Chapitre 1

Rappel sur les nombres complexes

1.1 L'ensemble des nombres complexes

Question : Trouver un nombre réel solution de l'équation algébrique $x^2 + 1 = 0$.
Réponse : Il n'existe pas de nombre réel x qui soit solution de l'équation $x^2 + 1 = 0$. Pour donner des solutions à cette équation et à des équations semblables, on introduit un ensemble plus grand que celui des nombres réels. On appelle cet ensemble les nombres complexes.

Définition 1.1.1. *Un nombre complexe z s'écrit sous la forme dite algébrique :*

$$z = x + iy$$

où x et y sont des nombres réels et i est appelé l'unité imaginaire, a la propriété $i^2 = -1$.

- *Le nombre x appelé la partie réelle de z, on note $x = Re(z)$*
- *Le nombre y appelé la partie imaginaire de z, on note $y = Im(z)$*
- *L'ensemble des nombres complexes est notée $\mathbb{C}$.*

Remarque 1.1.2. .

- *Deux nombres complexes z et z' sont égaux si et seulement si*

$$Re(z) = Re(z') \quad et \quad Im(z) = Im(z')$$

- *Si $y = 0$, on dit que z est réel, si $x = 0$, on dit que z est un imaginaire pur.*
- *Le nombre complexe $\overline{z} = x - iy$ est appelé le conjugué de z.*

1.1.1 Propriétés

Soient z et w deux nombres complexes, on a les propriétés suivantes :

1. $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$
2. $\overline{zw} = \overline{z} \;\; \overline{w}$
3. $\overline{\overline{z}} = z$
4. $z + \overline{z} = 2Re(z)$
5. $z - \overline{z} = 2iIm(z)$

1.2 Opérations sur les nombres complexes

- Addition : $(x+iy)+(u+iv) = (x+u)+i(y+v)$
- Soustraction : $(x+iy)-(u+iv) = (x-u)+i(y-v)$
- Multiplication : $(x+iy)(u+iv) = xu + vix + uiy + vi^2y = xu - yv + i(xv + yu)$
- Division : $\dfrac{x+iy}{u+iv} = \left(\dfrac{x+iy}{u+iv}\right)\left(\dfrac{u-iv}{u-iv}\right) = \dfrac{xu+yv}{u^2+v^2} + i\dfrac{yu-xv}{u^2+v^2}.$

1.3 Valeur absolue (ou module)

Définition 1.3.1. *La valeur absolue ou module d'un nombre complexe $z = x+iy$ est définie par :*

$$|z| = |x+iy| = \sqrt{x^2+y^2}$$

Exemple 1.3.2.

$$|-3+4i| = \sqrt{(-3)^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25}.$$

1.3.1 Propriétés

Si z et w sont deux nombres complexes, on a les propriétés suivantes :

1. $|zw| = |z||w|$
2. $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}$
3. $|\overline{z}| = |z|$
4. $z\overline{z} = |z|^2$
5. $|z+w| \leq |z| + |w|$ **(Inégalité triangulaire)**
6. $\sqrt{x^2} = |x| \quad$ et $\quad x^2 = |x|^2$ si $x \in \mathbb{R}$

7. $z^2 \neq |z|^2$ si $Im(z) \neq 0$
8. $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
9. $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$.

Remarque 1.3.3. *Si z et w sont deux nombres complexes tels que $w \neq 0$, alors, on a*

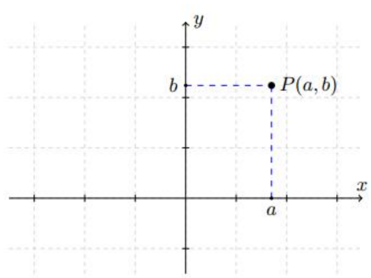
$$\frac{z}{w} = \frac{z}{w}\,\frac{\overline{w}}{\overline{w}} = \frac{z\overline{w}}{|w|^2}$$

Exemple 1.3.4.

$$\frac{2+3i}{1-2i} = \frac{(2+3i)(1+2i)}{1^2+(-2)^2} = \frac{-4}{5} + i\frac{7}{5}$$

1.4 Représentation graphique des nombres complexes

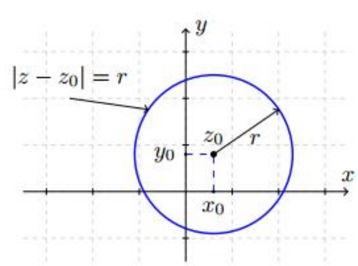
Un nombre complexe $z = a + ib$ pouvant être considéré comme un couple ordonné de nombres réels, nous pouvons représenter de tels nombres par des points (x, y) d'un plan appelé **plan complexe**. A chaque nombre complexe $z = a + ib$ correspond un point $P(a, b)$ du plan.



