المحددات وجمل المعادلات الخطية

A مصفوفة مربعة. نسمي **محدد** A، ونرمز له بـ $\det A$ محدد عائلة أشعة الأعمدة بالنسبة للأساس القانوني لـ K^n.

محدد من الرتبة 1: $\det A = |a| = a \qquad A=(a) \ / a\in\mathbb{R}$

محدد من الرتبة 2: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11}\cdot a_{22}) - (a_{12}\cdot a_{21})$

محدد من الرتبة 3:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}\cdot a_{33} - a_{21}\cdot a_{32}) - a_{12}(a_{21}\cdot a_{23} - a_{21}\cdot a_{31}) + a_{13}(a_{21}\cdot a_{32} - a_{22}\cdot a_{31})$$

نشر محدد مصفوفة

في المصفوفة المربعة $A=(a_{ij}) \ni \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$، إذا رمزنا بـ A_{ij} للمصفوفة الناتجة عن حذف السطر i والعمود j في المصفوفة A، محدد A هو: $\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{1+k} a_{1k}\cdot \det A_{1k}$: **نشر** أو **تحليل محدد** A على السطر الأول.

يمكن نشر $\det A$ على السطر i كما يلي: $\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}\cdot \det A_{ij} \qquad j\in\{1,2,\cdots,n\}$

كما يمكن نشر $\det A$ على العمود j كما يلي: $\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}\cdot \det A_{ij} \qquad i\in\{1,2,\cdots,n\}$

> أنشر $\det A$ على العمود الأول، حيث $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -5$$

- في مصفوفة مربعة A من الرتبة n، تكون : A قابلة للقلب $\Leftrightarrow \quad \det A \neq 0$
- إذا أضفنا إلى أي عمود عبارة خطية لأعمدة أخرى، فإن قيمة المحدد لا تتغير.
- إذا تساوي عمودان أو كان أحد الأعمدة معدوما، أو أحد الأعمدة هو عبارة خطية لأعمدة أخرى في مصفوفة A ، فإن $\det A = 0$.
- $\det A = \det {}^tA$ و $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$ حيث $0 \neq \lambda$.
- $\det A\cdot B = \det A \times \det B$ (B هي أيضا مصفوفة مربعة من الرتبة n).
- إذا كانت A قابلة للقلب، أي وجدت A^{-1}، فإن $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$ (لأن $\det I_n = 1$)
- للتبسيط ، نضع المصفوفة المربعة A من النمط 3 بشكل ثلاثة أسطر كالآتي $A=\begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{pmatrix}$، ونتحقق من الخواص:

$$\det\begin{pmatrix}\ell_1\\ \lambda\ell_2\\ \ell_3\end{pmatrix} = \lambda\det\begin{pmatrix}\ell_1\\ \ell_2\\ \ell_3\end{pmatrix} \quad /\, \lambda \neq 0$$

$$\det\begin{pmatrix}\ell_3\\ \ell_2\\ \ell_1\end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix}\ell_1\\ \ell_2\\ \ell_3\end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix}\ell_1\\ \ell_2\\ \ell_3+\ell'_3\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}\ell_1\\ \ell_2\\ \ell_3\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix}\ell_1\\ \ell_2\\ \ell'_3\end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix}\ell_1+\alpha\ell_2+\beta\ell_3\\ \ell_2\\ \ell_3\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}\ell_1\\ \ell_2\\ \ell_3\end{pmatrix} \qquad (\alpha,\beta\in\mathbb{R})$$

حساب مقلوب مصفوفة باستخدام المحددات

A مصفوفة حيث $A = \left(a_{ij}\right)_{i,j=1,2,\cdots,n}$

إذا كان $\det A \neq 0$ فإن A قابلة للقلب أي أن المصفوفة A^{-1} موجودة.

نعتبر المصفوفة المجاورة لـ A المعرفة كالآتي : $A = \left(a_{ij}\right)_{i,j=1,2,\cdots,n}$ حيث $a_{ij} = (-1)^{i+j}\det A_{ji}$

بالتجريب نحصل: $$C = A\tilde{A} = \begin{pmatrix}\det A & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \\ 0 & & \det A\end{pmatrix}$$

فنضع $C = \left(c_{ij}\right)_{i,j=1,2,\cdots,n}$ حيث $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot\tilde{a}_{kj}$.

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot(-1)^{i+j}\det A_{jk}$$

$$c_{ij} = \begin{cases}\det A & , \quad i=j\\ 0 & , \quad i\neq j\end{cases} \quad , \quad \forall i\in\{1,2,\dots,n\}$$

وهذا يعني بأن $C = \det A\cdot I_n$ ومنه $A\cdot\tilde{A} = \det A\cdot I_n$ ومنه $A\cdot\left(\frac{1}{\det A}\tilde{A}\right) = \left(\frac{1}{\det A}\tilde{A}\right)\cdot A = I_n$

أي أن A قابلة للقلب ومقلوبها هو: $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\times\tilde{A}$

إذن كانت A قابلة للقلب فإن مقلوبها هو $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\tilde{A}$: $A = \left(a_{ij}\right)_{i,j=1,2,\cdots,n}$ و $a_{ij} = (-1)^{i+j}\det A_{ji}$

- في المصفوفة: $B = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -4\end{pmatrix}$ بكون لدينا $\det B = 2(-4)-(1)(3) = -11$. ومنه B قابلة للقلب .

