

امتحان في مقياس الرياضيات 2

تصحيح نموذجي

ضع إشارة (X) في الخانة التي تُعبر عن الإجابة الصحيحة، أو أكمل الفراغات بإجابات صحيحة.

تمرين 1 [4.5]

نعتبر الفضاء الجزئي : $A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = 2y = 3z - y \}$

1. أساس الفضاء A ، هو : $\{(1, 2, 3), (-1, 1, 2)\}$ ، $\{(2, 1, 1)\}$ ، $\{(2, 3)\}$
2. الشعاع $v = (-1, 1, 2)$ ينتمي إلى الفضاء A : لا ، نعم
3. الأشعة $(-1, 1, 2), (1, 2, 3), (2, 1, 1)$: مرتبطة خطيا ، مستقلة خطيا

تمرين 2 [4.5]

الفضاء الشعاعي \mathbb{R}^3 مزود بالأساس القانوني $B = \{e_1, e_2, e_3\}$.

f تطبيق خطي من \mathbb{R}^3 في \mathbb{R}^3 بحيث : $f(e_1) = (-1, 1, 2)$ ، $f(e_2) = (1, 2, 3)$ ، $f(e_3) = (2, 1, 1)$

1. الصورة $f(x, y, z)$ تُعطى بالعلاقة :

- $(2x + y - z, x + 2y + z, x + 3y + 2z)$ ، $(2x + y + z, x + 2y + 3z, -x + y + 2z)$

2. أساس الفضاء الشعاعي الجزئي $\text{Im} f$ ، هو :

- $\{(1, -1, 1)\}$ ، $\{(2, 1, 1), (1, 2, 3), (-1, 1, 2)\}$ ، $\{(2, 1, 1), (1, 2, 3)\}$

3. مجموعة الأشعة (x, y, z) من \mathbb{R}^3 التي تحقق : $f(x, y, z) = (0, 0, 0)$ هي الفضاء الشعاعي الجزئي :

- $\langle (0, -1, 1), (1, 0, -1), (1, -1, -1) \rangle$ ، $\langle (1, -1, 1) \rangle$ ، $\langle (0, -1, 1), (1, 0, -1) \rangle$

تمرين 3 [5]

نعتبر في الأساس القانون لـ \mathbb{R}^3 المصفوفة

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. حساب : $M^3 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = 5I_3$ ، $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ ، $M^n = \begin{cases} 5^k \cdot I_3 & , n = 3k \\ 5^k \cdot M & , n = 3k + 1 \\ 5^k \cdot M^2 & , n = 3k + 2 \end{cases}$ ($k \in \mathbb{N}$)

2. استنتاج بأن المصفوفة M قابلة للقلب، وتعيين مصفوفتها العكسية M^{-1} بدلالة M .

لدينا $M^3 = 5I_3$ ومنه $M^3 = 5I_3 \Rightarrow M \cdot \left(\frac{1}{5}M^2\right) = \left(\frac{1}{5}M^2\right) \cdot M = I_3$ أي المصفوفة M قابلة للقلب : $M^{-1} = \frac{1}{5}M^2$

$$3. \text{ مقلوب } M \text{ هو : } \boxed{\times} M^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boxed{\times} M^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$4. \text{ من التكافؤ: } M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ نجد : } x = \frac{3}{5}, y = -1, z = 2$$

تمرين 4 [3]

في الفضاءين \mathbb{R}^2 و \mathbb{R}^3 المزودان بأسسهما القانونية، نعتبر A و B مصفوفتي التطبيقين الخطيين f و g :

$$A = M(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = M(g) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

1. التطبيقان f و g المرفقان بالمصفوفتين A و B ، بالنسبة للأسس القانونية لفضاءات البدء والوصول، هما:

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \mapsto (2x + y - z, x + 2y + z, x + 3y + 2z); \quad (x, y) \mapsto (2x + y, -3x + 2y, x + 4y)$$

2. تُعطي مصفوفة التطبيق الخطي $f \circ g$ بالعلاقة: $C = M(f \circ g) = M(f) \cdot M(g) = A \cdot B$ ، حيث:

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 9 \\ -5 & 15 \end{pmatrix}$$

3. التطبيق الخطي $f \circ g$ معرف كما يلي: $(f \circ g)(x, y) = (0, -3x + 9y, -5x + 15y)$

تمرين 5 [3]

نعتبر المصفوفتين A و B :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 4 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. رتبة A هي: إثنان، ثلاثة، أربعة

2. رتبة B هي: إثنان، ثلاثة، أربعة

3. باستخدام طريقة العمليات على الأسطر، حل الجملة الخطية الآتية:

$$(I) \begin{cases} 2x - y - 2z = 3 \\ x + 2y + 4z = -2 \\ -x + 3y - z = 3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & -2 \\ -1 & 3 & -1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{l_2 \rightarrow 2l_2 - l_1 \\ l_3 \rightarrow 2l_3 + l_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & 10 & -7 \\ 0 & 5 & -4 & 9 \end{array} \right) \xrightarrow{l_3 \rightarrow l_3 - l_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & 10 & -7 \\ 0 & 0 & -14 & 16 \end{array} \right)$$

(II) وحل هذه الجملة يتبدئ بالمعادلة الأخيرة. نحصل على المصفوفة الأخيرة تكافؤ:

$$\begin{cases} 2x - y - 2z = 3 \\ 5y + 10z = -7 \\ -14z = 16 \end{cases}$$

$z = -\frac{8}{7}$ ، وبالتعويض في المعادلة الثانية، نحصل على $y = \frac{31}{35}$. وبالتعويض في المعادلة الثالثة، نحصل على $x = -\frac{7}{10}$