1.4.1 Courbes dans le plan complexe

1. <u>**Cercle :**</u>

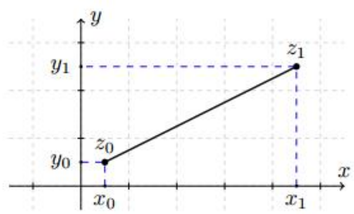
   Définition 1.4.1. *Le cercle de rayon r et de centre $z_0 = x_0 + iy_0$ est défini par l'équation $|z - z_0| = r$*



2. **Segments :**

   Définition 1.4.2. *Le segment de droite reliant deux points complexes z_0 et z_1 est l'ensemble des points :*

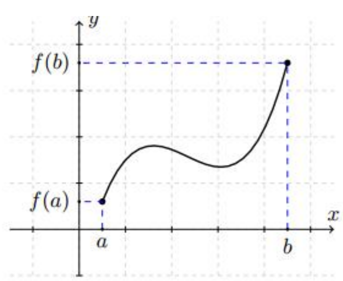
$$\{z \in \mathbb{C} : z = (1-t)z_0 + tz_1;\ t \in [0;1]\}$$



3. **Courbes :**

   Définition 1.4.3. *En général, une courbe $y = f(x), x \in [a,b]$ où f est une fonction continue, correspond à l'ensemble de points*

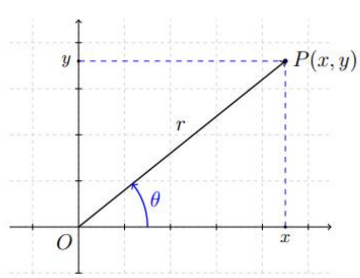
$$\{z \in \mathbb{C} : z = x + if(x) = (x, f(x)), \quad x \in [a,b]\}$$



1.5 Formes polaire des nombres complexes

Si $P(x,y)$ désigne un point du plan complexe correspondant au nombre complexe $z = x + iy$, nous voyons que :

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$



où $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |x + iy|$ est le module ou la valeur absolue de $z = x + iy$, et θ est appelé l'argument de $z = x + iy$, noté $\arg z$, est l'angle que fait le vecteur $\overrightarrow{OP}$ avec le demi-axe positif Ox. On en tire que $z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ qui est appelé **"la forme polaire"** ou **"la forme trigonométrique"** du nombre complexe z.
Si $-\pi < \theta \leq \pi$, alors, l'angle θ est appelé l'argument principale, noté par $Argz$ et on a

$$\arg z = Argz + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

1.5.1 Formule de Moivre

Si $z_1 = x_1 + iy_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$, $z_2 = x_2 + iy_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$, alors

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 \{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\} \qquad (1.1) \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2} \{\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\}. \end{aligned}$$

Une généralisation de (1.1) conduit à

$$z_1 z_2 ... z_n = r_1 r_2 ... r_n \{\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) + i\sin(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)\}.$$

Ce qui, si $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = z$, conduit à

$$z^n = \{r(\cos\theta + i\sin\theta)\}^n = r^n\{\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\},$$

qui est la formule de Moivre.