$${}^{t}\tilde{B} = \begin{pmatrix}+(-4) & -(3)\\ -(1) & +(2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4 & -3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

ومنه $${}^{t}({}^{t}\tilde{B}) = \tilde{B} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B}\tilde{B} = \frac{1}{(-11)}\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/11 & 1/11 \\ 3/11 & -2/11 \end{pmatrix}$$

• في المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ يكون لدينا : $\det A = -59$ و ${}^{t}\tilde{A} = \begin{pmatrix} -5 & -14 & 13 \\ -6 & -5 & -8 \\ 14 & -8 & -1 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\tilde{A} = -\frac{1}{59}\begin{pmatrix} -5 & -6 & 13 \\ -14 & -5 & -8 \\ 13 & -8 & -1 \end{pmatrix}$$

استخدام المحددات في الجمل الخطية

يمكن التعبير عن المعادلة : $A \cdot X = B$ مصفوفيا بالشكل $A \cdot X = B$، أي

$$(*) \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

حيث A مصفوفة المعاملات و X مصفوفة عمود المتغيرات. و B مصفوفة الثوابت،

إذا كانت A قابلة للقلب فإن : $A \cdot X = B \iff X = A^{-1} \cdot X$

ومنه حل المعادلة $(*)$: $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

• في المعادلة $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

نضع $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ، $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ، $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. فنحصل على : $A \cdot X = B$

بالحساب نجد $\det A = 4$ والمصفوفة A قابلة للقلب ومقلوبها هو : $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

ومنه يكزن الحل : $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

طريقة Gauss

المصفوفة المرفقة بالجملة:
$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\dots+\alpha_{1n}x_n=b_1 \\ \alpha_{21}x_1+\alpha_{22}x_2+\dots+\alpha_{2n}x_n=b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{n1}x_1+\alpha_{n2}x_2+\dots+\alpha_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$
هي:
$$\left(\begin{array}{cccc|c} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} & b_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} & b_2 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

خوارزمية Gauss

- نبدل (إن تطلب الأمر) أسطر الجملة بحيث يكون معامل المجهول الأول في المعادلة الأولى (السطر الأول) غير معدوم. يسمى هذا المعامل بعنصر الارتكاز Pivot .
- نعدم المجهول الأول في بقية المعادلات، عددها $(n-1)$ باستخدام التحويل :

$$(i>1) \quad \ell_i \longrightarrow a_{11}\ell_i + a_{i1}\ell_1$$

- نجري نفس العمل السابق من أجل الجملة ذات $(n-1)$ مجهول و $(n-1)$ معادلة الناتجة من حذف السطر الأول والعمود الأول .

ملاحظة: في أثناء الحساب إذا – ظهر سطر يمثل المعادلة $0x_1+\dots+0x_n=0$ نحذف هذا السطر ونواصل العمل.

– وُجد سطر من الشكل $(0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \mid b_k)$ $b_k \neq 0$ فإن الجملة لا تقبل حل.

<table><tr><td>

1. حل، باستخدام الحساب المصفوفي، جملة المعادلات ذات المجاهيل x و y و z الآتية :

$$(\mathrm{I}) \quad \begin{cases} x \quad -2z = a \\ \quad y+z = b \\ -2x+y \quad = 0 \end{cases}$$
(a و b وسيطان حقيقيان)

واستنتج أن المصفوفة A المرفقة بالجملة $(\mathbf{I})$ هي مصفوفة قابلة للقلب .

2. حل الجملة $(\mathbf{I})$، باستخدام العمليات الأولية على الأسطر.

</td></tr></table>

1. حل جملة المعادلات $(\mathbf{I})$:

$$(\mathbf{I}) \Leftrightarrow A\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -5$$
ومنه تكون المصفوفة A قابلة للقلب، والجملة تقبل حلا وحيدا :

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{5}a + \frac{2}{5}b \\ y = \frac{2}{5}a + \frac{4}{5}b \\ z = -\frac{2}{5}a + \frac{1}{5}b \end{cases}$$

2. حل الجملة $(\mathbf{I})$ باستخدام العمليات الأولية على الأسطر .

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \to L_3 + 2L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & -4 & 2a \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \to L_3 - L_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & -5 & 2a-b \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2z = a \\ y + z = b \\ -5z = 2a - b \end{cases}$$

ومنه الحل الوحيد :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{5}a + \frac{2}{5}b \\ y = \frac{2}{5}a + \frac{4}{5}b \\ z = -\frac{2}{5}a + \frac{1}{5}b \end{cases}$$

جملة Cramer

جملة Cramer هي جملة معادلات خطية من n مجهول و n معادلة، هذه الجملة تقبل حل وحيد.

يمكن التعبير عن هذه الجملة بكتابة المصفوفة $\det A \neq 0$ / $A.X = B$

هذه الجملة تقبل حلا وحيدا : $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$

إذا رمزنا بـ A_i للمصفوفة الناتجة من تبديل العمود رقم i بشعاع العمود B $(i = 1, 2, ..., n)$، سيكون لدينا:

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A} \quad /(i = 1, 2, ..., n)$$

في الجملة $\begin{cases} x + 2y + z = -1 \\ 2x + 6y - z = 0 \\ x - 2y + 2z = 3 \end{cases}$ المكافئة لـ $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

لدينا $\det A = 10$ ، ومنه الجملة تقبل الحل الوحيد (x, y, z) حيث :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{17}{5} \;,\quad x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{-16}{10} \;,\quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{-8}{10}$$