المصفوفات

عموميات: مصفوفة أعداد حقيقية من النمط (n,p) حيث $n,p\in\mathbb{N}^*$ هي التطبيق المعرف كما يلي:

$$\{1,2,...,n\}\times\{1,2,...,p\}\to\mathbb{R}$$
$$(i\,,j\,)\mapsto a_{ij}$$

a_{ij} هي معاملات المصفوفة التي نرمز لها بالرمز A وتكتب: $\left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}}$. أو اختصارا $A=(a_{ij})$، ونكتب أيضا

$$A=\left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{1p}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np}\end{pmatrix}$$

المعامل الحقيق a_{ij} في المصفوفة A ، يقع في "تقاطع" السطر رقم i مع العمود رقم j .

الدليل الأيمن مخصص لترقيم الأعمدة والدليل الأيسر مخصص لترقيم الأسطر.

مثلا المصفوفة $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 5 & 4 & 3\end{pmatrix}$ بسطرين وثلاثة أعمدة. مثلا $a_{23}=3$ يقع في السطر الثاني والعمود الثالث، بينما $a_{1.3}$ غير موجود.

نرمز بـ $\mathcal{M}_{n\,p}(\mathbb{R})$ لمجموعة المصفوفات من النمط $(n.p)$ ذات n سطر و p عمود

$$\mathcal{M}_{n\,p}(\mathbb{R})\ni A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{1p}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np}\end{pmatrix}$$

أية مصفوفة M من $\mathcal{M}_{n\,p}(\mathbb{R})$ هي جدول (مستطيل) من المعاملات $\left(a_{ij}\right)$، حيث يتغير الدليل i من 1 إلى p ، ويتغير j من 1 إلى n. وبذلك تتشكل M من p شعاع عمودي و n شعاع سطر.

مصفوفات خاصة

- تكون المصفوفة A من $\mathcal{M}_{n\,p}(\mathbb{R})$ معدومة إذا تحقق $\forall i\ ,\ \forall j\quad a_{ij}=0$
- **المصفوفة المربعة**: $n=p$، نضع $\mathcal{M}_{n\,p}(\mathbb{R})=\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\quad A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

تكون المصفوفة المربعة $A=(a_{ij})$ مثلثية من الأعلى $\forall i>j\quad a_{ij}=0$

- **مصفوفة الوحدة** : مصفوفة الوحدة من الرتبة n، هي مصفوفة مربعة نرمز لها بـ I_n تتشكل من 1 على القطر الرئيسي و 0 على البقية .

مثلا $I_n=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&0\\0&\cdots&0&1\end{pmatrix}\ ,\ I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\ ,\ I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

- **مصفوفة قطرية**: تكون من الشكل

$$\left(\{1,...,n\}\ni j \quad \lambda_j\neq 0\right) \quad ، \quad A=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&\cdots&0\\0&\lambda_2&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&0\\0&\cdots&0&\lambda_n\end{pmatrix}$$

- **مصفوفة سطر**: كل عنصر من $\mathcal{M}_{1.p}(\mathbb{R})$ هو مصفوفة بسطر واحد و p عمود، يمكن مطابقته بشعاع من $\mathbb{R}^p$ بالشكل : $(a_{1p},a_{1p},...,a_{1p})$
- **مصفوفة عمود**: كل عنصر من $\mathcal{M}_{n.1}(\mathbb{R})$ هو مصفوفة من عمود واحد و n عمود يمكن مطابقته بالشعاع من $\mathbb{R}^n$ بالشكل : $\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{n1}\end{pmatrix}$

منقول مصفوفة

لتكن المصفوفة $M=(a_{ij})$ ذات n سطر و p عمود من عناصر K.