1.6 Racines d'un nombre complexe

Un nombre z est appelé racine n-ième d'un nombre complexe $a + ib$ si $z^n = a + ib$ et nous écrivons $z = (a + ib)^{\frac{1}{n}}$ ou $z = \sqrt[n]{a + ib}$. D'après la formule de Moivre

$$\begin{aligned} z &= (a + ib)^{\frac{1}{n}} = \{r(\cos\theta + i\sin\theta)\}^{\frac{1}{n}} \\ &= r^{\frac{1}{n}} \left\{ \cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \right\}, k = 0, 1, 2, ..., (n-1). \end{aligned}$$

D'où, il résulte qu'il y a n-racines n-ième différents de $a + ib$ pourvu que $a + ib \neq 0$

Exemple 1.6.1. *Calculons les racines quatrièmes de* 1.
On a :
$\sqrt[4]{1} = \{\cos(0 + 2k\pi) + i\sin(0 + 2k\pi)\}^{\frac{1}{4}} = \cos\left(\frac{2k\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{4}\right), k = 0, 1, 2, 3.$
Pour $k = 0$, *on a :* $z_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1$
Pour $k = 1$, *on a :* $z_1 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$
Pour $k = 2$, *on a :* $z_2 = \cos\pi + i\sin\pi = -1$
Pour $k = 3$, *on a :* $z_3 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i.$

Exemple 1.6.2. *Calculons* $\sqrt[3]{1-i}$. *On a*

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{1-i} &= (1-i)^{\frac{1}{3}} = \left[\sqrt{2}\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right]^{\frac{1}{3}} \\
&= \sqrt{2}^{\frac{1}{3}}\left[\cos\left(\frac{\frac{-\pi}{4}+2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{-\pi}{4}+2k\pi}{3}\right)\right] \\
&= \sqrt[6]{2}\quad\left[\cos\left(\frac{-\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right)\right], k = 0, 1, 2.
\end{aligned}$$

Pour $k = 0$, *on a :* $z_0 = \sqrt[6]{2}\left\{\cos\left(\frac{-\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{12}\right)\right\}$

Pour $k = 1$, *on a :* $z_1 = \sqrt[6]{2}\left\{\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right\}$

Pour $k = 2$, *on a :* $z_2 = \sqrt[6]{2}\left\{\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right\}$

1.7 Exercices

Exercice 1.7.1. *Soient* $z = 2 - i, w = 1 + 3i$. *Écrire les nombres complexes suivants sous forme* $x + iy$.

$$a)\ \frac{z}{w}, \qquad b)\ \frac{zw}{z+w}, \qquad c)\ \frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\beta - i\sin\beta}.$$

Exercice 1.7.2. *Trouver le module et l'argument des nombres complexes suivants :*

$$\begin{aligned}
u_1 &= -1 + i\sqrt{3};\quad u_2 = \frac{5+i\sqrt{3}}{2-i\sqrt{3}};\ u_3 = 1 + \exp(i\theta)\quad \theta \in [0, 2\pi[;\ u_4 = \frac{\exp(2i\alpha)-1}{\exp(i\beta)-1},\ (\beta \neq k\pi); \\
u_5 &= \exp(i\alpha) + \exp(i\beta),\ (\alpha,\ \beta \in \mathbb{R});\quad u_6 = 1 + i;\ u_7 = \sqrt{3} + i;\ \frac{u_6}{u_7}.\ \left(End\acute{e}duire : \cos\frac{\pi}{12},\ \sin\frac{\pi}{12}\right)
\end{aligned}$$

Exercice 1.7.3. *Représenter les ensembles des points suivants dans le plan complexe.*

$a)\ \{z \in \mathbb{C}\ :\ |z - 3i| \leq |z - 3|\},\ b)\ \{z \in \mathbb{C}\ :\ |z - i| < 3\},\ c)\ \{z \in \mathbb{C}\ :\ |z - i| > 3\},$

$d)\ \{z \in \mathbb{C}\ :\ Re(z) - Im(z) < 1\},\ e)\ \{z \in \mathbb{C}\ :\ 1 < |z| < 2\}.$

Exercice 1.7.4. *Résoudre les équations :*

a) $z^3 + 3z^2 + 3z + 3 = 0$,

b) $(z - 1)^4 = 1$,

Exercice 1.7.5. *Donner les nombres complexes suivants sous forme* $x + iy$.

$$a)\ (1+i)^{1000};\quad b)\ (\sqrt{3}-i)^3;\quad c)\ (-1+i\sqrt{3})^{-5}.$$

Exercice 1.7.6. *Calculer la somme suivante :*

$$S = \sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta};\quad \textit{et conclure}\quad S_1 = \sum_{k=1}^{n}\cos k\theta\quad \textit{et}\quad S_2 = \sum_{k=1}^{n}\sin k\theta.$$