z_0) = f^{'}(z_0)g(z_0) + g^{'}(z_0)f(z_0)$$

*3-Si $g(z_0) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est C-dérivable en point $z_0$ et on a*

$$(\frac{f}{g})^{'}(z_0) = \frac{f^{'}(z_0)g(z_0) - g^{'}(z_0)f(z_0)}{g^2(z_0)}$$

**Preuve 1** *Exercice*

**Proposition 2** *Soient $\Omega$ et $\Omega^{'}$ deux ouverts de $\mathbb{C}$, $f : S \to C$,$g : S^{'} \to C$. On suppose que $f$ est $\mathbb{C}$-dérivable en un point $z_0$ et que $g$ est $\mathbb{C}$-dérivable en un point $f(z_0)$. Alors $g \circ f$ est $\mathbb{C}$-dérivable en un point $z_0$, et on a*

$$(g \circ f)^{'}(z_0) = g^{'}(f(z_0)).f^{'}(z_0)$$

**Preuve 2** *Exercice*

**Proposition 3** *Une fonction réelle à variable complexe, est soit dérivable en un point $z_0$ et sa dérivée est nulle, soit elle n'est pas dérivable en $z_0$.*

**Exemple 2** *Soit la fonction $f(z) = \overline{z}$, on a:*

$$\forall z \in C : lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = lim_{h\to 0}\frac{\overline{(z+h)}-\overline{(z)}}{h} = lim_{h\to 0}\frac{\overline{h}}{h}$$

$$= \begin{cases} 1 & si \quad\quad h \text{ réel} \\ \\ -1 & si \quad h \text{ imaginaires pur} \end{cases}$$

*Alors $\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ n'a pas de limite quand h tend vers zéro (f n'est pas dérivable sur $\mathbb{C}$).*

### 0.1.3 Fonctions holomorphes

**Définition 4** *On dira que la fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est* ***holomorphe*** *au point $z_0 \in \Omega$, si elle est* ***dérivable*** *sur un voisinage $V \subset \Omega$ de $z_0$. On note par $H(S)$ l'espace des fonctions holomorphes sur $\Omega$.*

**Définition 5** *Soit $A$ une partie de $C$. une fonction $f : A \to C$ est dite holomorphe sur $A$ s'il existe un ouvert $S$ de $C$ contenant $A$, sur lequel la $f$ est définie et elle holomorphe sur $\Omega$.*

**Définition 6** *Une fonction f est dite* ***entière****, si elle est* ***holomorphe sur le plan complexe*** *tout entier .*

**Exemple 3** *De fonctions holomorphes*

*1- Tout polynôme $P(z)$ est holomorphe dans $\mathbb{C}$.*

*2- Toute fraction polynômiale $\frac{P(z)}{Q(z)}$ est holomorphe sur son domaine de définition qui est égal à l'ouvert $U = \{z \in C; Q(z) \neq 0\}$*

*3- $e^z, \sin(z), \cos(z)$,$sh(z)$,$ch(z)$ sont holomorphe dans $\mathbb{C}$.*

** $tan(z)$ est holomorphe dans $\mathbb{C} - \left\{\cup_{k\in Z}(2k+1)\frac{\pi}{2}\right\}$*

** $th(z)$ est holomorphe dans $\mathbb{C} - \left\{\cup_{k\in Z}(2k+1)\frac{\pi}{2i}\right\}$*