نسمي منقول M، المصفوفة ${}^tM$ من $\mathcal{M}_{pn}(\mathbb{R})$ التي أعمدتها هي صفوف M. أي ${}^tM=(a_{ji})$

ولدينا أيضا ${}^t\left({}^tM\right)=M$. وكذلك ${}^t(A+B)={}^tA+{}^tB$ حيث A و B من $\mathcal{M}_{np}(K)$

${}^tA=\begin{pmatrix}2&3\\-5&4\\1&0\end{pmatrix}\ ,\ A=\begin{pmatrix}2&-5&1\\3&4&0\end{pmatrix}$

نظير مصفوفة

لتكن المصفوفة A من $\mathcal{M}_{np}(K)$. نظير المصفوفة $A=(a_{ij})$ هو $-A=(-a_{ij})$.

في حالة A من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ، تكون A تناظرية إذا تحقق: $a_{ij}=a_{ji}\quad \forall i\,,\,j\in\{1,...,n\}$ ، أي $A={}^tA$.

الفضاء الجزئي للمصفوفات

- لتكن $M=(a_{ij})$ و $N=(b_{ij})$ مصفوفتين $\mathcal{M}_{n.p}(\mathbb{R})$،

لدينا: $M=N \iff a_{ij}=b_{ij} \quad \forall i\,,\ \forall j$

- M و N مصفوفتان بنفس البعد من $\mathcal{M}_{n.p}(\mathbb{R})$، لدينا:

المجموع $L=M+N$ هو المصفوفة $L=(\ell_{ij})$ المعرفة كما يلي:

$$\ell_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$$

• نسمي جداء المصفوفة $M=\left(a_{ij}\right)$ من $\mathcal{M}_{n.p}(K)$ بالعدد السلمي λ من الحقل K ، المصفوفة:

$$N=\lambda M$$

حيث $N=\left(b_{ij}\right)$ مع $b_{ij}=\lambda . a_{ij}$

$\mathcal{M}_{n.p}(K)$ بعمليتي الجمع والضرب بعدد سلمي لها بنية فضاء شعاعي، حيث $\dim \mathcal{M}_{n.p}(K)=n\times p$

الأساس القانوني لهذا الفضاء هو $(E_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$ حيث $(E_{ij}\in \mathcal{M}_{n.p}(K)$

مثال: إذا اعتبرنا المصفوفتين :

$$A=\begin{pmatrix}2&3\\0&5\\1&4\end{pmatrix}\ ,\ B=\begin{pmatrix}-1&1\\5&4\\-3&0\end{pmatrix}$$

يكون لدينا العبارات :

$$A+B=\begin{pmatrix}1&4\\5&9\\-2&4\end{pmatrix},\ 3\cdot A=\begin{pmatrix}6&9\\0&15\\3&12\end{pmatrix},\ 2A+3B=\begin{pmatrix}1&9\\15&22\\-7&8\end{pmatrix}$$

رتبة مصفوفة

رتبة مصفوفة A التي نرمز لها بـ $\operatorname{rg}(A)$ ، هي العدد الأعظمي للأشعة الأعمدة المستقلة خطيا في A .

إذا كانت A مصفوفة من النمط (n,p) لتطبيق خطي f من E في F بالنسبة لأساسين $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ فإنه

$$\operatorname{rg}(A)=\operatorname{rg}(f)=\dim \operatorname{Im} f=\operatorname{rg}\left(f(a_1),f(a_2),\cdots,f(a_p)\right)$$

جداء مصفوفتين

• **تعريف جداء مصفوفتين** نعتبر المصفوفتين $A=\left(a_{ij}\right)\in\mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$ و $B=\left(b_{ij}\right)\in\mathcal{M}_{pq}(\mathbb{R})$.

إن جداء المصفوفتين $C=A\cdot B$، (والذي لا يكون معرفا إلا إذا كان عدد أسطر B مساويا لعدد أعمدة A).

هو مصفوفة من $\mathcal{M}_{mp}(\mathbb{R})$.

إذا كانت لدينا المصفوفات :

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&5\\3&0&4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&2&3\\5&2&7\\0&1&-1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$$

تكون $A\cdot B$ ،. $A\cdot C$ معرفتين ، أما $B\cdot A$ و $C\cdot A$ فهما غير موجودتين .

• جداء مصفوفة سطر بمصفوفة عمود :

$$A\cdot B=\underbrace{(a_1,a_2,...,a_p)}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_p\end{pmatrix}}_{B}$$

المصفوفة $A\cdot B$ من النمط $(1,1)$: $A\cdot B=\left(a_1b_1+a_2b_2+...+a_pb_p\right)$ مصفوفة سطر واحد وعمود واحد

• الحالة العامة $A=\left(a_{ij}\right)\in\mathcal{M}_{np}(\mathbb{R}),\ B=\left(b_{ij}\right)\in\mathcal{M}_{pq}(\mathbb{R})$

حينما يتعرف $C = A\cdot B$ ، يكون : $C=\left(c_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le q}}=\left(\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}\right)_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le q}}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1q}\\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2q}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ c_{n1} & \cdots & \cdots & c_{nq}\end{pmatrix}$

في المصفوفتين $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0\\ -2 & 3 & 1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} 2 & 1\\ -1 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$

الجداء $A.B$ ممكن لأن عدد أعمدة A يساوي عدد أسطر B :

$$A.B=\begin{pmatrix} 2 & 1\\ -1 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0\\ -2 & 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13}\\ c_{21} & c_{22} & c_{23}\\ c_{31} & c_{32} & c_{33}\end{pmatrix}$$

$$c_{11}=(2)(1)+(1)(-2) \quad c_{12}=(2)(2)+(1)(3) \quad c_{13}=(2)(0)+(1)(1)$$
$$c_{21}=(-1)(1)+(1)(-2) \quad c_{22}=(-1)(2)+(1)(3) \quad c_{23}=(-1)(0)+(1)(1)$$
$$c_{31}=(1)(1)+(3)(-2) \quad c_{32}=(1)(2)+(3)(3) \quad c_{33}=(1)(0)+(3)(1)$$

ومنه $$A\,B=C=\begin{pmatrix} 0 & 7 & 1\\ -3 & 1 & 1\\ -5 & 11 & 3\end{pmatrix}$$

خواص C,B,A مصفوفات ، في حالة الجداءات الممكنة، يكون لدينا :

- $A(B\cdot C)=(A\cdot B)C$
- $A(B+C)=A.B+BC$
- $(A+B)C=A\cdot C+B\cdot C$
- $A\cdot O=O$
- $\forall A\in A\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\quad A\cdot I_n=I_n\cdot A=A \quad , \quad \forall n\in\mathbb{N}\quad I_n^n=I_n$

مصفوفة تطبيق خطي

$\mathcal{A}=\left\{a_1, a_2,\cdots, a_p\right\}$ أساس لـ E و $\mathcal{B}=\left\{b_1, b_2,\cdots, b_n\right\}$ أساس لـ F .

و f تطبيق خطي من E في F .

من أجل كل شعاع $(x_1, x_2,\cdots, x_n)$ من E:

$$f\,(x_1,\, x_2,\cdots,\, x_p)=f\left(\sum_{i=1}^{p}x_i\,a_i\right)=\sum_{i=1}^{n}x_i\,f\,(a_i)=(y_1,\, y_2,\cdots,\, y_n)$$

يتحدد التطبيق الخطي f بإعطاء M مصفوفة المركبات $\left(f\,(a_1), f\,(a_2),\cdots, f\,(a_p)\right)$ في الأساس $\mathcal{B}$:

$$M=M(f)=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} f(a_1) & f(a_2) & & f(a_p) \end{array} \\ & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{array} \end{array}$$

M مصفوفة التطبيق الخطي f بالنسبة للأساس $\mathcal{B}$ لفضائي البدء والوصول. هذه المصفوفة تمثل f بالنسبة للأساسين $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$. وبالعكس كل مصفوفة تعرف تطبيق خطي.

إذن يمكن التعبير عن التطبيق الخطي f بالكتابة المصفوفية:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \quad \text{التي تكافئ} \quad Y=M.X$$

مصفوفة تركيب تطبيقين خطيين

نعتبر مركب التطبيقين الخطيين f و g :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^m \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & \mathbb{R}^p \arrow[r, "g"] & \mathbb{R}^q \end{tikzcd}$$

إذا كانت $A=M(f)\in\mathcal{M}_{mp}(\mathbb{R})$ و $B=M(g)\in\mathcal{M}_{p.m}(\mathbb{R})$ ، فإن مصفوفة التطبيق الخطي $g\circ f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^q$ من $\mathcal{M}_{m.q}(\mathbb{R})$ تتعرف بالشكل : $M(g\circ f)=M(g)\cdot M(f)=B\cdot A$

$$f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^3$$
$$(x,y)\mapsto(x-y,-y,2x+y)$$
$$g:\mathbb{R}^4\longrightarrow\mathbb{R}^2$$
$$(x,y,z,t)\mapsto(x+y+z+t,y-t)$$

باستخدام المصفوفات نعين $f\circ g$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

يمكن حساب $A\cdot B$ لأن عدد أعمدة $A=$ عدد أسطر B

$$M(f\circ g)=M(f)\cdot M(g)=A\cdot B$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

والتطبيق الخطي $f\circ g$ معرف كما يلي:

$$f\circ g:\mathbb{R}^4\longrightarrow\mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z,t)\mapsto(x+z+2t,-y+t,2x+3y+2z+t)$$

في الأساس القانوني لـ: $\mathbb{R}^3$ و f ، التطبيق الخطي من $\mathbb{R}^3$ في $\mathbb{R}^3$ المعرف كما يلي:

$f(e_3)=-e_1-e_2$ ،$f(e_2)=-e_1-e_3$ ،$f(e_1)=-e_2-e_3$

أحسب $f(e_1-2e_2+3e_3)$. هل يوجد شعاع V من $\mathbb{R}^3$ بحيث $f(V)=0_{\mathbb{R}^3}$ ؟

عين الأشعة (x,y,z) من $\mathbb{R}^3$ التي تحقق $f(x+y,-x+y,z+y)=(-1,1,2)$.

ما هو الشرط الذي تحققه x,y,z حتى ينتمي الشعاع $V=xe_1+ye_2+ze_3$ إلى الصورة $f(\mathbb{R}^3)$ ؟

حساب $f(e_1-2e_2+3e_3)$:

$$f(e_1-2e_2+3e_3)=f(e_1)-2f(e_2)+3f(e_3)$$
$$=(-e_2-e_3)-2(-e_1-e_3)+3(-e_1-e_2)=-e_1-4e_2+e_3$$

- الشعاع V من $\mathbb{R}^3$ بحيث $f(V)=0_{\mathbb{R}^3}$:

$$\begin{pmatrix}0&-1&0\\-1&0&-1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow x=y=z=0$$

- الأشعة (x,y,z) من $\mathbb{R}^3$: $\mathbb{R}^3$: $f(x+y,-x+y,z+y)=(-1,1,2)$

$$f(x+y,-x+y,z+y)=(-x-y+x-y,-x-y-y-z,-x+y+y+z)$$
$$=(-2y,-x-2y-z,-x+2y+z)$$

الشرط الذي تحققه (x,y,z) يكافئ $\begin{pmatrix}-1&-1&0\\-1&0&-1\\0&-1&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$ وحلها هو $\begin{pmatrix}-3/2\\1/2\\-1/2\end{pmatrix}$.

الشعاع $V=xe_1+ye_2+ze_3$ ينتمي $f(\mathbb{R}^3)$.

من أجل كل $V=(x,y,z)$ من $f(\mathbb{R}^3)$، يوجد $X=(\alpha,\beta,\gamma)$ من $\mathbb{R}^3$ بحيث $f(X)=V$،

يمكن التحقق من ذلك على النحو الآتي :

$$\begin{pmatrix}-1&-1&0\\-1&0&-1\\0&-1&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\alpha-\beta\\y=-\alpha-\gamma\\z=-\beta-\gamma\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-1/2(-x-y+z)\\\beta=-1/2(x-y+z)\\\gamma=-1/2(-x-y-z)\end{cases}$$